# 第 10 讲：　马尔可夫（Markov）预测模型

## 1.Markov 链（Markov Chain）介绍

### 一、相关基础知识

**Markov** 1856-1922

马尔可夫过程　（Markov Process），它因俄罗斯数学家安德烈•马尔可夫而得名。具有马尔可夫性质的离散随机过程，即为 Markov 链。Markov 链的在很多应用中发挥了重要作用，例如，谷歌所使用的网页排序算法（PageRank）就是由 Markov 链定义的。Markov 链是一种特殊的随机过程。它的基本概念如下：

**1. 状态**：指某一事件在某个时刻（或时期）出现的某种结果。设一随机过程｛$X_n$，$n=0,1,2,\cdots$｝下标 $n$ 代表时间，$X_n$ 取值的状态空间为有限集或可列集，状态空间中的元素 $X_n$ 的取值极为非负整数 0，1，2…，是随机过程所处的状态。

**2. 马氏性**：如果已知在$t=\mu$时$X_\mu$的状态，未来$Xv$ $(v>\mu)$的状态不受过去$X_w\,(w<\mu)$状态的影响，就称过程$\{X_n\}$具有马氏性。马氏性所表达的是在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”是独立的，这种性质也称为“无后效性” 。

**3. 状态转移概率**：在事件的发展变化过程中，从某一种状态出发，下一时刻转移到其它状态的可能性，称为状态转移概率。

考虑只取有限个或可数个值的随机过程$\{X_n, n=0,1,2\cdots\}$。把过程所取可能值的全体称为它的状态空间，记之为$E$，通常假设$E=\{0,1,2,\cdots\}$。

若$X_n=i$，就说“过程在时刻$n$处于状态$i$”，假设每当过程处于状态$i$，则在下一个时刻将处于状态$j$的概率是固定的$p_{ij}$，即对任意时刻$n$

$$P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)=p_{ij}$$

$p_{ij}$代表处于状态$i$过程于下一步转移到状态$j$的概率。由于概率是非负的，且过程必须转移到某个状态，所以状态转移概率满足：

（i） $0\le p_{ij}\le 1, \quad i,j=1,\cdots,n$

（ii） $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$

**4. Markov 链**：若对任意状态$i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\,(i, j\text{及任意的}n\ge 0)$有

$$P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \ldots, X_1=i_1, X_0=i_0\right)=P\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i\right)$$

这样的随机过程称为 Markov 链。

R.A.Howard为我们提供了对马尔可夫链风景如画般的描述，就像一只青蛙在一组睡莲上跳跃。这只青蛙开始在一片叶子上，然后以相应的转移概率从一片睡莲叶子跳到另一片叶子上。

易见，上述 Markov 链具有 Markov 性。

**5. 状态转移概率矩阵**：以$P$记一步转移矩阵$p_{ij}$的矩阵，从而

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$P$称为一步转移概率矩阵，简称转移矩阵。由$p_{ij}$的定义可知，这是一种带有平稳转移概率的 Markov 链，也称作时间齐次 Markov 链或简称时齐的 Markov 链。矩阵$P$的第$i+1$行就是给定$X_n=i$时$X_{n+1}$的条件概率分布。

**6. 时齐马氏链：**如果马氏链的转移矩阵与出发时刻无关， 则称此马氏链是时齐的。通常不特别说明, 马氏链就指时齐马氏链。

**例：** 某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔 15 分钟观察一次计算机的运行状态，收集了 24 小时的数据（共作 97 次观察）。用 1 表示正常状态，用 0 表 示不正常状态，所得的数据序列如下：

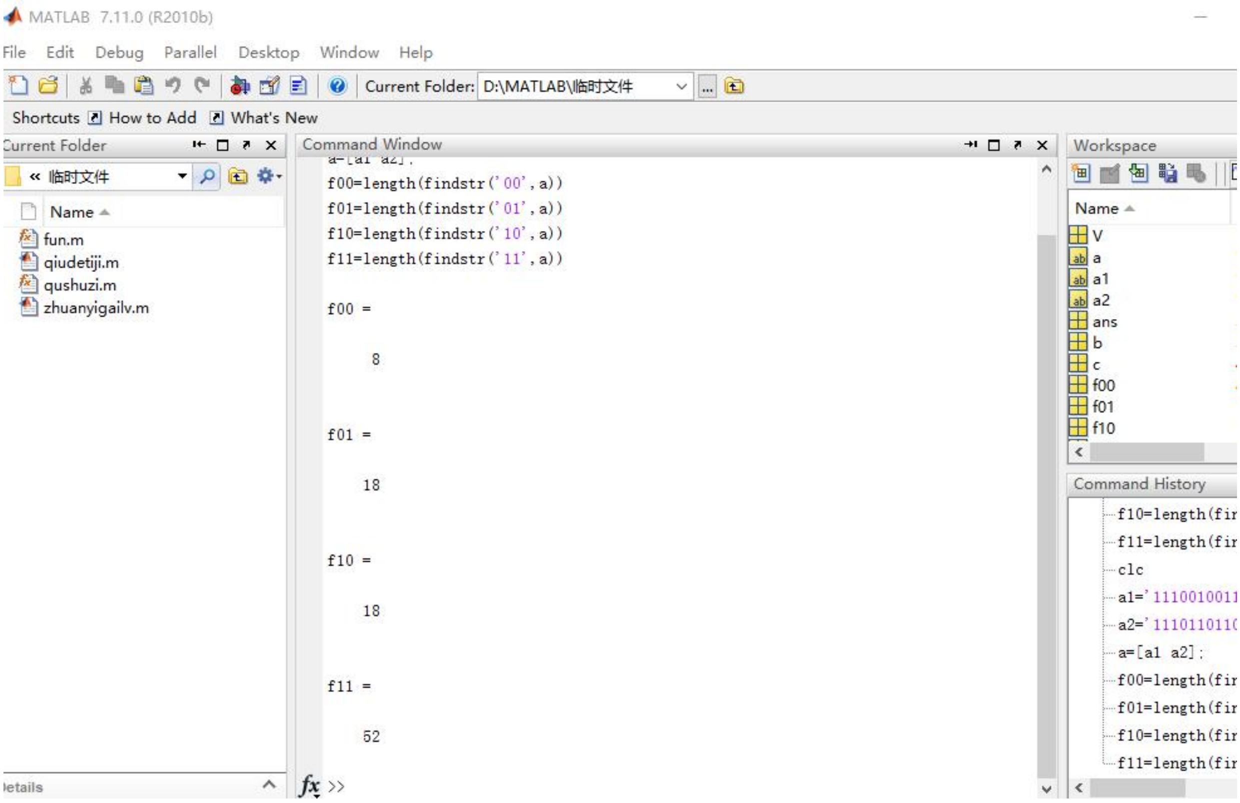
1110010011111110011110111111001111111110001101101

