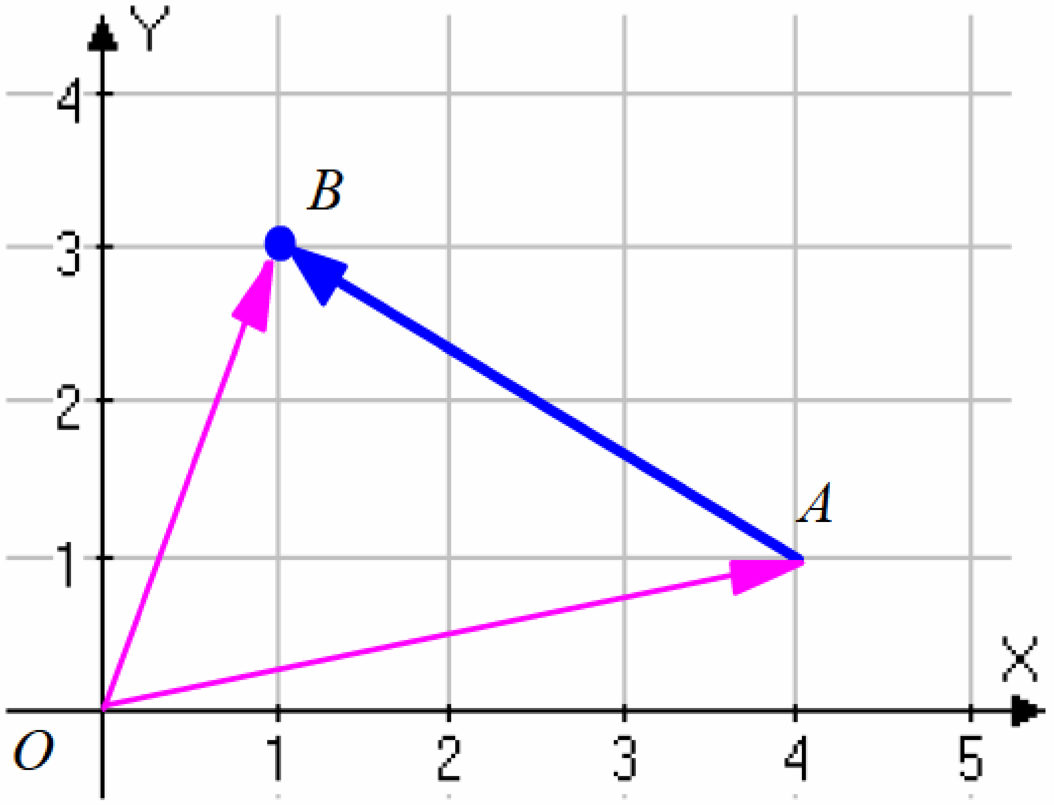
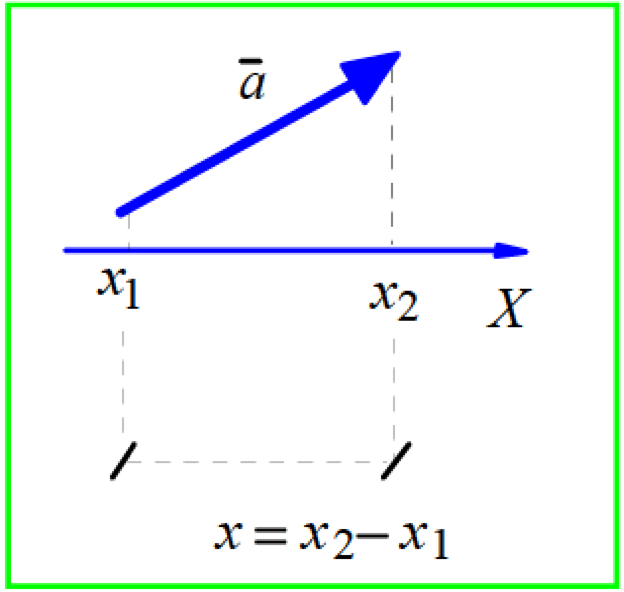
ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ

Пример 1.

Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$. Найти их проекции на координатные оси.

Решение. Построим точки и вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где O - начало системы координат





Применим правило проектирования вектора на числовую ось. Проекция вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на координатную ось OX равна разности проекций его конца и начала на эту ось, т.е. $x = x_2 - x_1$.

Утверждение. Вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ однозначно определяется тройкой (x, y, z) своих проекций на координатные оси OX, OY, OZ.

