DOI:10.14107/j.cnki.kzgc.2003.01.009
2003年1月 控 制 工 程 Jan. 2003
第10卷第1期 Control Engineering of China Vol.10, No.1

文章编号: 1671-7848(2003)01-0037-06

PID 控制的应用与理论依据

吴宏鑫, 沈少萍
(北京控制工程研究所, 北京 100080)

摘 要: PID 控制是自动控制中产生最早、应用最广的一种控制方法。从 PID 控制的结构形式、实际控制工程需求和实现条件分析了 PID 控制的独特优点, 同时又介绍了二阶线性定常系统 PID 控制器的设计方法, 叙述了高阶线性定常系统的特征建模原理, 重点分析和推导了基于特征模型的带消除静差的二次型最优控制设计方法, 证明了高阶线性定常系统和一大批非线性系统能用 PID 控制器实现位置恒值控制的基本原理, 为随输出状态不同而选择不同 P、I、D 参数等各种人工调节方法提供了合理性解释, 最后说明了 PID 控制器结构是智能控制的一种最基础单元。

关 键 词: PID 控制器; 特征模型; 二次型最优控制; 高阶线性定常系统
中图分类号: TP 13 文献标识码: A

1 引 言

从技术应用角度看, PID 控制是自动控制中产生最早的一种控制方法, 至少可追逆到1 000年前我国北宋年间发明的闭环调节系统——水运仪象台[1]; 从理论角度看, 是 20 世纪 40 年代开始的调节原理的一种典型代表。PID 控制在实际控制工程中应用最广, 据不完全统计, 在工业过程控制, 航空航天控制等领域中, PID 控制的应用占 80 %以上。尽管 PID 控制已上了经典教科书, 然而由于 PID 控制的简单与应用效果, 人们仍在不断研究 PID 控制器各种设计方法(包括各种自适应调参、最优化方法)和未来潜力[2]。本文的研究重点是另外一些问题, 即 PID 控制为什么应用如此早, 如此广泛呢? PID 控制器设计的理论依据是什么?

2 PID 控制器的基本结构形式

为回答上述问题, 不妨先介绍一下目前应用的 PID 控制器结构形式。

①连续形式的 PID 控制器

$$u(t)=k_{P}e(t)+k_{I}\int_{0}^{t}e(t)\mathrm{d}t+k_{D}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

式中, $e(t)=y_r-y(t)$为输出误差。

②离散形式的 PID 控制器

$$u(k)=k_{P}e(k)+k_{I}\sum_{i=1}^{k}e(i)+k_{D}\Delta e(k) \tag{2}$$

根据不同对象特点与不同控制要求, PID 又可分 PI, PD, PID, 增量 PID, 分离积分的 PID, 以及带各种滤波器的 PID 控制器等。

3 PID 控制应用

一种控制方法能被广泛应用和发展, 根本原因在于这种控制方法满足实际控制的应用需求和具备应用实现的条件。

在计算机技术没有发展的条件下, 大量需求的控制对象是一些较为简单的单输入单输出线性系统, 而且对这些对象的自动控制要求是保持输出变量为要求的恒值, 消除或减少输出变量与给定值之误差、误差速度等。而 PID 控制的结构, 正是适合于这种对象的控制要求。另一方面, PID 控制结构简单、调试方便, 用一般电子线路、电气机械装置很容易实现, 在无计算机条件下, 这种 PID 控制比其他复杂控制方法具有可实现的优先条件, 即使到了计算机出现的时代, 由于被控对象输出信息的获取目前主要是“位置信息”、“速度信息”和部分“加速度信息”, 而更高阶的信息无法或很难测量, 在此情况下, 高维、复杂控制只能在计算方法上利用计算机的优势, 而在实际应用中, 在不能或难以获得高阶信息的条件下, PID 控制或二阶形式的控制器仍是应用的主要方法。

收稿日期: 2002-11-05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69984007)
作者简介: 吴宏鑫(1939-), 男, 江苏丹徒人, 研究员, 博士生导师, 主要从事智能控制、自适应控制、航天器控制等领域的研究。

4 PID 控制器设计的理论依据

PID控制器设计方法已上了教科书的有[3,4] 3种:经验试凑法;根据经典调节原理的频域法;主导极点的时域设计方法。

上面3种方法中第一种方法在工业控制及对象数学模型不精确的情况下应用最多。第二、三种方法在航空航天控制器设计中应用较多。从上述方法中可以看出,PID控制器设计的理论依据就是基于二阶线性定常系统,按二次最优控制且消除静差的理论和方法设计的。