111011011010111101110111101111110011011111100111

**解：** 设 $X_n$ （$n=1,\ldots,97$）为第$n$ 个时段的计算机状态，可以认为它是一个时齐马氏链，状态空间 $E=\{0,1\}$，编写如下 Matlab 程序：

```
a1='1110010011111110011110111111001111111110001101101';
a2='111011011010111101110111101111110011011111100111';
a=[a1 a2];
f00=length(findstr('00',a))
f01=length(findstr('01',a))
f10=length(findstr('10',a))
```

f11=length(findstr('11',a))




（注：关于命令 findstr 的使用

T= 'Find the starting indices of the shorter string.';

Q=findstr(T,'the')　%在字符串 T 中找个出现‘the'字符串的位置

Q=[6 30];　　%表示第 6 个字符和第 30 个字符出现'the'这个字符串

注：直接粘贴上述 Matlab 程序到命令窗口，回车，或者把上述数据序列保存到脚本文件中，存放在 Matlab 下的 work 子目录中。同时可以修改字符串与命令）

求得 96 次状态转移的情况是：

$0 \to 0$，8 次；　$0 \to 1$，18 次；

$1 \to 0$，18 次；　$1 \to 1$，52 次，

因此，一步转移概率可用频率近似地表示为

$$p_{00}=P\{X_{n+1}=0\mid X_n=0\}\approx\frac{8}{8+18}=\frac{4}{13}$$
$$p_{01}=P\{X_{n+1}=1\mid X_n=0\}\approx\frac{18}{8+18}=\frac{9}{13}$$
$$p_{10}=P\{X_{n+1}=0\mid X_n=1\}\approx\frac{18}{18+52}=\frac{9}{35}$$
$$p_{11}=P\{X_{n+1}=1\mid X_n=1\}\approx\frac{52}{18+52}=\frac{26}{35}$$

**例**：设一随机系统状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，记录观测系统所处状态如下：

4 3 2 1 4 3 1 1 2 3

2 1 2 3 4 4 3 3 1 1

1 3 3 2 1 2 2 2 4 4

2 3 2 3 1 1 2 4 3 1

若该系统可用马氏模型描述，估计转移概率 $pij$ 。

**解**： 首先将不同类型的转移数 $nij$ 统计出来分类记入下表

表 1 $i \to j$ 转移数 $nij$ 表

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 行和 $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 1 | 1 | 10 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 11 |
| 3 | 4 | 4 | 2 | 1 | 11 |
| 4 | 0 | 1 | 4 | 2 | 7 |

设 $ni$ 是系统从状态 i 转移到其它状态的次数， $nij$ 是由状态 $i$ 到状态 $j$ 的转移次数，则 $pij$ 的估计值

$$p_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_i}。$$

计算得

$$\hat{P}=\begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/10 \\ 3/11 & 2/11 & 4/11 & 2/11 \\ 4/11 & 4/11 & 2/11 & 1/11 \\ 0 & 1/7 & 4/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

Matlab 计算程序如下：

```
format rat %format 函数：控制输出、显示格式，最小整数比例（分数）表示
clc %清除命令窗口
a=[4 3 2 1 4 3 1 1 2 3 ...
    2 1 2 3 4 4 3 3 1 1 ...
    1 3 3 2 1 2 2 2 4 4 ...
    2 3 2 3 1 1 2 4 3 1];
for i=1:4          %循环结构。for 循环与 while 循环不同
     for j=1:4
         f(i,j)=length(findstr([i j],a));
     end
end
f
ni=(sum(f'))'       %sum（A）是求矩阵的列和，所以要转置
for i=1:4
     p(i,:)=f(i,:)/ni(i);
end
p
```

（注：format rat的使用方法

```
>> format rat
>> pi
ans = 355/113）
```

**定理：**由初始状态的概率分布

$$p_i = P(X_0 = i), i = 1,2,\cdots$$

和转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$ 可以完全确定时齐 Markov 链 $\{X_n\}$。

证：对于任何一个 $i_0, i_1, \cdots, i_n \in E$，计算得到有限维联合分布，根据概率的乘法公式和马氏性可以知道

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\
&= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_n = i_n / X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) p_{i_{n-1} i_n} \\
&= p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}
\end{aligned}$$

定理得证。

从定理可以看出，一步转移概率矩阵和它的初始分布完全决定了一个 Markov 链的特性。

**7. 状态向量：**用 $\pi_j(k)$ 表示事件在第 $k$ 个时刻（时期）处于状态 $j$ 的概率。

显然，$\sum_{j=1}^{n} \pi_j(k) = 1$。根据马尔可夫过程的无后效性及 Bayes 条件概率公式，有

$$\pi_j(k) = \sum_{i=1}^{n} \pi_j(k-1) p_{ij} \quad i, j = 1, \cdots, n$$

记 $\pi(k) = [\pi_1(k), \cdots, \pi_n(k)]$ 为第 $k$ 个时刻（时期）的状态概率向量。由上式可得到计算状态概率向量的递推公式：

$$\pi(k) = \pi(k-1)P = \cdots = \pi(0)P^k$$

其中，$\pi(0)$为初始状态概率向量。

于是，若事件在某个时刻（时期）的状态$\pi(s_0)$已知，则利用状态转移概率矩阵$P$和递推公式，就可以求得它经过$k$次状态转移后，在第$s_0+k$个时刻（时期）处于各种可能的状态的概率$\pi(s_0+k)$，从而就得到该事件在第$s_0+k$个时刻（时期）的状态概率预测。