Вектор записывается в проекциях так: $\overline{a} = \overline{AB} = (x, y, z)$, где $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

Правило: Проекции вектора $\overline{AB}$ равны разности одноименные координаты его конца и начала, кратко $\overline{AB} = B - A$.

Вектор $\overline{OA}$ называется радиус-вектором точки A. Его проекции совпадают с координатами точки A. Поэтому $\overline{OA} = (4;1)$. Аналогично $\overline{OB} = (1;3)$

Находим вектор $\overline{AB} = B - A = B(1;3) - A(4;1) = (-3;2)$

Пример 2.

Найти модуль $\left|\overline{AB}\right|$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$ (см. пример 1).

Решение. Модуль вектора $\overline{AB}=(x,y,z)$ обозначается вектора $\left|\overline{AB}\right|$ и равен длине отрезка AB. Модуль вычисляется по формуле $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Так как векторы расположены на плоскости, то проекция $z=0$.

Подставим проекции $\overline{AB}=(-3;2)\Rightarrow\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

Пример 3.

Разложить $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, где $A(4;1)$ и $B(1;3)$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$. (см. пример 1).

Решение. Вектор $\bar{n}$ называется ортом или единичным вектором, если его модуль равен 1, т.е. $\left|\bar{n}\right| = 1$. Орты числовых осей OX, OY, OZ обозначаются $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ - это единичные векторы, лежащие на этих осях и имеющие направление этих осей.

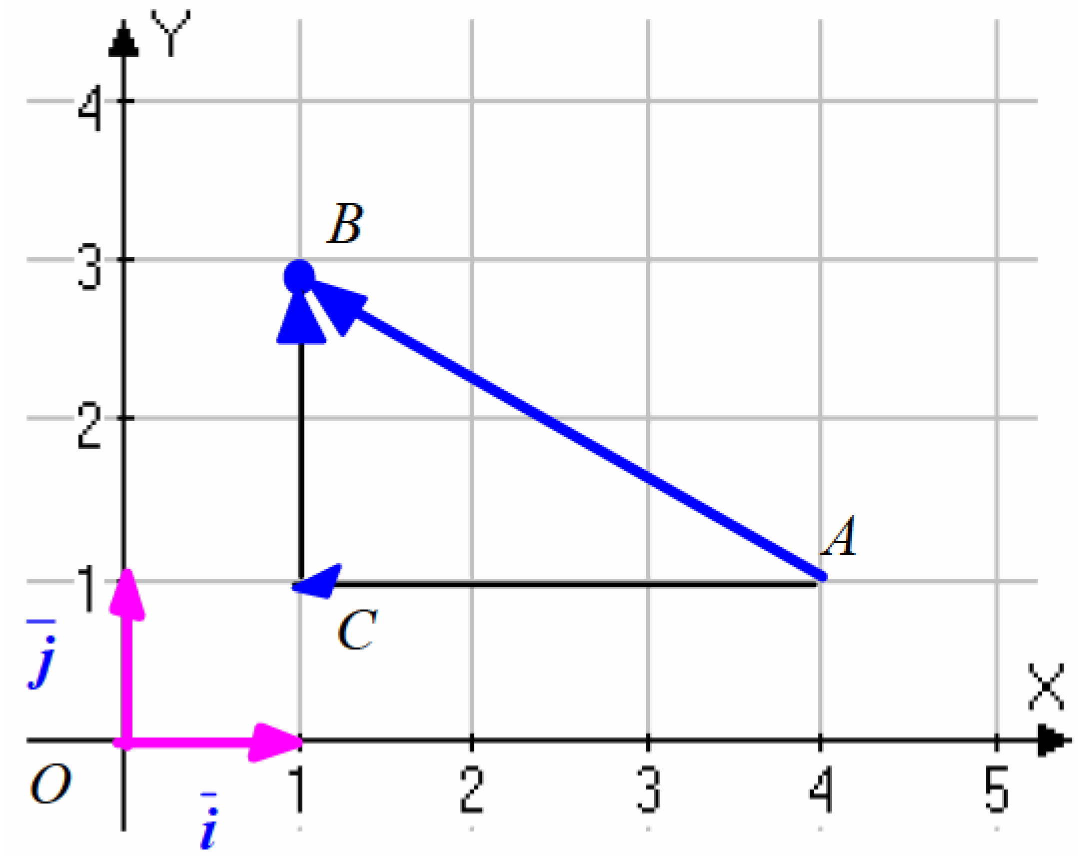
Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называют базисом трехмерного пространства, а векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ - базисом двумерного пространства (плоскости XOY).

Мы говорим, что вектор $\bar{a}$ разложен по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, если его можно представить в виде линейно комбинации базисных векторов, т.е. $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, где $x, y, z \in R$.