对高阶线性定常系统和一部分非线性系统,除上述PID控制器的设计方法外还有各种PID控制器设计方法[2],特别是基于有约束的最优PID控制器设计[5]和双输入双输出解耦PI控制器设计[6],这些方法确有很好的应用效果。但从理论上还不能完全解释,也很难从理论上解释积分分离法,分段调P,I,D参数等人工经验方法的可行性。为此,本文将从另一个角度来研究PID控制的理论依据,即从高阶线性定常系统和一部分非线性系统所建特征模型的角度来研究PID控制器的设计问题,为保证论文的完整性,首先介绍一下基于二阶线性定常系统的PID控制器设计方法。

4.1 二阶线性定常系统的 PID 控制器设计[3]

1) 连续系统的PID控制器设计 设被控对象为

$$\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=b_1\dot{u}+b_0u+v \tag{3}$$

将式(3)写成状态方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}u+V\\ y=\boldsymbol{C}x\end{cases} \tag{4}$$

式中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=[1,0],$$

$\beta_1=b_1,\beta_2=b_0-a_1b_1,\ x=[x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$,

$x_1=y=x_2+\beta_1u$,V为常值干扰。

当控制性能要求为二次型最优控制且稳态误差为零时,则PID控制的设计步骤如下:

①对式(4)再微分,消除常值干扰,得增量方程

$$\begin{cases}\ddot{x}=\boldsymbol{A}\dot{x}+\boldsymbol{B}\dot{u}\\ \dot{y}=\boldsymbol{C}\dot{x}\end{cases} \tag{5}$$

定义 $z=\dot{x}=[z_1\ z_2]^{\mathrm{T}}=[\dot{x}_1\ \dot{x}_2]^{\mathrm{T}},\ \dot{z}=\ddot{x}$

$Z=[y\ z]^{\mathrm{T}},\ \dot{Z}=[\dot{y}\ \dot{z}]^{\mathrm{T}},\ W=\dot{u}$

增广状态方程为

$$\dot{Z}=\bar{A}Z+\bar{B}W \tag{6}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{A}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$

②现令二次最优控制性能指标为

$$J=\int_0^{\infty}[Z^{\mathrm{T}}QZ+W^{\mathrm{T}}RW]\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

③解得最优控制律为

$$W=-LZ \tag{8}$$

式中,$L=[L_1\ L_{21}\ L_{22}],\ Z=[y\ \dot{x}_1\ \dot{x}_2]^{\mathrm{T}}$

$$\dot{u}=-L_1y-L_{21}\dot{x}_1-L_{22}\dot{x}_2 \tag{9}$$

对式(9)两边积分,当 $u(0)=0$ 时,则

$$u(t)=-L_1\int_0^t y(t)\mathrm{d}t-L_{21}x_1-L_{22}x_2=$$

$$-L_{21}y-L_1\int_0^t y\,\mathrm{d}t-L_{22}(x_1-\beta_1u) \tag{10}$$

整理后得

$$u(t)=\frac{-1}{1-L_{22}\beta_1}\Big[L_{21}y(t)+L_1\int_0^t y\mathrm{d}t+L_{22}\dot{y}\Big] \tag{11}$$

当给定值 $y_r=0,\ e(t)=y_r-y(t)=-y(t),\ \beta_1=b_1$ 时,式(11)可写成式(1)的标准型

$$u(t)=k_{\mathrm{P}}e(t)+k_{\mathrm{I}}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t+k_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

式中,

$$k_{\mathrm{P}}=\frac{L_{21}}{1-L_{22}b_1}\quad k_{\mathrm{I}}=\frac{L_1}{1-L_{22}b_1}$$

$$k_{\mathrm{D}}=\frac{L_{22}}{1-L_{22}b_1}$$

2) 离散系统PID控制器设计 建立二阶线性定常系统的离散化状态方程为

$$\begin{cases}X(k+1)=FX(k)+Hu(k)\\ Y(k)=CX(k)\end{cases}$$

上述状态方程改为增量状态方程,并进行增广,按上述方法,即可得式(2)的离散形式的PID控制

$$u(k)=k_{\mathrm{P}}e(k)+k_{\mathrm{I}}\sum_{i=1}^{k}e(i)+k_{\mathrm{D}}\Delta e(k)$$

