Dokumentacja

Analiza Algorytmów - Projekt

Opracował – Paweł Walczak
Prowadził – dr inż. Tomasz Trzciński

SPIS TREŚCI:

1.Treść zadania.

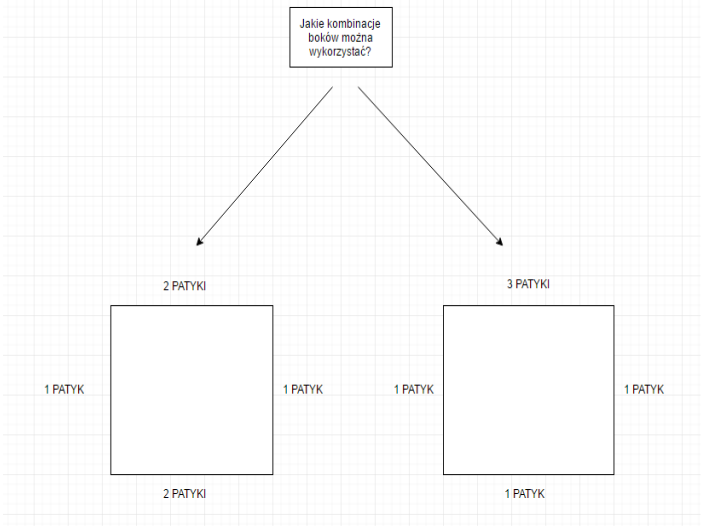
Mamy zestaw S niełamalnych patyków o długości s_i , $i \in (1,2,\dots,S)$. Zaproponuj algorytm wyliczający na ile sposobów można zbudować kwadrat przy użyciu 6 z tych patyków i wyznaczy, które patyki należy uczyć.

2. Użyte narzędzia oraz technologie.

Wybrany przeze mnie język programowania to **C++,** który znajduje zastosowanie w problemach, w których istotna jest efektywność i szybkość. Korzystałem z IDE**CLion** oraz kompilatora **MinGW**. Zastosowałem biblioteki **gtest**(opracowane przez Google), w celu opracowywania projektu zgodnie z założeniami TDD oraz testowania poprawności działania algorytmu.

3. O rozwiązaniu zadania.

Korzystając z 6 patyków kwadrat można zbudować na dwa sposoby:



Rozpoczęcie projektu rozpocząłem od napisania kodu dla rozwiązania typu **Bruteforce**. Rozwiązanie tego typu jest dość

oczywiste i nie przejmujemy się w nim złożonością algorytmu. W przypadku mojego projektu, wystarczyło dla każdej 6-elementowej permutacji danego zbioru patyków sprawdzić czy da się z niej zbudować kwadrat. Rozwiązanie tego typu ma złożoność $\boldsymbol{O(n^6)}$**.** W programie zawarłem opcję uruchomienia algorytmu typu Bruteforce. Nie będę opisywał tutaj dokładnej implementacji algorytmu, gdyż nie jest to celem dokumentacji.

Lepsze rozwiązanie…

Rozwiązanie bardziej optymalne jest już cięższe do znalezienia oraz implementacji.

Pierwszym krokiem w moim rozwiązaniu jest posortowanie zbioru. Mogłem skorzystać z wbudowanych bibliotek lecz postanowiłem zaimplementować samodzielnie algorytm sortowania **QuickSort.**Owy algorytm posiada złożoność $\boldsymbol{O(nlogn)}$. Należy podkreślić, że algorytm ten może działać szybciej, zależy to od tego jak wygląda zbiór wejściowy (czy rzeczywiście kolejność elementów jest losowa).

Rozszerzyłem funkcjonalność algorytmu QuickSort o utworzenie tablicy której elementami będą indeksy patyków z oryginalnego zbioru (tablicy), poprzestawiane po wykonaniu sortowania:

intoriginalInput [] = {5,1,3} , powykonaniuQuickSort ….
intsortedArray[] = {1,3,5};
intarrayOfIndices[] = {2,3,1}

Tablicę indeksów wykorzystam w algorytmie Bruteforce do przedstawienia których patyków należy użyc do utworzenia kwadratu.

Drugim krokiem jest wyznaczenie ilości kombinacji patyków, z których możemy utworzyć kwadrat. Przydatna w

implementacji algorytmu okaże się **Analiza Pokrycia Przypadków:**

ANALIZA POKRYCIA PRZYPADKÓW.

W zadaniu należy rozpatrzyć różne przypadki danych wejściowych z jakimi możemy się spotkać i z jakimi radzić sobie musi algorytm.

1. **Jeżeli dane wejściowe liczą mniej niż 6 patyków to przerwać działania programu, gdyż nie znajdziemy rozwiązania.**
2. **Jeżeli dane wejściowe liczą 6 patyków to:**
    a. **Sprawdzić czy istnieją duplikaty**
        i. **Jeśli tak to należy sprawdzić czy da się z nich złożyc trójkąt (kombinacja boków (2,2,1,1) oraz (3,1,1,1))**
        ii. **Jeśli nie to nie da się złożyc kwadratu (przerwij program , zwróć 0).**
3. **Gdy dane wejściowe liczą powyżej 6 patyków, sytuacja zaczyna być bardziej skomplikowana i należy rozpatrzeć kilka przypadków jakie musi pokryć algorytm.**
    a. **Szukamy kombinacji (3,1,1,1):**
        i. **Patyków o takich samych długościach mamy liczbę n (n>=3) (mowa o tych które pojedynczo tworzą bok) .**
        POKRYCIE:
        Trzy z nich (dla potrzeby realizacji zadania) możemy wybrać na $\binom{n}{3}$ sposobów.
        ii. **Wszystkie patyki (z boku z 3 patyków) mają różne długości.**
        POKRYCIE:
        Przechowuj tablicę zawierającą ilość wystąpień par patyków sumujących się do danych długości i aktualizuj w raz z każdą inkrementacją w pętli (która przeszukuje
        iii. **Dwa patyki mają tę samą długość , a trzeci jest większy/mniejszy.**
        POKRYCIE:
        Do pokazania na kodzie…
        iv. **Wszystkie patyki mają tę samą długość.**
        POKRYCIE:
        Do pokazania na kodzie…
    b. **Szukamy kombinacji (2,2,1,1):**
        i. **Patyków pojedynczo tworzących boki jest n (n>=2).**
        POKRYCIE:
        Dwa z nich (dla potrzeby realizacji zadania) możemy wybrać na $\binom{n}{2}$ sposobów.
        ii. **Wszystkie patyki z boków 2,2 są tej samej długości i dowolna para sumuje się do długości patyka który tworzy jeden bok.**
        POKRYCIE:
        Z dwumianu newtona policz kombinacje $\binom{n}{4}$, gdzie n to liczba danych patyków o tej samej długości.
        iii. **Dwa patyki które stworzą jeden bok, są tej samej długości.**
        POKRYCIE:
        Z dwumianu newtona policz kombinacje $\binom{n}{2}$, gdzie n to liczba danych patyków o tej samej długości.
        iv. **Będą po 2 patyki tej samej długości czyli stworzą boki (A+B),(A+B), gdzie A+B sumuje się do wartości patyka, który tworzy pojedynczy bok:**
        POKRYCIE:

Policz wartości dwóch kombinacji newtona : $\binom{a}{2}$, gdzie a to liczba patyków A, oraz $\binom{b}{2}$, gdzie b to liczba danych patyków B i przemnóż przez siebie.

v. **Wszystkie patyki tworzące boki (2,2) są różnej długości.**
POKRYCIE:
Do wyjaśnienia na kodzie…

Opis metody rozwiązania:

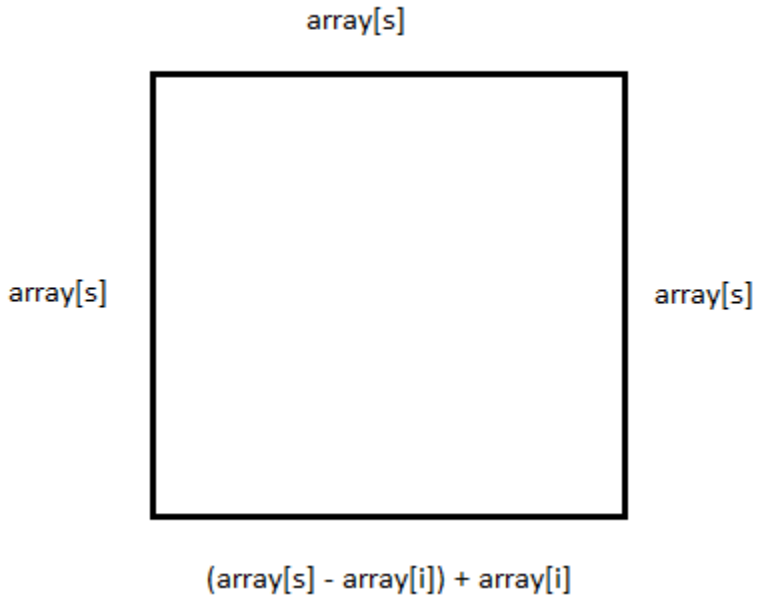
Najpierw zajmijmy się opisem algorytmu wyznaczania kombinacji gdzie występują 3 patyki o tej samej długości, a kolejne trzy sumują się do długości tripletu.
W celu ułatwienia zrozumienia działania algorytmu, postanowiłem wkleić kluczowe fragmenty kodu i poddać je analizie.
Tworzymy tablicę, której wartościami są liczby wystąpień patyków od długości danej indeksem.

```
for (inti=1;i<=n;i++) array[i] = tab[i-1], onesArray[array[i]]++;
```

Następnie iterujemy po posortowanym uprzednio zbiorze patyków. Obliczamydziałania:

```
for (inti=1;i<=n;i++){
for (ints=i+1;s<=n;s++)
if (array[s]>array[s-1]) {
ans += 1ll * onesArray[array[s]] * (onesArray[array[s]] - 1) *
(onesArray[array[s]] - 2) / 6 *
pairsArray[array[s] - array[i]];
}

for (intj=1;j<i;j++) {
pairsArray[array[i] + array[j]]++;

}
}
```

Tablica pairsArray[] zawiera liczbę wystąpień kombinacji par o długościach danych indeksami.
W ten sposób mnożymy permutacje 3-elementowe wszystkich patyków o długości array[s], pary patyków sumujące się do długości (array[s]-array[i]). Po przeiterowaniu przez wszystkie pętle otrzymujemy ilość wszystkich kombinacji, danych rysunkiem:



Kluczowe okazuje się w tym rozwiązaniu odpowiednia implementacja algorytmu tak, aby pokrywał poprawnie przypadki z analizy pokrycia przypadków.

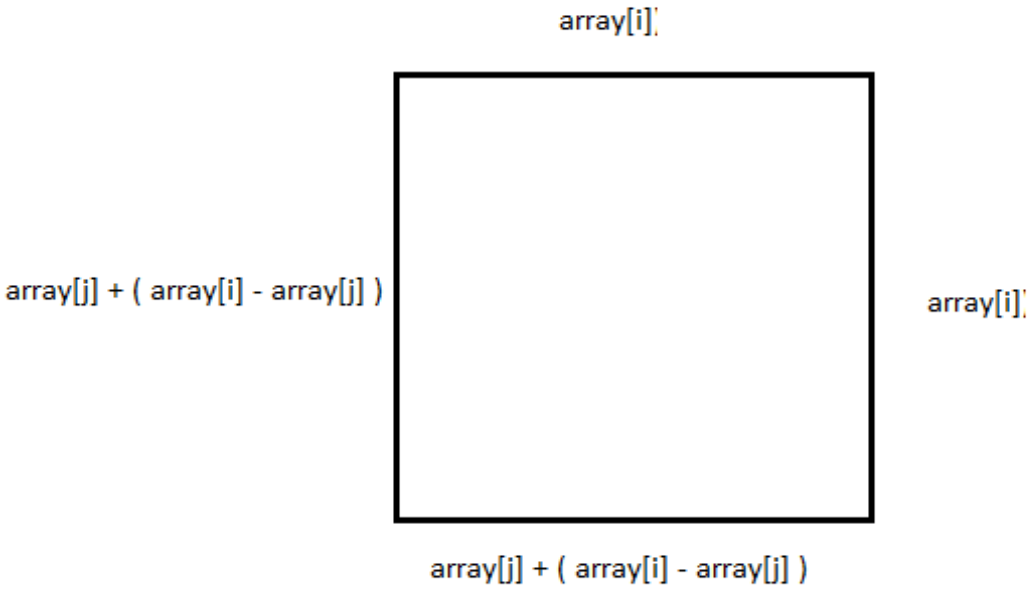
Kolejnym etapem jest znalezienie kombinacji, gdzie występują dwa patyki o tej samej długości, które pojedynczo tworzą bok. Należyrozważyćkilkaróżnychmożliwości:

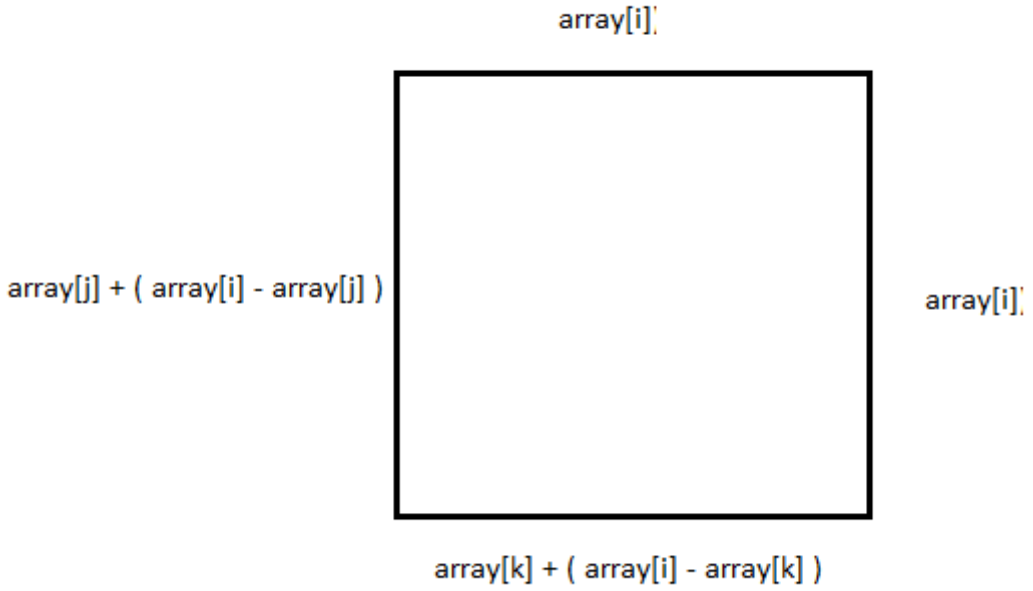
Fragment kodu:

```
for (int i=1;i<=n;i++)
if (array[i]!=array[i-1] &&onesArray[array[i]]>1)
    {
        DD=onesArray[array[i]]*(onesArray[array[i]]-1)/2;
D=0;
int j = 1;
for (j=1; array[i] >array[j] * 2; j++)
if (array[j]>array[j-1]){
                ans+=DD*onesArray[array[j]]*(onesArray[array[j]]-
1)/2*onesArray[array[i]-array[j]]*(onesArray[array[i]-array[j]]-1)/2;
ans+=DD*D*onesArray[array[j]]*onesArray[array[i]-array[j]];


D+= onesArray[array[j]]*onesArray[array[i]-array[j]];


}
if (array[i]%2==0){
            ans+=DD*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-
1)*(onesArray[array[i]/2]-2)*(onesArray[array[i]/2]-3)/24;
ans+=DD*D*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-1)/2;
}
    }
```

Zauważmy, że pętla zagnieżdzona jest wykonana jedynie dla elementów array[j] <array[i]/2, aby nie nastąpiły powtórzenia.

Analogicznie dla przypadku ‘tripletów’, należy tu liczyć dwumiany newtona w celu znalezienia unikalnych permutacji poszczegolnych patyków o tych samych długościach. W pierwszym ‘ifie’ rozwiązane są przypadki dla :





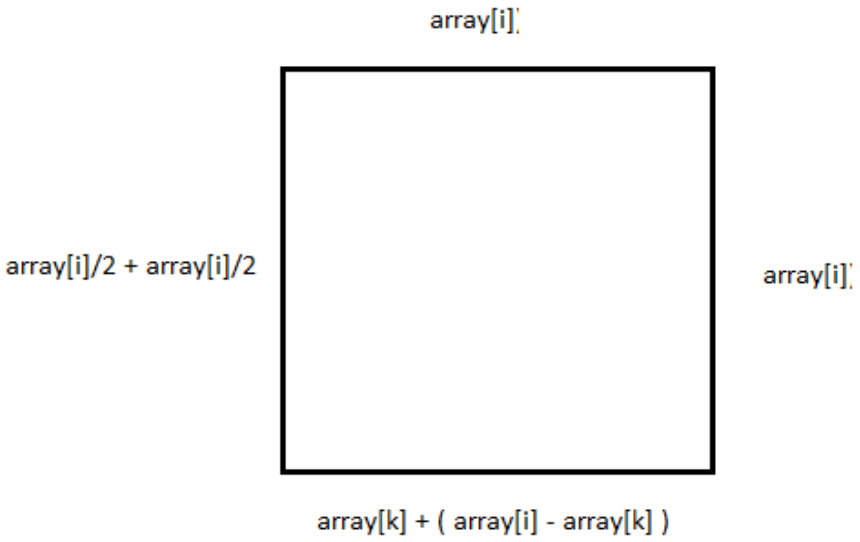

```
ans+=DD*onesArray[array[j]]*(onesArray[array[j]]-1)/2*onesArray[array[i]-
array[j]]*(onesArray[array[i]-array[j]]-1)/2;
```

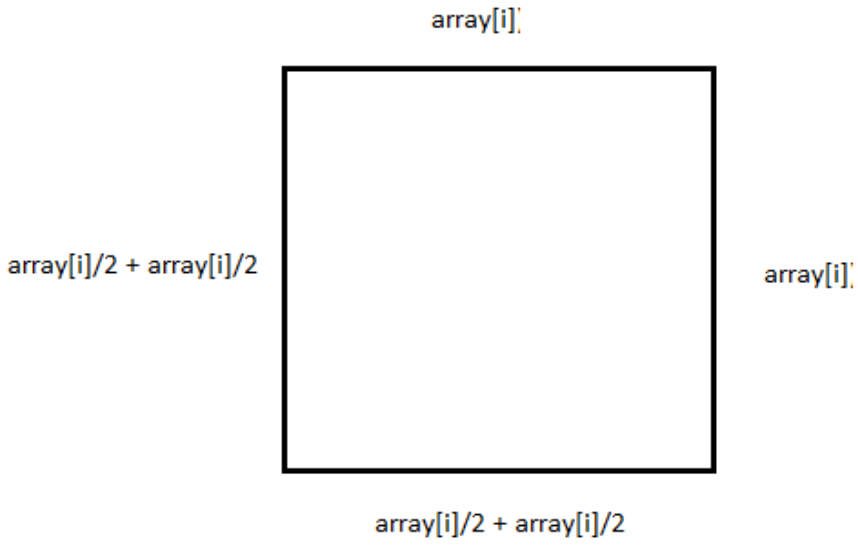
Pierwszy przypadek to poszukiwanie kombinacji, które składają się z dwóch patyków które pojedynczo tworzą bok (należy obliczyć dwumian newtona aby znaleźć unikalne permutacje), kombinacje dwóch patyków o długościach array[j] (ponownie dwumian newtona) oraz kombinacje dwóch patyków o długościach array[i] – array[j] (ponownie wykorzystać dwumian newtona).

```
ans+=DD*D*onesArray[array[j]]*onesArray[array[i]-array[j]];
```

Drugi przypadek jest bardzo podobny do poprzedniego, tyle że szukamy kombinacji par patyków array[j] oraz array[i]-array[j], oraz wyliczonych we wczesniejszych iteracjach (czyli dla mniejszych j) par patyków array[i] oraz array[i]-array[j] (na rysunku dla odróżnienia przedstawionych jako array[k] + (array[i]-array[k])).