Выражение $x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ называют линейной комбинацией векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Скаляры (числа) называют координатами вектора $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ в этом базисе.

Справедливо утверждение. Для прямоугольной системы координат координаты вектора совпадают с его проекциями, т.е. $\bar{a} = (x, y, z) \Leftrightarrow \bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$

Поэтому верно $\overline{AB} = (-3;2) \Leftrightarrow \overline{AB} = -3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$



Найдем разложение вектора геометрически, запишем его как сумму $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ по правилу многоугольника.

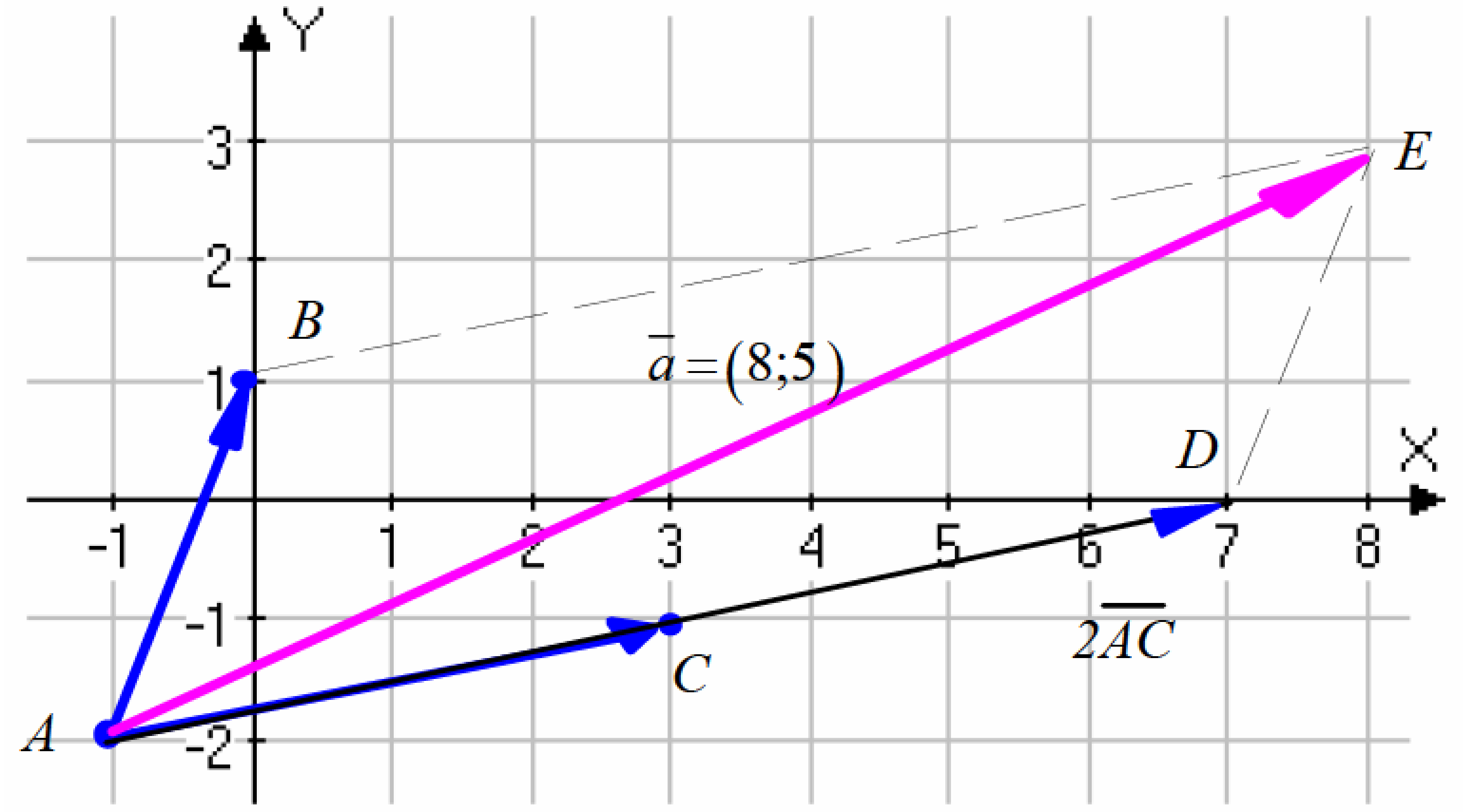
Выражаем $\overline{AC} = -3 \cdot \bar{i}$, $\overline{CB} = 2 \cdot \bar{j}$. Поэтому $\overline{AB} = -3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$

Ответ: $\overline{AB} = (-3;2) \Leftrightarrow \overline{AB} = -3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j}$

Пример 4.

