Econometria II

Abordagem Matricial para o Modelo de Regressão Linear

Walberti Saith

Universidade Federal de Rondônia - UNIR

11 de Fevereiro de 2020

Relembrando

Modelo MQO Básico

- Fórmula β_1

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$$

- Fórmula β_2

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{n=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{n=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

Regressão linear múltipla

Expandindo o modelo MQO

- Fórmula β_2

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i x_{3i}})^2}$$

- Fórmula β_3

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i x_{3i}})^2}$$

Expandindo o modelo MQO

- Fórmula β_1

$$\hat{\beta}_1 = \overline{\boldsymbol{Y}} - \hat{\beta}_2 \overline{\boldsymbol{X}}_{2i} - \hat{\beta}_3 \overline{\boldsymbol{X}}_{3i}$$

Lembrando que y e x representam os desvios médios. Podemeos fazer o modelo MQO com inúmeras variáveis.

O modelo clássico de regressão

- Em cálculo diferencial integral isso é conhecido como derivada parcial, por isso o nome de coeficiente parcial.

- Antes de estudarmos a forma de estimação da regressão múltipla, temos que entender como interpretar tais coeficientes.

- Os parâmetros estimados pela regressão múltipla são chamados de **coeficientes parciais**, isso por que cada β mostra a influência que os X_i exercem sobre Y_i de forma individual, mantida as demais variáveis constantes.

Regressão linear com k variáveis

- Portanto, apresentamos poucos conceitos novos, com exceção da notação em matrizes. Uma grande vantagem desssa abordagem é que ela fornece um método compacto para tratar dos modelos de regressão envolvendo qualquer número de variáveis.
- Conceitualmente, o modelo de $\boldsymbol{k}$ variáveis é uma extensão lógica dos modelos de duas e três variáveis abordados no semestre passado.

Regressão linear com *k* variáveis

Se generalizarmos os modelos de regressão linear de duas e três variáveis, envolvendo a variável dependente $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{k-1}$ variáveis explanatórias $\boldsymbol{X_2, X_3, \ldots, X_k}$, o modelo poderá ser escrito como um conjunto de $\boldsymbol{n}$ equações simultâneas:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}$$

Em que β_1 é o intercepto, β_2 até β_k são coeficientes angulares parciais, $\boldsymbol{u}$ é a *i*-ésima perturbação estocástica e $\boldsymbol{n}$ é o tamanho da população.

Regressão linear com k variáveis

Escrevamos o sistema de equações (C.1.2) de um modo alternativo, porém esclarecedor:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{31} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Abordagem Matricial

O aluno que tem um pouco de conhecimento de cálculo pode deduzir que tal conjunto pode ser escrito de uma forma mais simples e esclarecedora.

Fórmula Geral

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$$

Abordagem Matricial

- $\mathbf{y}$ é o vetor coluna $\boldsymbol{n} \times \mathbf{1}$ de observações da variável dependente $\boldsymbol{Y}$.
- $\boldsymbol{X}$ é a matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}$ dando $\boldsymbol{n}$ observações das $\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$ variáveis de $\boldsymbol{X}_2$ a $\boldsymbol{X}_k$.
- β é o vetor coluna $\boldsymbol{k} \times \mathbf{1}$ de parâmetros desconhecidos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.
- $\mathbf{u}$ é o vetor coluna $\boldsymbol{n} \times \mathbf{1}$ de $\boldsymbol{n}$ termos de erro $\boldsymbol{u}_i$.

Derivação do Modelo

Nossas estimativas dos parâmetros populacionais são referidas como $\hat{\beta}$. Lembre-se que os critérios que usamos para obter nossas estimativas é encontrar o estimador β que minimiza a soma dos resíduos quadrados $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$.

Derivação do Modelo

- Problema

$$\min \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 .$$

Lembrando que $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta}$, então o problema se torna:

$$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\beta})$$

Estimador MQO

- Solução

$$\beta = X'y(X'X)^{-1}$$

Para o propósito da estimação, podemos utilizar o método dos mínimos quadrados ordinários (MQO) ou o método da máxima verossimilhança (MV). Mas, como observado anteriormente, esses dois métodos resultam em estimativas idênticas para os coeficientes de regressão. Portanto, deveremos limitar nossa atenção ao método dos MQO.

