

## 使用阻滞增长模型预测美国人口

题目：

下表给出了近 2 个世纪的美国人口统计数据（单位：百万人），请建立阻滞增长模型，并用该模型预测后 30 年的人口。

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4
年	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
人口	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7
年	1950	1960	1970	1980	1990	2000		
人口	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4		

解：阻滞增长模型的形式如下：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(1 - \frac{x}{x_m})x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

求解该微分方程得到：

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-r(t-t_0)}}$$

我们取初始值  $x(1790) = 3.9$ ，则  $x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{3.9} - 1)e^{-r(t-1790)}}$

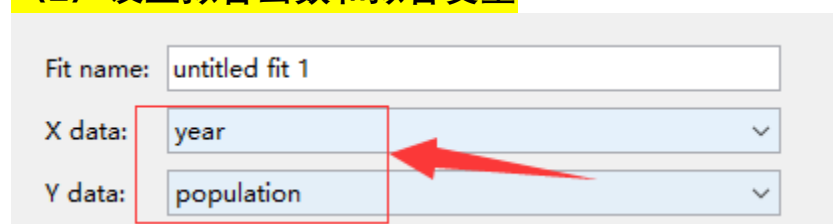
其中  $x_m$  和  $r$  是待估拟合参数，我们使用 Matlab 的拟合工具箱，对上式进行非线性最小二乘拟合。

代码如下：

### (1) 输入数据，调用拟合工具箱

```
clear;clc
year = 1790:10:2000;
population = [3.9,5.3,7.2,9.6,12.9,17.1,23.2,31.4,38.6,50.2,62.9,76.0,92.0,106.5,123.2,131.7,150.7,179.3,204.0,226.5,
cftool % 拟合工具箱
```

### (2) 设置拟合函数和拟合变量



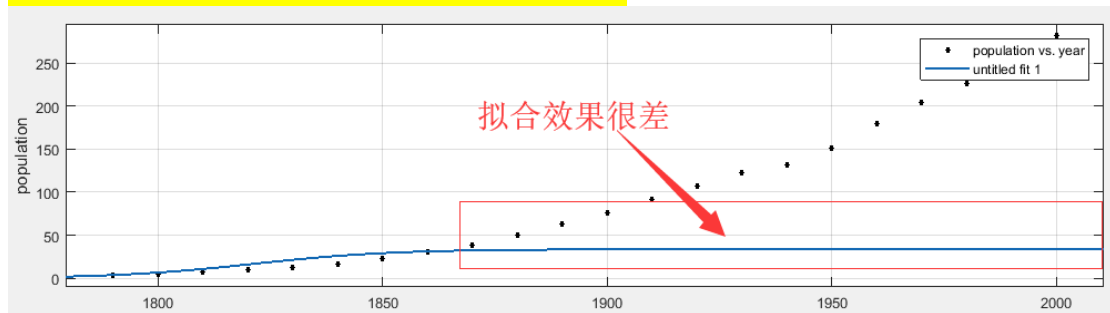
Custom Equation

x = f( t )

$$f = 1 \text{ xm} / (1 + (\text{xm} / 3.9 - 1) * \exp(-r * (t - 1790)))$$

Fit Options...

### (3) 观察拟合结果发现拟合效果很差



#### Results

Fit computation did not converge:

Fitting stopped because the number of iterations or function evaluations exceeded the limit.

没找到收敛解

### (4) 设置拟合算法的初始值重新拟合

Custom Equation

x = f( t )

$$f = 1 \text{ xm} / (1 + (\text{xm} / 3.9 - 1) * \exp(-r * (t - 1790)))$$

Fit Options...

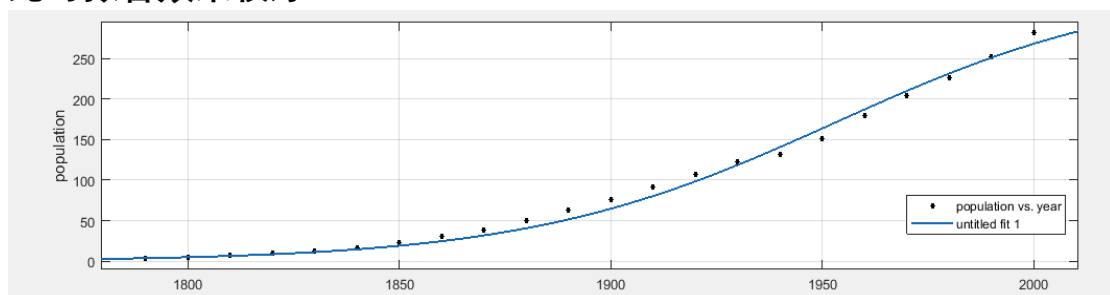
Coeffici...	StartPoint	Lower	Upper
r	0.4456	-Inf	Inf
xm	0.6463	-Inf	Inf