W drugim ‘ifie; rozwiązane są przypadki:





```
ans+=DD*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-
1)*(onesArray[array[i]/2]-2)*(onesArray[array[i]/2]-3)/24;
```

Sprawdzamy dwie opcje. Pierwsza jest taka, że na utworzenie dwóch boków wykorzystamy cztery patyki tej samej długości (każdy array[i]/2). Dlatego musimy policzyć dwumian newtona w poszukiwaniu wszystkich unikalnych permutacji czterech patyków o tej samej długości.

```
ans+=DD*D*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-1)/2;
```

Druga opcja to poszukiwanie dwu-elementowych unikalnych permutacji patyków dwa razy mniejszych od tych które pojedynczo tworzą bok, oraz kombinacje par patyków o długościach array[j] oraz array[i] – array[j].

SŁÓW KILKA O WYPISANIU KOMBINACJI:

Kolejnym problemem było wyznaczenie jakich patyków użyc do zbudowania kwadratu. Dwa różne rozwiązania zastosowałem dla algorymubruteforce oraz dla algorytmu optymalnego.

Bruteforce:

W algorytmie bruteforce wykorzystuję wektor wskaźników do klas Combinations. Owe klasy przechowują długości/indeksy boków. Przy znalezieniu prawidłowej kombinacji za pomocą push_back (złożoność tej operacji to O(1)) wstawiam do wektora nową kombinację patyków. W tym podejściu przechowuję każdą kombinację patyków (również te które posiadają takie same boki, lecz są to tak naprawdę inne patyki). Chcąc uniknąć kosztu realokacji rozmiaru wektora, na początku programu zwiększam jego pojemność do dużej wartości (10^8) . Analizy złożoności algorytmu potwierdziły złożoność $O(n^6)$. Dla stosunkowo małych rozmiarów danych wejściowych (100 patyków) znalezienie rozwiązania trwa aż 25 sekund.

OptimalAlgorithm:

W algorytmie OptimalAlgorithm, podjąłem decyzję o nieużywaniu żadnej struktury danych, która stricte przechowywałaby wszystkie kombinacje

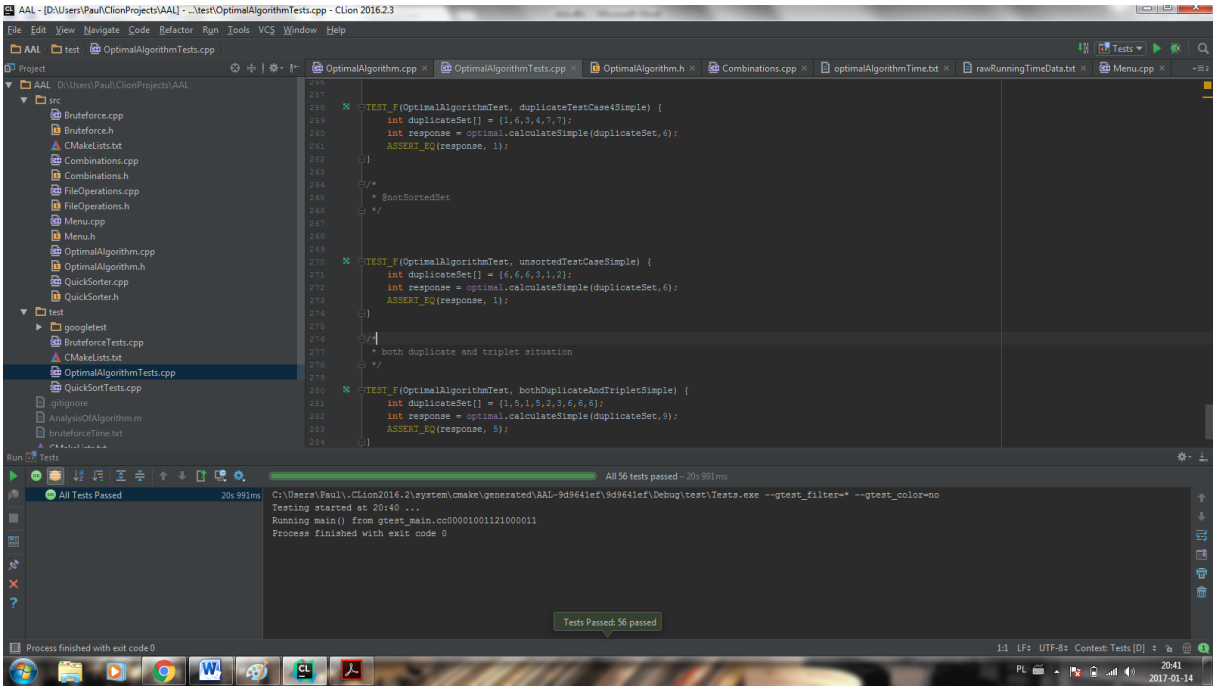
patyków. Podjąłem próby (metoda calculateSolutions() klasy OptimalAlgorithm, została ona zakomentowana i zostawiłem ją w celu analizy) przechowywania kombinacji w wektorze wskaźników do klas Combinations, jednakże przy testach dla dużych danych spowodowało to, błędy programu std::bad_alloc, których przyczyną było zabraknięcie miejsca na stercie z powodu zbyt dużej ilości zajmowanej przez wektor kombinacji patyków zbiorów (zazwyczaj błędy pojawiały się przy zbiorach danych większych niż około 3000 patyków), co uniemozliwialo przeprowadzenie wiarygodnych pomiarów czasowych w celu analizy złożoności . Po drugie zdecydowałem się, że wypisywać będę wszystkie kombinacje, lecz różniące się przynajmniej jedną długością patyka (tzn. nie wypisuję kombinacji patyków o tych samych długościach, które jednakże rożnią się tym, że użyto różnych patyków). Wyświetlenie wyników następuje po wywołaniu metody **showCombinations** klasy OptimalAlgorithm. Działa ona bardzo podobnie do metody calculateSimple wyznaczającej liczbę rozwiązań. Jedyną istotną różnicą między obiema metodami jest, to że metoda showCombinations posiada dwie dodatkowe struktury danych(tablica dwuwymiarowawhichSticks, do przetrzymywania kombinacji par patyków sumujących się do danej długości, oraz tablica Ds, również spełniająca identyczną rolę). Metody showCombinations nie podaję analizie czasowej, ponieważ użycie wypisania wyników do stdout (cout), wypaczyłoby wyniki pomiarów czasu wykonania algorytmu. Ocena teoretyczna złożoności owej metody ciężkaciężka do przeprowadzenia, ze względu na silne skorelowanie danych wejściowych z wydajnością algorytmu. W metodzie występują identyczne pętle jak w metodzie calculateSimple, jednakże występuje również dodatkowa pętla zagnieżdzona dla niektórych warunków (wypisanie kombinacji gdzie występują różne pary patyków sumujące się do danej długości) . Ilość iteracji wspomnianej pętli nie jest bezpośrednio związana z rozmiarem danych wejściowych. Jest ona zmienna i zależna od występujących danych.