**8. 终极状态预测**

经过无穷多次状态转移后所得到的状态概率称为终极状态概率，即

$$\lim_{k\to\infty}\pi(k)=[\lim_{k\to\infty}\pi_1(k),\cdots,\lim_{k\to\infty}\pi_n(k)]=[\pi_1,\cdots,\pi_n]=\pi$$

此时，由

$$\pi_j(k)=\sum_{i=1}^{n}\pi_j(k-1)p_{ij} \quad i,j=1,\cdots,n$$

知终极状态概率应满足：$\pi=\pi P$，即$P^T\pi^T=\pi^T$，即$(P^T-E)\pi^T=\theta$

$$\begin{cases}(p_{11}-1)\pi_1+p_{21}\pi_2+\cdots+p_{n1}\pi_n=0\\ p_{12}\pi_1+(p_{22}-1)\pi_2+\cdots+p_{n2}\pi_n=0\\ \qquad\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\\ p_{1n}\pi_1+p_{2n}\pi_2+\cdots+(p_{nn}-1)\pi_n=0\end{cases}$$

该齐次方程组的系数行列式为 0，有无穷多个解，为得到唯一的正确解，需要另一个限制条件：$\sum_{i=1}^{n}\pi_i=1$

**9. 马氏链的不变分布**

. 状态空间 $E$ 上的一个概率分布$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)$ 称为转移概率矩阵 $P$ 的不变概率分布(简称不变分布)， 如果 $\pi=\pi P$ 。

. 一般来说，不变分布未必存在。若不变分布存在且唯一， 则它是以下代数方程组的唯一非负解：
$$\begin{cases}\pi = \pi P \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1\end{cases}$$

**定理：**若马氏链$\{X_n, n=0,1,2\cdots\}$的状态空间$E$为有限集(不妨$E=i_0,i_1,\cdots,i_n.$），且它的转移概率矩阵互通常返，则它存在唯一不变概率分布：

$$\pi = (\pi_1,\cdots,\pi_n)$$

且

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

## 二、Markov 预测法

Markov 预测法，是一种预测事件发生的概率的方法。它是基于马尔可夫链，根据事件的目前状况预测其将来各个时刻（或时期）变动状况的一种预测方法。

马尔可夫预测法的基本要求是状态转移概率矩阵必须具有一定的稳定性。因此，必须具有足够的统计数据，才能保证预测的精度与准确性。换句话说，马尔可夫预测模型必须建立在大量的统计数据的基础之上。

**1. Markov 预测法前提：**运用 Markov 预测法研究实际问题时，对预测对象在预测期间内的要求：

（1）转移概率矩阵逐期不变，即每个时期向下一个时期的转移概率都是不

变的，均为一步转移概率。

（2）预测期间状态的个数保持不变。

（3）状态的转移只受前一期的影响，而与前一期以前所处状态无关。

**2. Markov 预测法步骤：**运用 Markov 分析法解决问题的步骤如下：

（1）确定预测对象的状态及状态空间 $E=[i_0,i_1,\cdots,i_n]$；

（2）确定转移概率 $p_{ij}$ 和状态转移概率矩阵 $p$；

（3）计算初始状态分布向量 $\pi(0)=[\pi_1(0),\cdots,\pi_n(0)]$；

（4）建立模型进行预测，计算 $k$ 时刻各状态的状态向量

$$\pi(k)=[\pi_1(k),\cdots,\pi_n(k)]。$$

（5）解方程组 $\begin{cases}\pi=\pi P\\ \sum_{i=1}^{n}\pi_i=1\end{cases}$，对终极状态 $\pi=(\pi_1,\pi_2\ldots,\pi_n)$ 进行预测。

**3. Markov 预测法的缺陷：**只适用于短期预测，不适用于长期预测，因为长期中转移概率矩阵将发生变化。

# 2. 马氏链的应用

## 一、农业收成情况预测问题

**1. 问题提出：**设某地区农业收成变化有三个状态，即状态 1 表示“丰收”、状态 2 表示“平收”及状态 3 表示“欠收”。下表给出了该地区 1960-1999 年期间农业收成的状态变化情况（部分）。

| 年份 | 状态 |
|---|---|
| 1960 | 1 |
| 1961 | 3 |
| 1962 | 1 |
| 1963 | 3 |
| 1964 | 2 |
| 1965 | 2 |
| 1966 | 1 |
| 1967 | 1 |
| 1968 | 2 |
| 1969 | 1 |
| 1970 | 2 |
| 1971 | 2 |
| 1972 | 1 |
| 1973 | 2 |
| 1974 | 3 |
| 1975 | 2 |
| 1976 | 3 |
| 1977 | 2 |
| 1978 | 1 |
| 1979 | 1 |
| 1980 | 3 |