Coeffici...	StartPoint	Lower	Upper
r	0.2000	-Inf	Inf
xm	500	-Inf	Inf

修改后

此时拟合效果较好



### (5) 得到拟合值

General model:

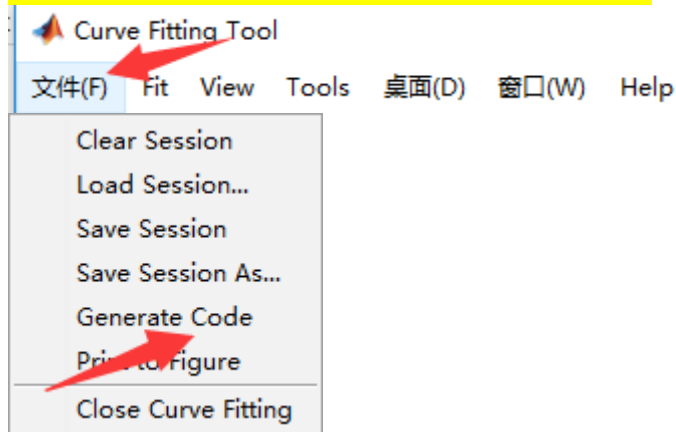
$$f(t) = \text{xm} / (1 + (\text{xm} / 3.9 - 1) * \exp(-r * (t - 1790)))$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

r = 0.02735 (0.0265, 0.0282)

xm = 342.4 (311, 373.8)

## (6) 导出 Matlab 自动生成的拟合代码

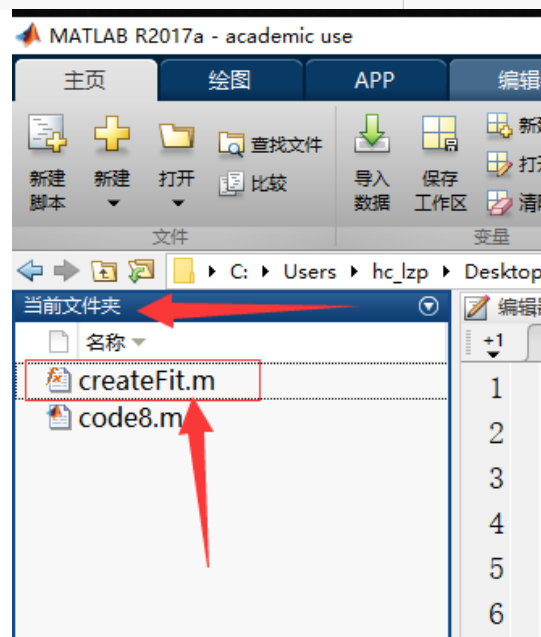


## (7) 保存生成的代码到当前文件夹

```
function [fitresult, gof] = createFit(year, population)
%CREATEFIT(YEAR,POPULATION)
% Create a fit.
%
% Data for 'untitled fit 1' fit:
%   X Input : year
%   Y Output: population
% Output:
%   fitresult : a fit object representing the fit.
%   gof : structure with goodness-of fit info.
%
% 另请参阅 FIT, CFIT, SFIT.

% 由 MATLAB 于 02-Jan-2020 23:08:57 自动生成

%% Fit: 'untitled fit 1'.
[xData, yData] = prepareCurveData( year, population );
```



## (8) 在新的脚本中调用这个函数得到参数的拟合值和预测的效果

```
命令窗口
>> [fitresult, gof] = createFit(year, population)

fitresult =

General model:
fitresult(t) = xm/(1+(xm/3.9-1)*exp(-r*(t-1790)))
Coefficients (with 95% confidence bounds):
    r =    0.02735 (0.0265, 0.0282)
    xm =    342.4 (311, 373.8)

gof =

包含以下字段的 struct:

    sse: 1.2249e+03
  rsquare: 0.9924
    dfe: 20
adjrsquare: 0.9920
    rmse: 7.8259
```

## (9) 利用拟合值计算预测值并绘制预测图

```
[fitresult, gof] = createFit(year, population)
t = 2001:2030;
xm = 342.4;
r = 0.02735;
predictions = xm./(1+(xm./3.9-1).*exp(-r.*(t-1790))); % 计算预测值 (注意这里要写成点乘和点除)
figure(2)
plot(year, population, 'o', t, predictions, '-') % 绘制预测结果图
```