鉴于此方法较为简单,不再详述。

4.2 基于对象特征模型的 PID 控制器的设计

在实际控制工程应用中,大部分为高阶系统,

除已有的频率法和主导极点等工程近似化方法之外，本节将从另一个角度来寻求这类高阶线性定常或一大类非线性系统的 PID 控制器设计的原理和方法，以说明 PID 控制器的理论依据。为此，先介绍高阶线性定常系统的特征模型[7]。所谓特征模型就是结合对象的动力学特征和控制性能要求进行建模，而不是仅仅以对象动力学分析来建模。这种模型有 4 大特点：

①在同样输入控制作用下，对象特征模型和实际对象在输出上是等价的(即在动态过程中能保持在允许的输出误差内)，在稳定情况下，输出是相等的；②特征模型的形式和阶次除考虑对象特征外，主要取决于控制性能要求；③特征模型建立的形式应比原对象动力学方程简单，工程实现容易、方便；④特征模型与高阶系统的降阶模型不同，它是把高阶模型的有关信息都压缩到几个特征参量之中，并不丢失信息，一般情况下特征模型用慢时变差分方程描述。

鉴于目前控制系统基本上是用数值计算机实现，所以首先介绍基于二阶慢时变差分方程形式的特征模型的离散 PID 控制器设计。

4.2.1 离散特征模型的 PID 控制器

1）特征模型 文献[7] 已论证了高阶线性定常系统为实现恒值位置控制时，可用一个二阶慢时变差分方程形式的特征模型描述。即当对象方程为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=b_mu^{m}+\cdots+b_0u \tag{13}$$

式中，$m<n$。

相应的二阶慢时变差分方程为

$$y(k+2)=f_1(k)y(k+1)+f_2(k)y(k)+g_0(k)u(k+1)+g_1(k)u(k) \tag{14}$$

写成状态方程

$$\begin{cases}X(k+1)=\boldsymbol{F}(k)X(k)+\boldsymbol{H}(k)u(k)\\ Y(k)=\boldsymbol{C}X(k)\end{cases} \tag{15}$$

式中，

$$\boldsymbol{F}(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ f_2(k) & f_1(k)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_0(k)\\ g_1(k)+f_1(k)g_0(k)\end{bmatrix}$$

$$x_1(k)=y(k)$$

$$x_2(k)=x_1(k+1)-g_0(k)u(k)$$

2）PID 控制器设计 当被控对象式(13)中 $a_0\neq0$，即无积分环节时，为消除静差按二次型最优控制性能设计 PID 控制器，必须注意的问题是基于特征模型设计控制器时，特征模型具有随输出量变化的时变性质，不能完全套用 4.1 节 PID 控制器设计方法。具体设计方法如下：

首先定义新的变量

$$z(k+1)=\sum_{i=1}^{k}y(i),\quad z(k)=\sum_{i=1}^{k-1}y(i)$$

将式(15)状态方程增广，写成如下形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(k+1)&=\begin{bmatrix}z(k+1)\\ \boldsymbol{X}(k+1)\end{bmatrix}=\\ &\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{F}(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z(k)\\ X(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{H}(k)\end{bmatrix}u(k)\\ &=\boldsymbol{F}(k)Z(k)+\boldsymbol{H}(k)u(k)\end{aligned} \tag{16}$$

控制性能指标为

$$J=\sum_{k=1}^{\infty}[Z^{\mathrm{T}}(k)Q(k)Z(k)+u^{\mathrm{T}}(k)R(k)u(k)]$$

对系统 $\sum=[F(k),H(k)]$，当 $k=0\to\infty$ 完全能控制，且 $F(k)$，$H(k)$ 有界；$Q(k)$，$R(k)\,|_{k\to\infty}$ 一致正定。解得最优控制律为

$$\begin{aligned}u(k)&=-\boldsymbol{L}(k)Z(k)=\\ &-[L_1(k)\ L_{21}(k)\ L_{22}(k)]\begin{bmatrix}z(k)\\ x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}=\\ &-[L_1(k)\sum_{i=1}^{k-1}y(i)+L_{21}x_1(k)+\\ &L_{22}x_2(k)]=-[L_1(k)\sum_{i=1}^{k-1}y(i)+\\ &L_{21}(k)y(k)+L_{22}(k)(y(k+1)-\\ &g_0(k)u(k))]\end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned}u(k)=\frac{-1}{1-L_{22}(k)g_0(k)}&[L_1(k)\sum_{i=1}^{k}y(i)+\\ &(L_{21}(k)+L_{22}(k)-L_1(k))y(k)+\\ &L_{22}(k)(y(k+1)-y(k))]\end{aligned} \tag{17}$$