试解决以下问题：

• 计算该地区农业收成变化的状态转移概率矩阵；

• 利用状态转移概率矩阵及递推公式，预测 2000—2009 年可能出现的各种状态的概率；

•预测该地区农业收成的变化过程，即在经历无穷多次状态转移后，“丰收”、“平收”及“欠收”状态出现的概率。

**2.　问题求解：**

（1）确定预测对象的状态及状态空间 $E=[1,2,3]$；

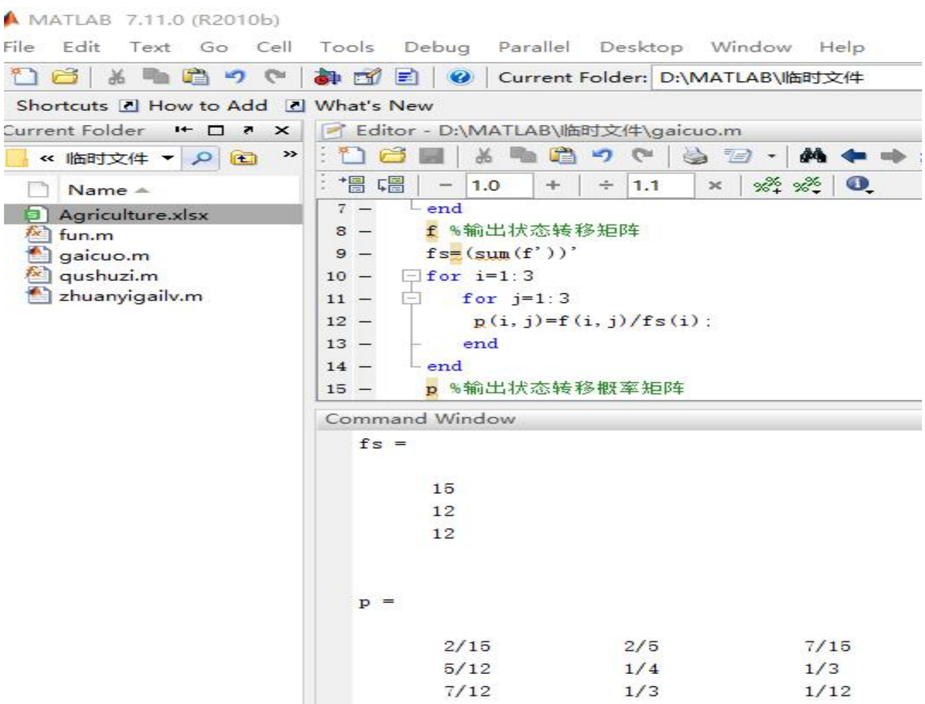
（2）确定转移概率和状态转移概率矩阵；

求从每个状态转移到其它任何一个状态的状态转移概率 $p_{ij}$，一般采用频率近似概率的思想进行计算。

datas=xlsread('Agriculture.xlsx');　%函数读取 Excel 表格数据，读取的文件要存在“当前文件夹”里，否则 Matlab 读取不到数据。

```
E=datas(:,2)'; %读取数据的第二列并转置
for i=1:3
    for j=1:3
        f(i,j)=length(findstr([i j],E));
    end
end
f %输出状态转移矩阵
fs=(sum(f'))' ;
for i=1:3
    p(i,:)=f(i,:)/fs(i);
end
p %输出状态转移概率矩阵
```

运算结果如下：



（3）确定初始分布向量，1999 年的农业收成状态记为$\pi(0)=[0,1,0]$；

（5）建立模型进行预测，计算$k$时刻各状态的状态向量

$$\pi(k)=[\pi_1(k),\cdots,\pi_n(k)],k=2000,\ldots 2009.$$ 。

利用状态转移概率矩阵及递推公式，预测 2000—2009 年可能出现的各种状态的概率。

---

```
S{1}=[0 1 0];%这里未使用符号pi，使用pi会与系统自带的常数变量重复
for i=1:10
    S{i+1}=S{i}*P;
end
S{2:end}
```

---

运行结果：

```
ans =   0.5385    0.1538    0.3077   %2000 年状态概率
ans =   0.3024    0.4148    0.2828
ans =   0.3867    0.3335    0.2799
ans =   0.3587    0.3590    0.2824
ans =   0.3677    0.3510    0.2813
ans =   0.3648    0.3535    0.2817
ans =   0.3657    0.3527    0.2816
ans =   0.3654    0.3529    0.2816
ans =   0.3655    0.3528    0.2816
```

ans = 0.3655 0.3529 0.2816 %2009 年状态概率

（5）解方程组$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \end{cases}$，对终极状态$\pi = (\pi_1, \pi_2 \ldots, \pi_n)$进行预测。

求问题的终极状态概率向量，Matlab 程序如下：

```
n=3;  %状态数目
A=P'-eye(n);
A(end,:)=ones(1,n);
%将最后一个方程替换为限制条件sum(pi)=1
b=[zeros(n-1,1);1];
S=inv(A)*b  %解方程组Ax=b得到终极状态概率向量
```