Matriz Inversa

Se A (um matriz qualquer) é não singular ou seja, $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$, sua inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$ pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$$

1. Descubra o determinante de A. Se não for zero, execute o passo 2.
2. Substitua cada elemento $\boldsymbol{a}_{ij}$ de A por seu cofator para obter a matriz de cofator.
3. Transponha a matriz de cofator para obter a matriz adjunta.
4. Divida cada elemento da matriz adjunta por $|\boldsymbol{A}|$.

Matriz Inversa

Nos casos de duas ou três variáveis, sabemos que os estimadores de MQO são lineares e não viesados, e na classe de todos os estimadores lineares não viesados, eles têm variância mínima (Gauss-Markov).

Essa propriedade estende-se ao vetor $\hat{\beta}$. O caso de $\boldsymbol{k}$ variáveis é, na maioria das vezes, uma extensão direta dos casos de duas e três variáveis.

Propriedades

Características

Observe estas características da matriz $(X'X)$:

- Oferece as somas brutas e os produtos cruzados das variáveis X, e uma delas é o termo de intercepto que assume o valor 1 para cada observação;
- É simétrica, visto que o produto cruzado entre $\boldsymbol{X_{2i}}$ e $\boldsymbol{X_{3i}}$ é o mesmo que entre $\boldsymbol{X_{3i}}$ e $\boldsymbol{X_{2i}}$
- É da ordem $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}$, ou seja, possui $\boldsymbol{k}$ linhas e $\boldsymbol{k}$ colunas.

Um pouco mais ...

Além dos parâmetros, também podemos obter por álgebra matricial as variâncias e covariâncias. A matriz desse tipo pode ser definida da seguinte forma:

VAR/COV

$$var/cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Um pouco mais ...

Em que $\boldsymbol{\sigma}^2$ é a variância homocedástica de $\boldsymbol{u}_i$. Vale lembrar que a forma de cálculo da variância é:

Variância

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}}$$

O resultado encontrado deve ser igual àquele obtido através da álgebra escalar.

Coeficiente de Determinação

Por último, mas não menos importante, passemos ao cálculo do coeficiente de determinação $\boldsymbol{R^2}$ na forma matricial:

$$\boldsymbol{R^2 = \frac{\hat{\beta} X' y - n\overline{Y}^2}{y' y - n\overline{Y}^2}}$$

O resultado deve ser exatamente o mesmo, desconsiderando os erros de arredondamento

Hipóteses do Modelo de Regressão

Relembrando

1. $\mathbb{E}(u_i) = 0$, para cada i
2. $\mathbb{E}(u_i u_j) = 0 \; i \neq j$ ou $\mathbb{E}(u_i u_j) = \sigma^2$
3. $X_2, X_3, \ldots, X_k$ são não estocásticas ou fixas.
4. Não há relação linear exata entre as variáveis X.
5. Para o teste de hipótese, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

Exemplo - Função Consumo

Relembrando

Tabela 2.4:

Obs.	Y	X
1	70	80
2	65	100
3	90	120
4	95	140
5	110	160
6	115	180
7	120	200
8	140	220
9	155	240
10	150	260

Voltando ao nosso exemplo da Tabela 3.2, temos:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix}_{10\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix}_{10\times 2} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}_{10\times 1}$$

Exemplo Numérico

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 100 & 120 & 140 & 160 & 180 & 200 & 220 & 240 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$X'X = \begin{bmatrix} 10 & 1700 \\ 1700 & 322000 \end{bmatrix}$$

Invertendo a Matriz X'X

$$X'X^{-1} = \begin{bmatrix} 0,975676 & -0,005152 \\ -0,005152 & 0,0000303 \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$(X'y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i \sum Y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 80 & 100 & 120 & 140 & 160 & 180 & 200 & 220 & 240 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$X'y = \begin{bmatrix} 1110 \\ 205500 \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,975676 & -0,005152 \\ -0,005152 & 0,0000303 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1110 \\ 205500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,4545 \\ 0,5077 \end{bmatrix}$$