TESTOWANIE:

Kolejnym problemem jest testowanie poprawności działania algorytmu. Projekt prowadziłem w formule Test Driven Development. W osobnej ścieżce (folder

test), znajdują się testy poprawności algorytmu. Osobno zostały przetestowane algorytmy sortowania, algorytm bruteforce oraz algorytm optymalny. Testowanie poprawności w wymienionych testach, opierało się na stosunkowo małych zbiorach danych, pokrywających każdy przypadek a analizy pokrycia przypadków. Mając pewność co do poprawności algorytmu bruteforce, przeprowadziłem również testy dla większych zbiorów danych dla algorytmu optymalnego, porównując czy odpowiedź algorytmu optymalnego dawała takie same wyniki jak bruteforce.

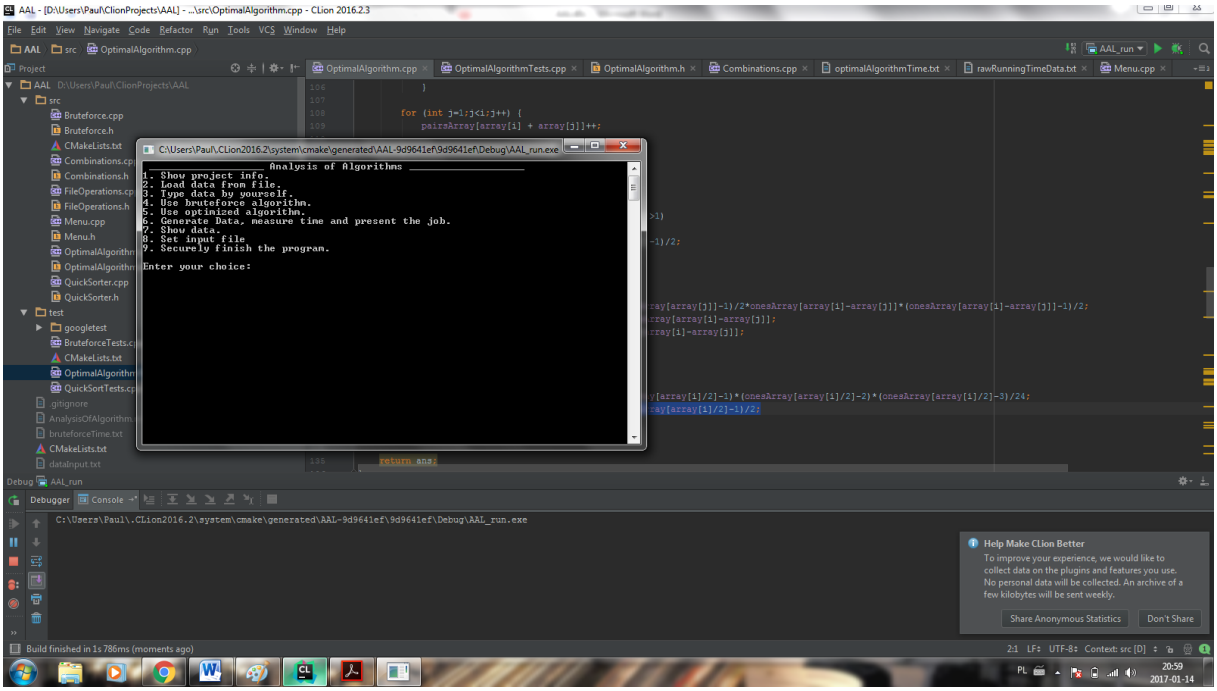
Wykonanie testów poprawności



GUI:

Do współpracy z użytkownikiem przewidziałem prosty konsolowy interfejs graficzny z kilkoma opcjami. Zakładam, że opcje same w sobie są proste i nie trzeba wyjaśniać ich działania:

GUI



ANALIZA ALGORYTMU TEORETYCZNA:

Dokonamy tutaj analizy złożoności zaproponowanego algorytmu.

Analizując kod programu (metoda **calculateSimple()** klasy **OptimalAlgorithm**), spodziewamy się złożoności programu $O(n^2)$.

Dokonajmy dekompozycji metodycalculateSimple():

```
for (inti=1;i<=n;i++) array[i] = tab[i-1], onesArray[array[i]]++;
```

- Wypełnienie tablic, jedna pętla, złożoność $\mathbf{O(n)}$

```
-   quickSorter.sort(array,1,n,arrayOfIndices);
```

- Posortowanie zbioru, złożoność $\mathbf{O(nlogn)}$

```
for (inti=1;i<=n;i++){
for (ints=i+1;s<=n;s++)
if (array[s]>array[s-1]) {
ans += 1ll * onesArray[array[s]] * (onesArray[array[s]] - 1) *
(onesArray[array[s]] - 2) / 6 *
```

```
pairsArray[array[s] - array[i]];
}

for (intj=1;j<i;j++) {
pairsArray[array[i] + array[j]]++;

}
}
```

- Wyznaczanie kombinacji ‘tripletów’, złożoność $\mathbf{O(n^2)}$.

```
-   for (inti=1;i<=n;i++)
    if (array[i]!=array[i-1] &&onesArray[array[i]]>1)
        {
            DD=onesArray[array[i]]*(onesArray[array[i]]-1)/2;
    D=0;
    intj = 1;
    for (j=1; array[i] >array[j] * 2; j++)
    if (array[j]>array[j-1]){
                    ans+=DD*onesArray[array[j]]*(onesArray[array[j]]-
    1)/2*onesArray[array[i]-array[j]]*(onesArray[array[i]-array[j]]-1)/2;
    ans+=DD*D*onesArray[array[j]]*onesArray[array[i]-array[j]];


    D+= onesArray[array[j]]*onesArray[array[i]-array[j]];


    }
    if (array[i]%2==0){
                ans+=DD*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-
    1)*(onesArray[array[i]/2]-2)*(onesArray[array[i]/2]-3)/24;
    ans+=DD*D*onesArray[array[i]/2]*(onesArray[array[i]/2]-1)/2;
    }
        }
```

- Wyznaczanie kombinacji dla dwóch patyków o tych samych długościach, które pojedynczo tworzą bok. Złożoność $\mathbf{O(n^2)}$.