此时是 n 个未知数，n+1 个方程，去掉前 n 个中的任意一个，求解即可得到正确解，即终极状态概率向量。

运行结果：

S = 0.3655 0.3529 0.2816

结果说明，该地区农业收成的变化过程，在无穷多次状态转移后，“丰收”和“平收”状态出现的概率基本相当，都大于“欠收”状态出现的概率。

## 二、食堂人气排名问题

**1.问题提出**：某大学有三个食堂 A， B， C，如何估计在食堂 A，B，C 的就餐人数，构建人气排行榜？

**2.问题求解：**

（1）确定预测对象的状态及状态空间$E=[A,B,C]$；

（2）确定转移概率和状态转移概率矩阵；

通过实地调查，或在食堂门口派发问卷等方法，得到如下**调查结果**：

在食堂 A 就餐的人中$P_{aa}$部分仍然回到食堂 A，有$P_{ab}$部分选择食堂 B，$P_{ac}$部分选择食堂 C；

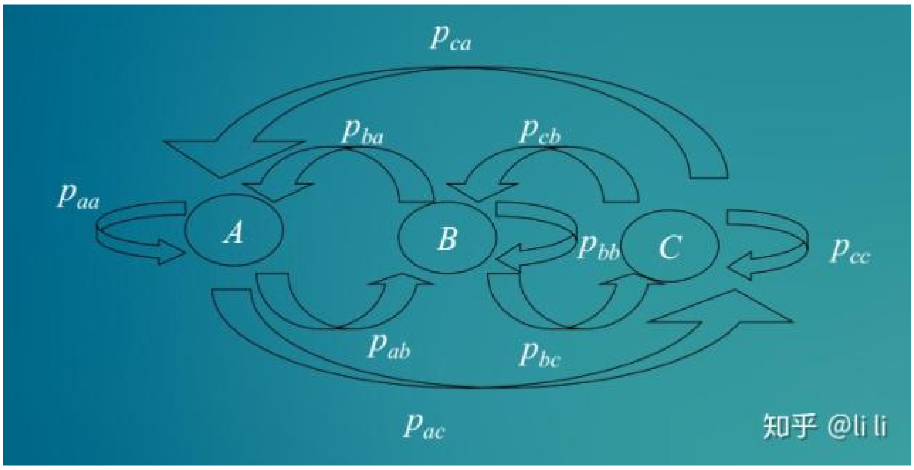
在食堂 B 就餐的人中$P_{bb}$部分仍然回到食堂 B，有$P_{ba}$部分选择食堂 A，$P_{bc}$部分选择食堂 C；

在食堂 C 就餐的人中$P_{cc}$部分仍然回到食堂 C，有$P_{ca}$部分选择食堂 A，$P_{cb}$部分选择食堂 B。

即学生前后两次就餐地点发生变化的概率如下：

| | | 下次次就餐 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | A 食堂 | B 食堂 | C 食堂 |
| 本次就餐 | A 食堂 | $P_{aa}$ | $P_{ab}$ | $P_{ac}$ |
| | B 食堂 | $P_{ba}$ | $P_{bb}$ | $P_{bc}$ |
| | C 食堂 | $P_{ca}$ | $P_{cb}$ | $P_{cc}$ |

状态转移图为：




一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{bmatrix}$$

令 $A_n$ 为第 n 天在食堂 A 就餐的人数所占比例，令 $B_n$ 为第 n 天在食堂 B 就餐的人数所占比例，令 $C_n$ 为第 n 天在食堂 C 就餐的人数所占比例，即 $\pi(n)=\left(A_n,B_n,C_n\right)$，由 $\pi(n)=\pi(n-1)P$ 易得：

$$\begin{cases} A_{n+1}=P_{aa}A_n+P_{ba}B_n+P_{ca}C_n \\ B_{n+1}=P_{ab}A_n+P_{bb}B_n+P_{cb}C_n \\ C_{n+1}=P_{ac}A_n+P_{bc}B_n+P_{cc}C_n \end{cases}$$

**写成矩阵的形式：**

$$A_{n+1},B_{n+1},C_{n+1} =(A_n,B_n,C_n)\begin{pmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{pmatrix}$$

$$A_n,B_n,C_n =(A_0,B_0,C_0)\begin{pmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{pmatrix}^n$$

**实例计算**

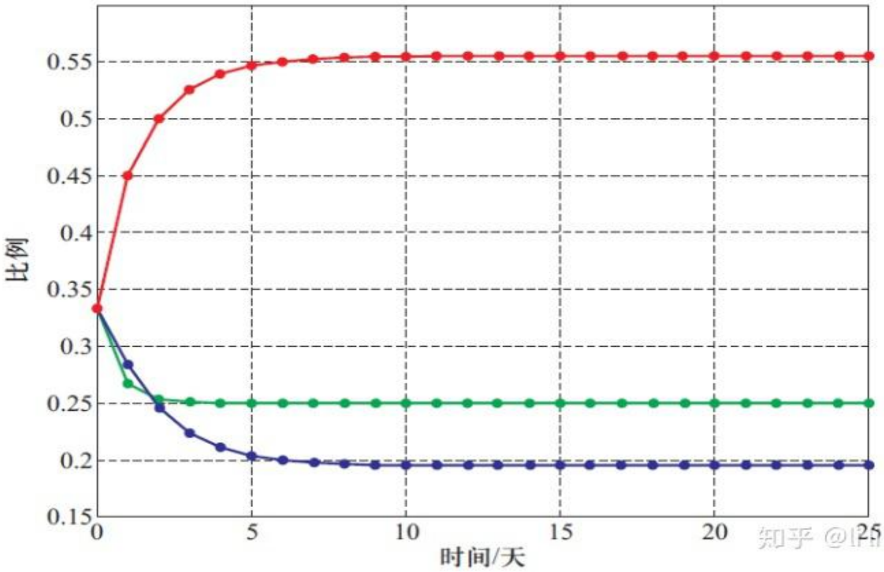
选取初值：$\pi_0 = (A_0, B_0, C_0) = (1/3, 1/3, 1/3)$，若矩阵 P 如下：

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 \end{pmatrix}$$

**数值计算结果：**

| $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ | $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4500 | 0.2833 | 0.2667 | 11 | 0.5553 | 0.1947 | 0.2500 |
| 2 | 0.5008 | 0.2458 | 0.2533 | 12 | 0.5554 | 0.1946 | 0.2500 |
| 3 | 0.5261 | 0.2232 | 0.2507 | 13 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 4 | 0.5395 | 0.2104 | 0.2501 | 14 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 5 | 0.5468 | 0.2032 | 0.2500 | 15 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 6 | 0.5507 | 0.1993 | 0.2500 | 16 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 7 | 0.5529 | 0.1971 | 0.2500 | 17 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 8 | 0.5541 | 0.1959 | 0.2500 | 18 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 9 | 0.5548 | 0.1952 | 0.2500 | 19 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |
| 10 | 0.5551 | 0.1949 | 0.2500 | 20 | 0.5555 | 0.1945 | 0.2500 |

图示如下：




观察：

. 三条线最后都几乎是平的：收敛！

. 三条线都几乎呈幂指数形状：收敛速度很快！

如果更换初值： $\pi_0 = (A_0, B_0, C_0) = (0.8, 0.1, 0.1)$，矩阵 $P$ 保持不变：

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.05 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 \end{pmatrix}$$