当 $y_r=0$，$e(k)=y_r-y(k)=-y(k)$，$\Delta e(k)=-[y(k+1)-y(k)]$。

写成标准形式

$$\begin{aligned}U(k)=\frac{1}{1-L_{22}(k)g_0(k)}&[(L_{21}(k)+\\ &L_{22}(k)-L_1(k))e(k)+L_1(k)\sum_{i=1}^{k}e(i)+\end{aligned}$$

$$L_{22}(k)\Delta e(k)] = k_P(k)e(k)+ k_I(k)\sum_{i=1}^{k} e(i)+ k_D\Delta e(k) \quad (18)$$

式中，$k_P(k) = \frac{1}{1-L_{22}(k)g_0(k)}[L_{21}(k)+L_{22}(k)-L_1(k)]$

$$k_I(k) = \frac{1}{1-L_{22}(k)g_0(k)}L_1(k)$$

$$k_D(k) = \frac{1}{1-L_{22}(k)g_0(k)}L_{22}(k)$$

鉴于特征模型控制进入稳态阶段，参数趋于或接近常值，则 $\boldsymbol{L}(k)$ 也趋于或接近常阵。

4.2.2 连续特征模型的 PID 控制器

为理论上的完整性，下面介绍连续特征模型及 PID 控制器设计。为此先介绍连续特征模型。

1）二阶时变微分方程的特征模型 在文献[4]中论证高阶线性定常系统的二阶慢时变差分方程形式的特征模型时，已有简单叙述，但没有详细推导。为推导 PID 控制器的设计，现就不含积分环节的高阶线性定常系统如何推导出二阶时变微分方程的特征模型进行论证。

设被控对象为

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{s+\lambda_i}+\sum_{i=1}^{h}\left(\frac{k_{p+i}}{s+\lambda_{p+i}}+\frac{\bar{k}_{p+i}}{s+\bar{\lambda}_{p+i}}\right)+\sum_{i=1}^{p}\frac{k_{w_i}}{(s+w_i)^2} \quad (19)$$

根据文献[4]，可将式(19)看成若干个子系统并联，每个子系统输出 y_i，按其 $y_i \geqslant 0$ 和 $y_i < 0$，分成两组一阶微分方程组（不失一般性重根部分令 $p = 1$，共轭部分取 $h = 2$），即

$$\text{第一组:}\begin{cases}\frac{dy_1}{dt}+\lambda_1 y_1 = k_1 u\\ \cdots\cdots\\ \frac{dy_l}{dt}+\lambda_l y_l = k_l u\\ \frac{dy_{p1}}{dt}+\lambda_{p1}y_{p1} = k_{p1}u\text{（共轭根部分）}\\ \frac{dy_{w_1}}{dt}+w_1 y_{w_1} = \\ k_{w_1}\int_0^t \exp[-w_1(t-\lambda)]\,u(\lambda)d\lambda\\ \text{（重根部分）}\end{cases} \quad (20)$$

$$\text{第二组:}\begin{cases}\frac{dy_{l+1}}{dt}+\lambda_{l+1}y_{l+1} = k_{l+1}u\\ \cdots\cdots\\ \frac{dy_m}{dt}+\lambda_m y_m = k_m u\\ \frac{dy_{p2}}{dt}+\lambda_{p2}y_{p2} = k_{p2}u\text{（共轭根部分）}\end{cases} \quad (21)$$