WNIOSEK:

Summa summarum złożoność algorytmu, korzystając z Reguły sum nieiterowanych:

$$O(f(n), g(n), \dots.) = O(\max(f(n), g(n), \dots) = O(n^2).$$

ANALIZA ZŁOŻONOŚCI ALGORYTMU (RZECZYWISTE POMIARY)

Kolejnym etapem projektu jest przeprowadzenie analizy złożoności algorytmu. Pomiary czasu wykonuje korzystając z biblioteki **chrono**. Dla przeprowadzenia analizy przewidziałem następne sekwencje w programie:

- Z Menu programuwybieramyopcję nr 6 – „Generate data, measure time and present job"
- W pliku rawRunningTimeData.txt pojawią się dane, które wykorzystuje skrypt napisany w języku Matlab
- Uruchamiamy skrypt AnalysisOfAlgoritm.m
- Wprowadzamy naszą predykcję co do złożoności algorytmu. ($O(n^x), gdzie\ x\ to\ nasza\ predykcja$)

Przykładowe wyniki analizy:

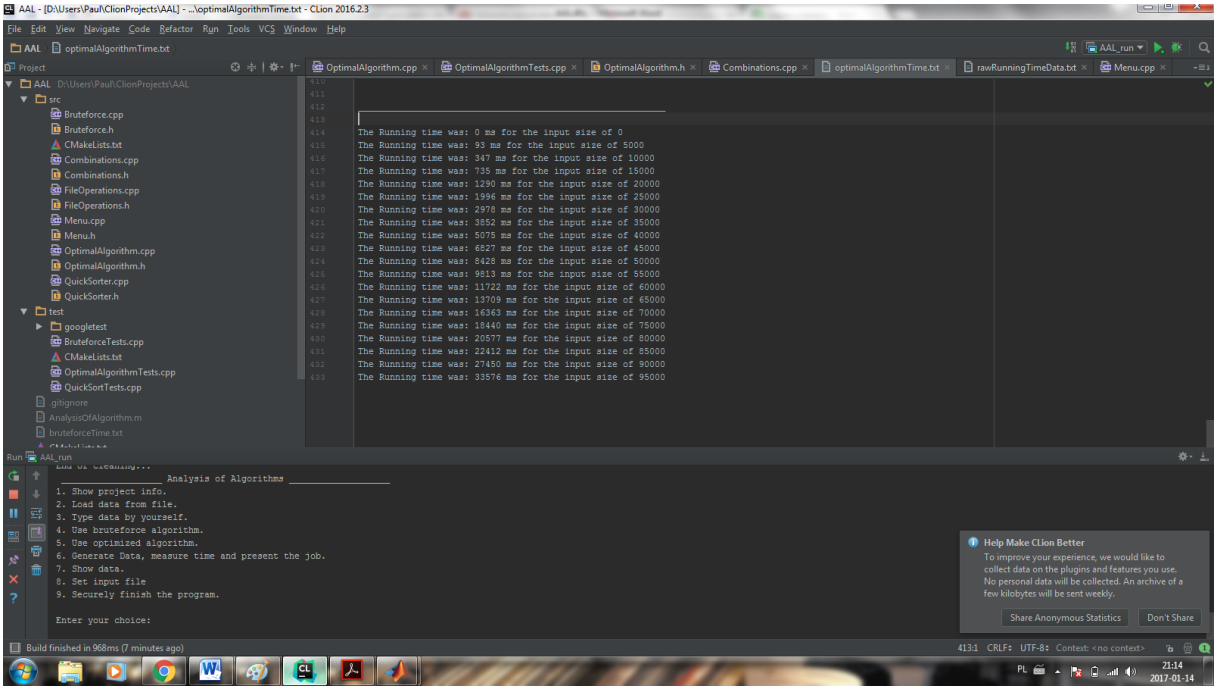
Testy zostały wykonane dla rozmiarów zbioru
$n \in \{5000,10000,15000,20000, \dots, 95000\}$