数值计算结果：

| $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ | $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $C_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.6600 | 0.1200 | 0.2200 | 11 | 0.5558 | 0.1942 | 0.2500 |
| 2 | 0.6070 | 0.1490 | 0.2440 | 12 | 0.5557 | 0.1943 | 0.2500 |
| 3 | 0.5827 | 0.1686 | 0.2488 | 13 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 4 | 0.5702 | 0.1800 | 0.2498 | 14 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 5 | 0.5636 | 0.1865 | 0.2500 | 15 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 6 | 0.5600 | 0.1901 | 0.2500 | 16 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 7 | 0.5580 | 0.1920 | 0.2500 | 17 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 8 | 0.5569 | 0.1931 | 0.2500 | 18 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 9 | 0.5563 | 0.1937 | 0.2500 | 19 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |
| 10 | 0.5560 | 0.1940 | 0.2500 | 20 | 0.5556 | 0.1944 | 0.2500 |



不动点和前面的一样！

**总结**

- 食堂人气排行榜可以通过调查得到转移概率，求对应的马氏链的不变分布得到。
- 马氏链是一类重要的随机过程，完全由初始概率和转移概率矩阵唯一确定；转移概率矩阵决定了其重要特性（互通性，常返性）；在互通常返下有遍历性定理，保证了不变分布的存在。

**三、市场占有率问题**

设某药品共有 1000 家购买对象，买 A、B、C 三药厂的各有 400 家、300 家、300 家，即 A、B、C 三药厂目前的市场占有份额分别为：40%、30%、30%，故初始市场占有状态向量为[0.4, 0.3, 0.3].

为预测 A、B、C 三个药厂生产的该药品在未来的市场占有情况，收集顾客

订货情况如下表：

表　顾客订货情况表

| | | 下季度订货情况 | | | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | |
| 来自 | A | 160 | 120 | 120 | 400 |
| | B | 180 | 90 | 30 | 300 |
| | C | 180 | 30 | 90 | 300 |
| 合计 | | 520 | 240 | 240 | 1000 |

假设在未来的时期内，订货流向如上表保持不变，即状态转移概率稳定。预测未来 3 年，A、B、C 厂的该药品市场占有率；计算经过若干时期形成稳定之后， A、B、C 厂的该药品市场占有率。

```
f=[160 120 120; 180 90 30; 180 30 90]; %状态转移矩阵
fs=sum(f,2);
for i=1:3
    P(i,:)=f(i,:)/fs(i);
end
P %输出状态转移概率矩阵
S0=[0.4 0.3 0.3];
S1=S0*P
S2=S1*P
S3=S2*P
n=3;  %状态数目: 3个药厂
A=P'-eye(n);
A(end,:)=ones(1,n); %将最后一个方程替换为限制条件sum(pi)=1
b=[zeros(n-1,1);1];
S=inv(A)*b  %解方程组Ax=b得到终极状态概率向量
```

运行结果：

```
P =    0.4000       0.3000       0.3000
       0.6000       0.3000       0.1000
       0.6000       0.1000       0.3000

S1 =    0.5200       0.2400       0.2400
S2 =    0.4960       0.2520       0.2520
S3 =    0.5008       0.2496       0.2496

S = 0.5000    0.2500    0.2500
```

**三、商品利润预测问题**

经典马尔可夫模型可以应用到，某商品的销售状态的预测。例如，销售状态有畅销和滞销两种，在时间变化过程中，有时呈连续畅销或连续滞销，有时由畅销转为滞销或由滞销转为畅销，每次转移不是盈利就是亏本。

假定连续畅销时盈利 $r_{11}$ 元，连续滞销时盈利 $r_{22}$ 元，由畅销转为滞销盈利 $r_{12}$ 元，由滞销转为畅销盈利 $r_{21}$ 元，其中，$r_{22}$ 和 $r_{12}$ 为负数，即亏本。

这种随着系统的状态转移，赋予一定利润的马尔可夫模型，称为带利润的马尔可夫模型。

设状态转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

当系统从状态 $E_i$ 转到 $E_j$ 时，赋以利润 $r_{ij}$，则系统利润矩阵为：

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$r_{ij}>0$ 表示盈利，$r_{ij}<0$ 表示亏本，$r_{ij}= 0$ 表示不亏不盈。

随着时间的变化，系统的状态不断地转移，从而可得到一系列利润。由于状态的转移是随机的，因而一系列的利润是随机变量，其概率关系由马尔可夫链的转移概率决定。

第 1 期的各利润随机变量记为 $x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$，其概率分布为：

| $x_i^{(1)}$ | $r_{i1}$ | $\cdots$ | $r_{in}$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ | $p_{in}$ |

$i=1,\cdots,n$，注意到 $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$. 从而第 1 期的各期望利润 $v_i^{(1)}$ 为：

$$v_i^{(1)}=E(x_i^{(1)})=\sum_{j=1}^{n} r_{ij}p_{ij}, \qquad i=1,\cdots,2$$

第 2 期的各利润随机变量记为 $x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)}$，其概率分布为：

| $x_i^{(2)}$ | $r_{i1}+v_1^{(1)}$ | $\cdots$ | $r_{in}+v_n^{(1)}$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ | $p_{in}$ |

$i=1,\cdots,n$. 从而第 2 期的各期望利润 $v_i^{(2)}$ 为：

$$v_i^{(2)}=E(x_i^{(2)})=\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}+v_j^{(1)})p_{ij} \qquad i=1,\cdots,2$$

依次做下去……，得到第 k 期的各利润随机变量记为 $x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}$，其概率分布为：

| $x_i^{(k)}$ | $r_{i1}+v_1^{(k-1)}$ | $\cdots$ | $r_{in}+v_n^{(k-1)}$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ | $p_{in}$ |

$i=1,\cdots,n$. 从而第 k 期的各期望利润 $v_i^{(k)}$ 为：

$$v_i^{(k)}=E(x_i^{(k)})=\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}+v_j^{(k-1)})p_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}p_{ij}+\sum_{j=1}^{n}v_j^{(k-1)}p_{ij}=v_i^{(1)}+\sum_{j=1}^{n}v_j^{(k-1)}p_{ij}$$