分别将第一组和第二组合并得

$$\frac{dY_1}{dt}+a_1(y)Y_1 = K_1 u+K_{w_1}\int_0^t \exp[-w_1(t-\lambda)]\,u(\lambda)d\lambda \quad (22)$$

$$\frac{dY_2}{dt}+a_2(y)Y_2 = K_2 u \quad (23)$$

式中，$Y_1 = y_1+\cdots+y_l+y_{p1}+y_{w_1}$，

$Y_2 = y_{l+1}+\cdots+y_m+y_{p2}$，

$K_1 = k_1+\cdots+k_l+k_{p1}$，

$K_2 = k_{l+1}+\cdots+k_m+k_{p2}$

$$a_1(y) = \frac{\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_l y_l+\lambda_{p1}y_{p1}+w_1 y_{w_1}}{y_1+\cdots+y_l+y_{p1}+y_{w_1}}$$

$$a_2(y) = \frac{\lambda_{l+1}y_{l+1}+\cdots+\lambda_m y_m+\lambda_{p2}y_{p2}}{y_{l+1}+\cdots+y_m+y_{p2}}$$

$\lambda_{p+i} = R_i+j\sigma_i$，$\bar{\lambda}_{p+i} = R_i-j\sigma_i$

$y_{p+i} = y_{R_i}-jy_{\sigma_i}$，$\bar{y}_{p+i} = y_{R_i}+jy_{\sigma_i}$

$y_{pi} = y_{p+i}+\bar{y}_{p+i} = 2y_{R_i}$ 实数

$k_{pi} = k_{p+i}+\bar{k}_{p+i}$

$\lambda_{pi}y_{pi} = \lambda_{p+i}y_{p+i}+\bar{\lambda}_{p+i}\bar{y}_{p+i} = 2R_i y_{R_i}+2\sigma_i y_{\sigma_i}$ 实数

当系统开环稳定时，$\lambda_i > 0$，又因每组中 y_i 同号，所以 $a_i(y)$ 是有界的，其范围为

$$0 < \lambda_{1\,\min} \leqslant a_1(y) \leqslant \lambda_{1\,\max}$$

$$0 < \lambda_{2\,\min} \leqslant a_2(y) \leqslant \lambda_{2\,\max}$$

当 $t \to \infty$ 系统进入稳态时，则 $a_1(y)$ 和 $a_2(y)$ 分别为某常值。

分别对式(22)和式(23)再微分，相加并整理后可得

$$\ddot{Y}_1+\ddot{Y}_2+a_1(y)\dot{Y}_1+a_2(y)\dot{Y}_2+\dot{a}_1(y)Y_1+\dot{a}_2(y)Y_2+w_1(y)\dot{y}_{w_1}+w_1^2 y_{w_1} = (K_1+K_2)\dot{u}+K_{w_1}u \quad (24)$$

将式(22)和式(23)两边分别乘以 $a_2(y)$ 和 $a_1(y)$ 整理相加得

$$a_2(y)Y_1 + a_2(y)a_1(y)Y_1 - a_2(y)(\dot{y}_{w_1} + w_1 y_{w_1}) + a_1(y)Y_2 + a_1(y)a_2(y)Y_2 = a_2(y)K_1 u + a_1(y)K_2 u \tag{25}$$

将式(24)与式(25)两边相加, 整理可得

$$\ddot{Y} + (a_1(y) + a_2(y))Y + (a_1(y)a_2(y))Y + \dot{a}_1(y)Y_1 + \dot{a}_2(y)Y_2 + (w_1 - a_2(y))(\dot{y}_{w_1} + w_1 y_{w_1}) = (K_1 + K_2)\dot{u} + (K_{w_1} + a_2(y)K_1 + a_1(y)K_2)u \tag{26}$$

式中, $Y = Y_1 + Y_2$。

令 $D = \dot{a}_1(y)Y_1 + \dot{a}_2(y)Y_2 + (w_1 - a_2(y))(\dot{y}_{w_1} + w_1 y_{w_1})$

$$D_1 = \frac{DY}{(Y)^2 + Y^2},\ D_2 = \frac{DY}{(Y)^2 + Y^2}$$

则式(26)可写成

$$\ddot{Y} + f_1(y(t))Y + f_2(y(t))Y = g_0(y(t))u(t) + g_1\dot{u}(t) \tag{27}$$

式中, $f_1(y(t)) = a_1(y) + a_2(y) + D_1$

$f_2(y(t)) = a_1(y)a_2(y) + D_2$

$g_0(y(t)) = a_1(y)K_2 + a_2(y)K_1 + k_{w_1}$

$g_1(\circ) = K_1 + K_2$

式(27)为特征模型二阶微分方程形式, 它有以下特点: 因为实际控制工程中, 控制量 u 总是有界的, 一个耗能系统在 u 有界情况下 $\dot{y}_{w_1}$, y_{w_1} 是有界的, 又因开环稳定对象 $a_1(y)$, $a_2(y)$ 有界, 且 $t \to \infty$ 时, $a_1(y)$ 和 $a_2(y)$, y_{w_1} 均为常值, 所以当高阶线性定常系统开环稳定, 则 $f_1(y(t))$, $f_2(y(t))$, $g_0(y(t))$ 和 g_1 是连续有界的, 且当 $t \to \infty$ 进入稳态后, 微分方程各系数为常值。