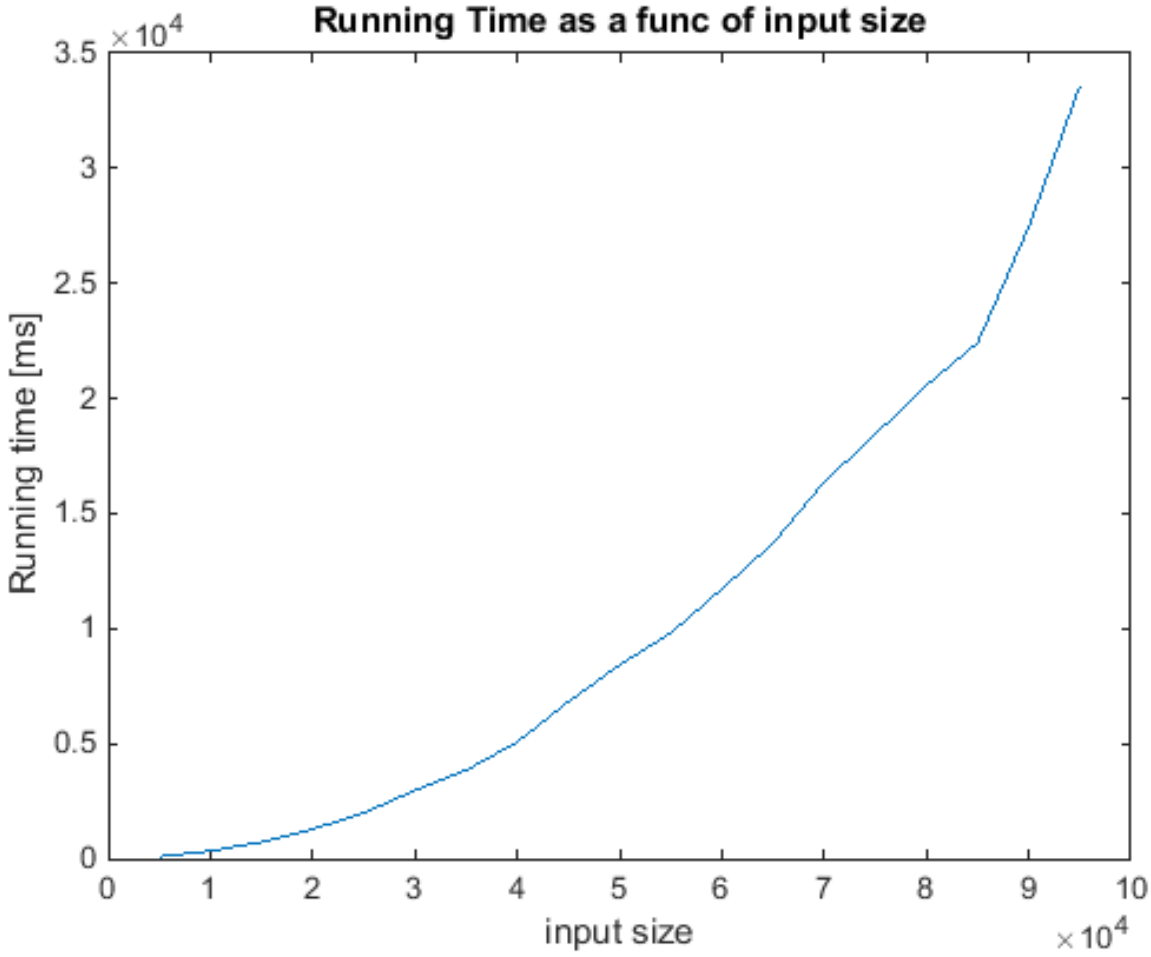
Dla predykcji rozwiązania $O(n^2)$. Tabela 1

ALGORYTM Z ASYMPTOTĄ O(T(n))		
n	**t(n) [ms]**	**q(n)**
0	0	1.1035
5000	93	1.0293
10000	347	0.9690
15000	735	0.9566
20000	1290	0.9473
25000	1996	0.9815
30000	2978	0.9328
35000	3852	0.9409
40000	5075	1.0000
45000	6827	1.0000
50000	8428	0.9623
55000	9813	0.9659
60000	11722	0.9624
65000	13709	0.9906

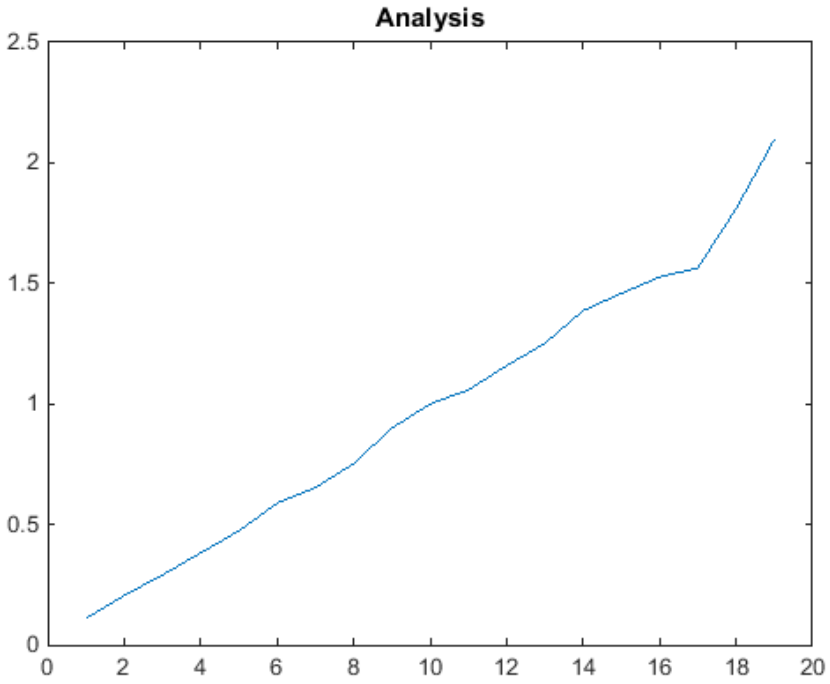
70000	16363	0.9724
75000	18440	0.9537
80000	20577	0.9201
85000	22412	1.0052
90000	27450	1.1036
95000	33576	1.0231

Z pliku optimalAlgorithmTime.txt

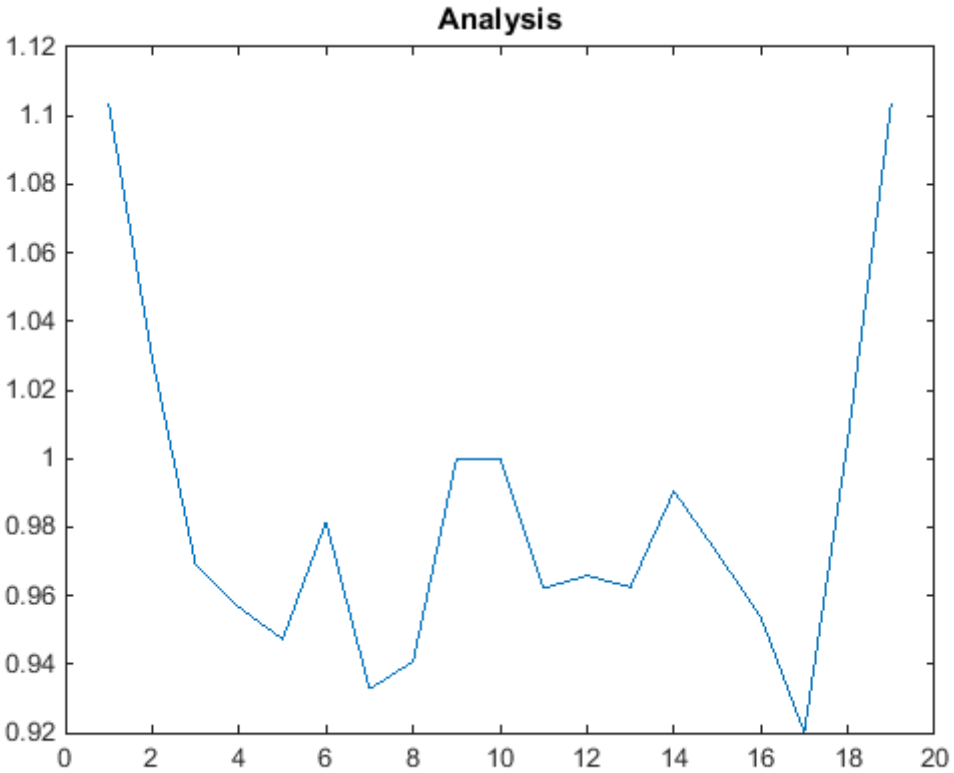



Running Time as a func of input size
×10^4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
Running time [ms]
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
input size
×10^4