当 k=1 时，规定边界条件 $x_i^{(0)}=0$。

**例 3** 设 $P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & -7\end{bmatrix}$，求第 1 至 5 期的期望利润。

```
P=[0.5 0.5; 0.4 0.6]; %状态转移矩阵

R=[9 3; 3 -7]; %利润矩阵

T=5; %预测5期的期望利润

n=length(P);

v=zeros(n,T); %初始化期望利润矩阵

for i=1:n

    v(i,1)=R(i,:)*P(i,:)'; %第1期的n个期望利润

end

for k=2:T %计算第2至第T期的各期望利润

    for i=1:n
        v(i,k)=v(i,k-1)+P(i,:)*v(:,k-1);
    end
end
v
```

运行结果：

```
v =    6.0000      7.5000     10.0500     14.6550     23.3205
      -3.0000     -2.4000     -0.8400      2.6760     10.1436
```

## 四、股价波动预测问题

以中石油 2012 年 12 月 10 日至 2013 年 5 月 21 日共 104 个交易日的收盘价数据资料为例，运用状态划分方法，预测股价未来所处的状态。数据资料见表 1。

表 1　中石油股票各交易日收盘价列表

| 序号 | 收盘价 | 序号 | 收盘价 | 序号 | 收盘价 | 序号 | 收盘价 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.73 | 27 | 9 | 53 | 8.84 | 79 | 8.63 |
| 2 | 8.69 | 28 | 9.11 | 54 | 8.86 | 80 | 8.64 |
| 3 | 8.73 | 29 | 9.01 | 55 | 8.92 | 81 | 8.52 |
| 4 | 8.68 | 30 | 9.04 | 56 | 8.85 | 82 | 8.53 |
| 5 | 8.9 | 31 | 9.04 | 57 | 8.88 | 83 | 8.52 |
| 6 | 8.91 | 32 | 9 | 58 | 8.88 | 84 | 8.48 |
| 7 | 8.91 | 33 | 9.07 | 59 | 8.96 | 85 | 8.56 |
| 8 | 8.9 | 34 | 9.07 | 60 | 8.86 | 86 | 8.57 |
| 9 | 8.9 | 35 | 9.35 | 61 | 8.87 | 87 | 8.47 |
| 10 | 8.82 | 36 | 9.26 | 62 | 8.92 | 88 | 8.51 |
| 11 | 8.8 | 37 | 9.29 | 63 | 8.84 | 89 | 8.52 |
| 12 | 8.97 | 38 | 9.36 | 64 | 8.89 | 90 | 8.48 |
| 13 | 8.96 | 39 | 9.32 | 65 | 8.95 | 91 | 8.43 |
| 14 | 8.92 | 40 | 9.27 | 66 | 8.93 | 92 | 8.5 |
| 15 | 8.97 | 41 | 9.26 | 67 | 8.89 | 93 | 8.54 |
| 16 | 9.04 | 42 | 9.33 | 68 | 8.93 | 94 | 8.53 |
| 17 | 9.05 | 43 | 9.4 | 69 | 8.83 | 95 | 8.56 |
| 18 | 9.05 | 44 | 9.28 | 70 | 8.82 | 96 | 8.53 |
| 19 | 9.02 | 45 | 9.3 | 71 | 8.71 | 97 | 8.55 |
| 20 | 9.02 | 46 | 9.05 | 72 | 8.69 | 98 | 8.5 |
| 21 | 9 | 47 | 8.98 | 73 | 8.69 | 99 | 8.44 |
| 22 | 8.91 | 48 | 9.01 | 74 | 8.73 | 100 | 8.45 |
| 23 | 9.03 | 49 | 8.89 | 75 | 8.72 | 101 | 8.51 |
| 24 | 9.03 | 50 | 8.96 | 76 | 8.61 | 102 | 8.59 |
| 25 | 8.97 | 51 | 9.05 | 77 | 8.61 | 103 | 8.63 |
| 26 | 8.91 | 52 | 9.01 | 78 | 8.65 | 104 | 8.6 |

**资料来源：大智慧财经中心。**

将各日的收盘价分为上升、持平、下降三种状态进行分析和预测。

首先，先用 Matlab 将数据绘制成图。如图 1 所示。

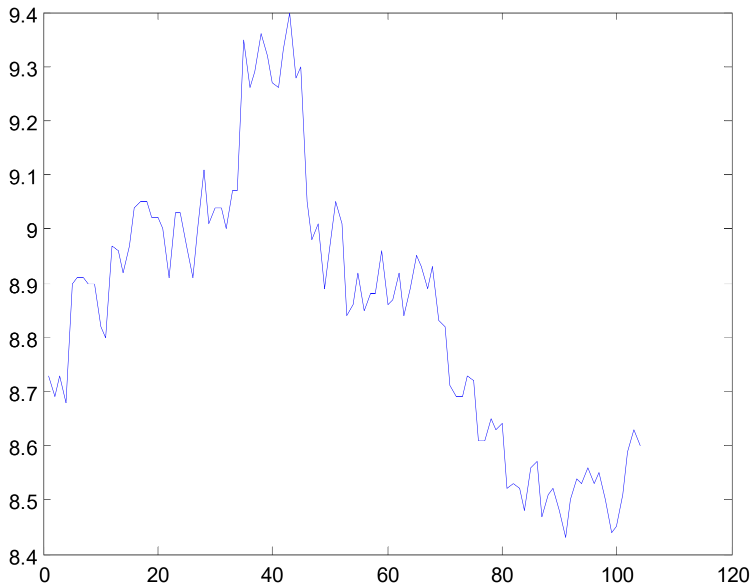



**图 1 中石油股价走势图**

横轴表示时间序列，纵轴表示股票价格。

由图可以看出，从 2012 年 12 月 10 日至 2013 年 5 月 21 日的股价走势是先上涨后下跌。由于股价无时无刻都在波动，当在某一小范围内波动时可以把它看作没有变化。在这些数据中， 选取 $\pm 0.03$ 为允许的波动范围。上升幅度超过 0. 03 记为 1，波动幅度在 $[-0.03 \quad +0.03]$ 内记为 2，下降幅度超过 0. 03 记为 3，见表 2.