2) 连续 PID 控制器设计　将特征模型式(27)写成如下状态方程

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \boldsymbol{A}(t)X(t) + \boldsymbol{B}(t)u(t) \\ Y(t) = \boldsymbol{C}X(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{28}$$

式中, $\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f_2(y(t)) & -f_1(y(t)) \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = [1, 0]$

$\beta_1 = g_1$, $\beta_2 = g_0 - f_1(y(t))g_1$

$X = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$, $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 + \beta_1 u$

为设计 PID 控制器, 首先定义

$$Z(t) = \int_0^t x_1(t)\mathrm{d}t,\ \dot{Z}(t) = x_1(t)$$

建立增广状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Z}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{X}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(t) \\ X(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(t) \end{bmatrix} u(t) \tag{29}$$

令: $\dot{\bar{\boldsymbol{Z}}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}(t) \\ \dot{X}(t) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} Z(t) \\ X(t) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A(t) \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ B(t) \end{bmatrix}$

则式(29)可写成

$$\dot{\bar{\boldsymbol{Z}}} = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{Z}(t) + \boldsymbol{H}(t)u(t) \tag{30}$$

二次型最优控制性能指标

$$J = \int_1^{\infty} [Z^{\mathrm{T}}(t)Q(t)Z(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\,\mathrm{d}t \tag{31}$$

根据二次最优控制理论, 可知当系统满足如下条件:

①对任意 $t_0 \in [0, \infty)$, $\sum = (\boldsymbol{F}(t)\ \boldsymbol{H}(t))$ 是完全能控的; ② $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{H}(t)$ 是在 $[t_0, \infty)$ 上连续并一致有界的函数阵; ③ $S = 0$(零阵), $Q(t)$, $R(t)$ 为在 $[t_0, \infty)$ 上连续的一致正定对称阵, 则存在最优控制律的解。

由于①, ②条特征模型的系数满足, 而 $Q(t)$, $R(t)$ 是人为选定也可满足, 所以对式(30)和式(31)的性能指标, 可得最优控制律:

$$u(t) = -\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{Z}(t)$$

式中, $\boldsymbol{L}(t) = [L_1(t)\ L_{21}(t)\ L_{22}(t)]$

$$\boldsymbol{Z}(t) = [Z(t)\ x_1(t)\ x_2(t)]^{\mathrm{T}} = \left[\int_0^t y_1\mathrm{d}t\quad y(t)\quad \dot{y}(t) - \beta_1 u\right]$$

$$u(t) = -\left[L_1(t)\int_0^t y(t)\mathrm{d}t + L_{21}y(t) + L_{22}\dot{y}(t) - L_{22}(t)\beta_1 u(t)\right]$$

整理得

$$u(t) = \frac{-1}{1 - L_{22}(t)\beta_1(t)}\left[L_1(t)\int_0^t y(t)\mathrm{d}t + L_{21}y(t) + L_{22}\dot{y}(t)\right] \tag{32}$$

$e(t) = y_r - y(t)$, 当 $y_r = 0$ 时,

则 $e(t) = -y(t)$,

$$u(t) = k_{\mathrm{P}}(t)e(t) + k_{\mathrm{I}}\int_0^t e(t)\mathrm{d}t + k_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

式中, $k_{\mathrm{P}}(t) = L_{21}(t)/[1 - L_{22}(t)g_1(t)]$, $k_{\mathrm{I}}(t) = L_1(t)/[1 - L_{22}(t)g_1(t)]$, $k_{\mathrm{D}}(t) = L_{22}(t)/[1 - L_{22}(t)g_1(t)]$, $k_{\mathrm{P}}(t)$, $k_{\mathrm{I}}(t)$, $k_{\mathrm{D}}(t)$ 是连续有界函数, 当 $t \to \infty$, 系统进入稳态, 则 $k_{\mathrm{P}}(\infty)$, $k_{\mathrm{I}}(\infty)$,