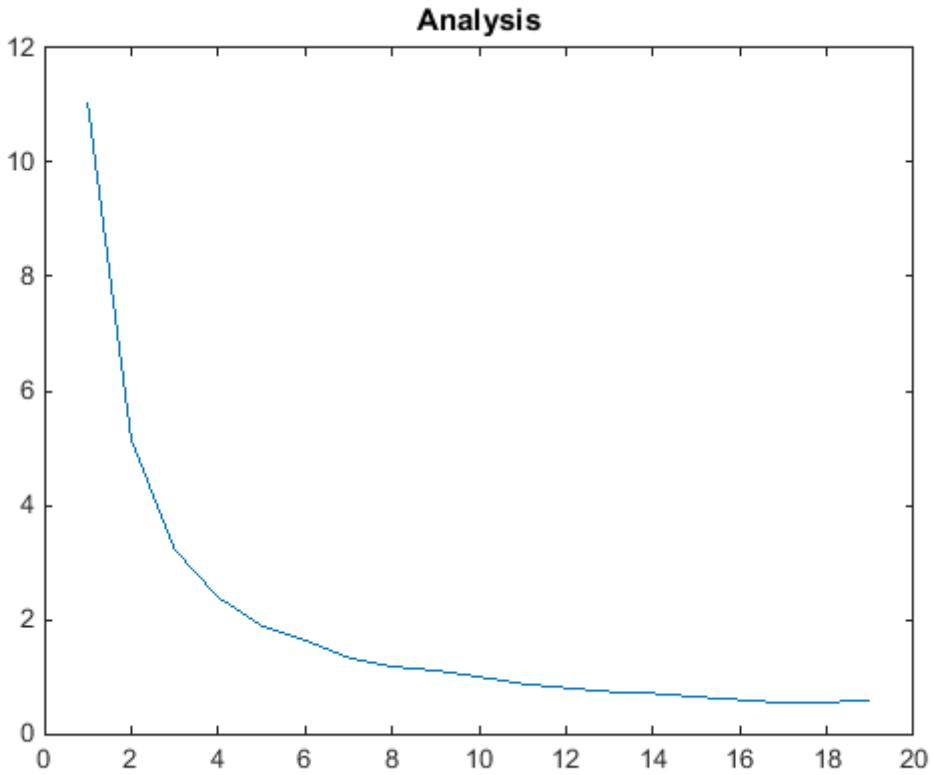
Predykcja dla x = 1 ($O(n^1)$).



Predykcja dla x = 2 ($O(n^2)$).



Predykcja dla x = 3 ($O(n^3)$).



WNIOSKI:

Analizawykresu ‘Running time as a func of input size’ :

Kształt wykresu zdecydowanie najbardziej przypomina funkcję kwadratową.

Analiza wykresów ‘Analysis’:

Są to wykresy przedstawiające wyniki

$$q(n) = \frac{t(n)}{cT(n)} = \frac{t(n)T(n_{mediana})}{T(n)t(n_{mediana})}$$

Najlepsza predykcja to taka, gdzie współczynniki są bliskie 1. Przeszacowanie występuje gdy q(n) malejące, zaś niedoszacowanie gdy q(n) rosnące.

Analizując wykresy możemy bezpośrednio stwierdzić, że najlepsza jest predykcja rozwiązania o postaci O(n^2), co potwierdza oceny teoretyczne.

LISTING KLAS i PLIKÓW WRAZ Z OBJAŚNIENIAMI:

- **src**
  - **Bruteforce.h/Bruteforce.cpp-** zawiera klasę i implementację metod, której głównym zadaniem jest obliczanie ilości rozwiązań oraz przechowywanie możliwych kombinacji patyków (które z nich użyć) w wektorze klas Combinations.
  - **Combinations.h/Combinations.cpp –** prosta klasa, która przechowuje długości (bądź indeksy) patyków dla wszystkich kombinacji.
  - **FileOperations.h/FileOperations.cpp –** zawiera klasę, której zadaniem jest wykonywanie operacji na plikach (odczyt, zapis, modyfikacja).
  - **Menu.h/Menu.cpp –** zawiera klasę i implementację metod, której zadaniem jest wyświetlanie Menu oraz interpretację żądań użytkownika.
  - **OptimalAlgorithm.h/OptimalAlgorithm.cpp –** zawiera klasę i implementację metod, której zadaniem jest obliczanie ilości rozwiązań oraz wypisanie możliwych kombinacji patyków.
  - **QuickSorter.h/QuickSorter.cpp –** zawiera klasę i implementację metod, której zadaniem jest posortowanie zbioru patyków metodą QuickSort.
- **test**
  - **BruteforceTests.cpp –** testy poprawności algorytmu Bruteforce
  - **OptimalAlgorithmTests.cpp –** testy poprawności algorytmu optymalnego
  - **QuicksorterTests.cpp –** testy poprawności algorytmu sortowania
- **pliki**

- **dataInput.txt –** domyślnie plik zawierający zbiór patyków które chcemy wczytać do programu (Uwaga: pierwsza linijka pliku to rozmiar danych, następne to długości patyków).
- **optimalAlgorithmTime.txt -** czasy wykonania zadania dla poszczególnych rozmiarów zbiorów dla algorytmu optymalnego
- **bruteforceTime.txt -** czasy wykonania zadania dla poszczególnych rozmiarów zbiorów dla algorytmu bruteforce
- **rawRunningTimeData.txt –** dane o czasach wykonania w postaci do analizy dla Matlaba

- **folder główny**
  - **main.cpp –** uruchamia program
  - **AnalysisOfAlgorithm.m –** skrypt napisany w Matlab, do przeprowadzenia analizy złożoności.

KORZYSTANIE Z PLIKÓW

Uwaga. W programie zostały defaultowo ustawione pewne ścieżki do plików. Aby program poprawnie działał i dokonywał operacji na plikach należy wywołać opcję z GUI, podając poprawnie ścieżki do plików z którym chcemy współpracować.

GITHUB

Historia tworzenia projektu dostępna na moim profilu na **github**:

https://github.com/Walczakp007/EITI-Projects/tree/master/AAL