**表 2 状态统计表**

| 序号 | 状态 | 序号 | 状态 | 序号 | 状态 | 序号 | 状态 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 27 | 1 | 53 | 3 | 79 | 2 |
| 2 | 3 | 28 | 1 | 54 | 2 | 80 | 2 |
| 3 | 1 | 29 | 3 | 55 | 1 | 81 | 3 |
| 4 | 3 | 30 | 2 | 56 | 3 | 82 | 2 |
| 5 | 1 | 31 | 2 | 57 | 2 | 83 | 2 |
| 6 | 2 | 32 | 3 | 58 | 2 | 84 | 3 |
| 7 | 2 | 33 | 1 | 59 | 1 | 85 | 1 |
| 8 | 2 | 34 | 2 | 60 | 3 | 86 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 35 | 1 | 61 | 2 | 87 | 3 |
| 10 | 3 | 36 | 3 | 62 | 1 | 88 | 1 |
| 11 | 2 | 37 | 2 | 63 | 3 | 89 | 2 |
| 12 | 1 | 38 | 1 | 64 | 1 | 90 | 3 |
| 13 | 2 | 39 | 3 | 65 | 1 | 91 | 3 |
| 14 | 3 | 40 | 3 | 66 | 2 | 92 | 1 |
| 15 | 1 | 41 | 2 | 67 | 3 | 93 | 1 |
| 16 | 1 | 42 | 1 | 68 | 1 | 94 | 2 |
| 17 | 2 | 43 | 1 | 69 | 3 | 95 | 2 |
| 18 | 2 | 44 | 3 | 70 | 2 | 96 | 2 |
| 19 | 2 | 45 | 2 | 71 | 3 | 97 | 2 |
| 20 | 2 | 46 | 3 | 72 | 2 | 98 | 3 |
| 21 | 2 | 47 | 3 | 73 | 2 | 99 | 3 |
| 22 | 3 | 48 | 2 | 74 | 1 | 100 | 2 |
| 23 | 1 | 49 | 3 | 75 | 2 | 101 | 1 |
| 24 | 2 | 50 | 1 | 76 | 3 | 102 | 1 |
| 25 | 3 | 51 | 1 | 77 | 2 | 103 | 1 |
| 26 | 3 | 52 | 3 | 78 | 1 | 104 | 2 |

表 2 中共有 104 天的状态资料，其中收盘价较前日呈上升状态的有 30 天，呈持平状态的有 42 天，呈下降状态的有 32 天。最后一天的状态为 2，即“持平”，没有状态转移资料，所以持平的总次数计为 41 次，由上升状态转为上升状态的次数是 8，频率是$\frac{8}{30}$，由频率代替概率，得到由上升状态转移到上升状态的概率是$P_{11}=\frac{8}{30}=0.2667$。由上升状态转为持平状态的次数是 12，频率是$\frac{12}{30}$，由上升状态转移到持平状态的概率是$P_{12}=\frac{12}{30}=0.4$。以此类推，得到$P_{13}=\frac{10}{30}=0.3333$，$P_{21}=\frac{10}{41}=0.2439$，$P_{22}=\frac{15}{41}=0.3659$，$P_{23}=\frac{16}{41}=0.3902$，$P_{31}=\frac{12}{32}=0.375$，$P_{32}=\frac{14}{32}=0.4375$，$P_{33}=\frac{6}{32}=0.1875$。其一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix} 0.2667 & 0.4 & 0.3333 \\ 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \end{pmatrix}$$

由于第 104 日处于持平状态，所以初始状态向量为$S^{(0)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，利用其来预测第 105 日收盘价处于各种状态的概率，第 105 日状态概率向量：

$$S^{(1)} = S^{(0)}P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0.2667 & 0.4 & 0.3333 \\ 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \end{pmatrix}$$

收盘价处于状态“下降”的概率最大，而实际 5 月 22 日的收盘价为 8.58，从数值上看处于下降状态，但之前规定了在$[-0.03 \quad +0.03]$内的波动都算持平，所以与预测结果不相符。

预测 5 月 23 日收盘价：

$$S^{(2)} = S^{(1)}P = \begin{pmatrix} 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2667 & 0.4 & 0.3333 \\ 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3005 & 0.2973 & 0.4022 \end{pmatrix}$$

收盘价处于状态“下降”的概率最大，而实际 5 月 23 日收盘价为 8.51，处于下降状态，与预测结果相符。

预测 5 月 24 日收盘价：

$$S^{(3)} = S^{(2)}P = \begin{pmatrix} 0.3005 & 0.2973 & 0.4022 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2667 & 0.4 & 0.3333 \\ 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2897 & 0.3975 & 0.3128 \end{pmatrix}$$

收盘价处于状态“持平”的概率最大，而实际 5 月 24 日收盘价为 8.54，处于持平状态，与预测结果相符。

预测 5 月 27 日收盘价：

$$S^{(4)} = S^{(3)}P = \begin{pmatrix} 0.2897 & 0.3975 & 0.3128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2667 & 0.4 & 0.3333 \\ 0.2439 & 0.3659 & 0.3902 \\ 0.375 & 0.4375 & 0.1875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2916 & 0.3982 & 0.3134 \end{pmatrix}$$

收盘价处于状态“持平”的概率最大，而实际 5 月 27 日的收盘价为 8.55，处于持平状态，与预测结果相符。

从预测结果来看，还是比较准确的。但是这种预测股票的模型只适用于短期的股价预测，随着时间的推移，这种预测模型会越来越不准确。