$k_D(\infty)$ 为常值。

5 结 语

基于对象特征模型的离散形式和连续形式的 PID 控制器设计的理论依据是带消除静差的二次型最优控制。鉴于特征模型控制进入稳态阶段参数趋于或接近常值，则 $\boldsymbol{L}(k)$ 也趋于或接近常阵。由此可说明如下 4 个问题：

①对于高阶线性定常系统，为达到最好效果，其 P，I，D 3 个参数随输出不同而变化，但进入稳态时，在工作点附近，P，I，D 3 个参数是常值，所以可用一个常系数 PID 控制器控制高阶线性定常系统。又由于最优控制方法有很强的鲁棒性，所以一般人为试调 P，I，D 在一定范围内即可应用；②在控制过渡过程中，k_P，k_I，k_D 与输出 $y(k)$ 及其速度有关，所以当求解时变 P，I，D 3 个参数很复杂时，可人为试凑 P，I，D 3 个参数，如能按不同输出状态选不同的 P，I，D 参数，从理论上讲会使过渡过程品质更好。由此也说明了积分分离法、逻辑积分或分段调 P，I，D 参数等方法在理论上的合理性；③对于一大批非线性系统，作者在另文中已证明也可写成二阶慢时变差分方程的特征模型，所以也可以用 PID 控制器实现无静差的最优或次优控制；④PID 控制器的结构形式是非常好的结构形式。对于高阶定常对象，P，I，D 3 个参数与输出状态是一种非线性关系，由此可推导出各种非线性 PID 控制器以达到最佳效果。双输入单输出的模糊控制器从本质上讲也是这类 PID 控制的不同形式或者说是控制理论与专家经验相结合的一种形式。

鉴于 PID 控制的独特优越性，它将是复杂系统智能控制的最基本最基础的一个子控制单元。

参考文献：

[1] 钱学森，宋健．工程控制论[M]．北京：科学出版社，1983．

[2] Alf Isaksson，Tore Hägglund．Editorial PID Control[J]．IEE Proc.-Control Theory Appl，2002，149(1)：1-2．

[3] 孙增圻．计算机控制理论及应用[M]．北京：清华大学出版社，1989．

[4] 胡寿松．自动控制原理[M]．北京：国防工业出版社，1984．

[5] Panagopoulos H，Åström K J and Hägglund T．Design of PID controllers based on constrained optimization[J]．IEE Proc.-Control Theory Appl，2002，149(1)：32-40．

[6] ström K J，Johansson K H，Wang Q G．Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems[J]．IEE Proc.－Control Theory Appl，2002，149(1)：74-81．

[7] 吴宏鑫，刘一武，刘忠汉，等．特征建模与挠性结构的控制[J]．中国科学(E 辑)，2001，31(3)：137-149．

Basis of Theory and Applications on PID Control

WU Hong-xin，SHEN Shao-ping

(Beijing Institute of Control Engineering，Beijing 100080，China)

Abstract：PID control，as a kind of control method in automatic control，is produced the earliest and is used for the widest range of application. Based on PID control's structure，the need of practical control engineering and the realizable conditions，this paper analyzes PID control's special advantages. The design method of the PID controller of the two-order linear time-invariant system is introduced. The characteristic modeling principle of the high-order linear time-invariant system is described. This paper analyzes and deduces emphatically the design method of quadratic optimal control with removed static error based on the characteristic model，proving the basic theory that position fixed set point control can be realized by using PID control for the high-order linear time-invariant system and a large amount of nonlinear systems，and at the same time offering the reasonable explanation for all kinds of artificial adjust methods which choose different PID parameters with respect to output stations. Finally，structure of PID controller is a most basic unit in intelligent control is pointed out.

Key words：PID controller；characteristic model；quadratic optimal control；high-order linear time-invariant system

告广大读者、作者

尊敬的广大读者、作者：

＊ 本刊现已被俄罗斯《文摘杂志》(AJ)、美国《剑桥科学文摘》(CSA)、英国《科学文摘》(SA，INSPEC)等著名检索机构检索。

＊ 本刊执行《中华人民共和国著作权法》，凡在《控制工程》杂志上登载的文章，刊出一周内我刊一次性付清作者稿酬。以其他形式再版，稿酬不再另付。

《控制工程》编辑部

2003 年 **1** 月