Вычислить координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$, где $A(-1;-2)$, $B(0;1)$, $C(3;-1)$. Сделать чертеж, геометрически определить проекции вектора $\overline{a}$.

Решение. Построим на плоскости XOY точки A, B, C и векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $2\overline{AC}$, сумму $\overline{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$.



При построении вектора $2\overline{AC}$ мы увеличили вектор $\overline{AC}$ в два раза. Обозначим $\overline{AD} = 2\overline{AC}$. Точка D будет лежать на оси абсцисс (ордината точки D равна нулю).

Производим сложение геометрических векторов $\overline{AB}$, $2\overline{AC}$ по правилу параллелограмма, т.е. вектор $\overline{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$ - это диагональ параллелограмма $ABED$. Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ по правилу: “из координат конца вектора вычитаем одноименные координаты его начала”.

$$\overline{AB} = (0;1) - (-1;-2) = (1;3) \qquad \overline{AC} = (3;\,-1) - (-1;-2) = (4;1)$$

Умножение вектора на константу и сложение векторов производим покоординатно:

$$\overline{a} = \overline{AB} + 2\overline{AC} = (1;3) + 2\cdot(4;1) = (1;3) + (8;2) = (9;5).$$

Итак, получаем: $\overline{a} = (9;5)$.

Переходим ко второй части задачи. Находим геометрически проекции $(x;y)$ вектора $\overline{a}$ на координатные оси:

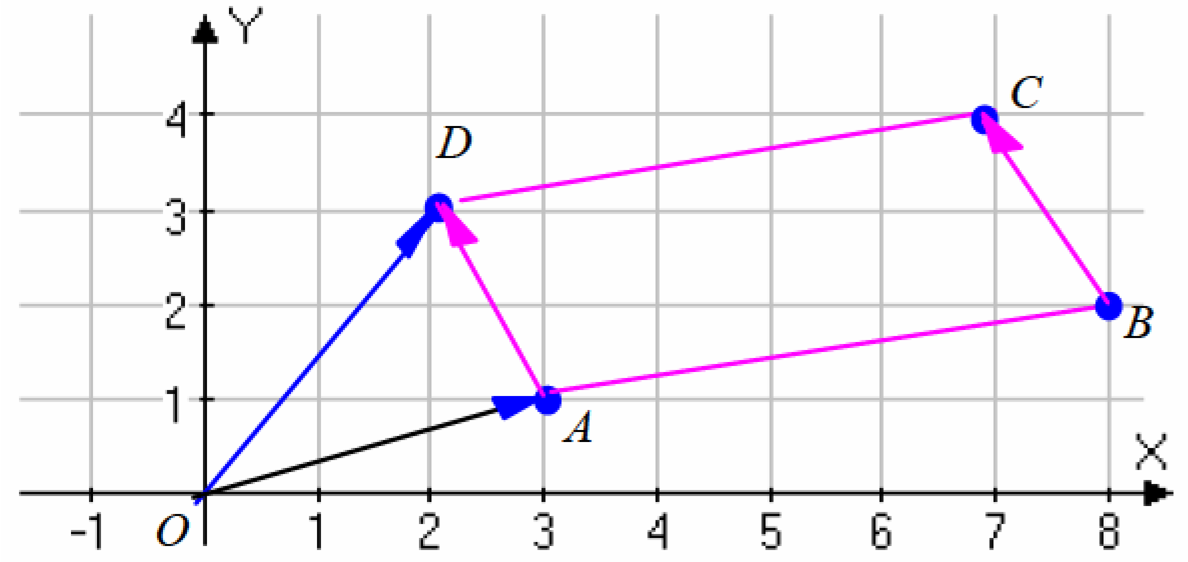
$OX: \qquad x = 8 - (-1) = 9$

$OY: \qquad y = 3 - (-2) = 5$

Пример 5.

Известны три последовательные вершины $A(3;1)$, $B(8;2)$, $C(7;4)$ параллелограмма $ABCD$.

Найти координаты вершины D.



Решение. Построим параллелограмм $ABDC$. Применим правило: координаты радиус-вектора $\overline{OA}=(x;y)$ совпадают с координатами точки $A(x;y)$

Поэтому радиус вектор $\overline{OA}=(3;1)$. Радиус-вектор $\overline{OD}$ точки D находим по правилу многоугольника: $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AD}$.

При параллельном переносе вектор не меняется, поэтому верно равенство

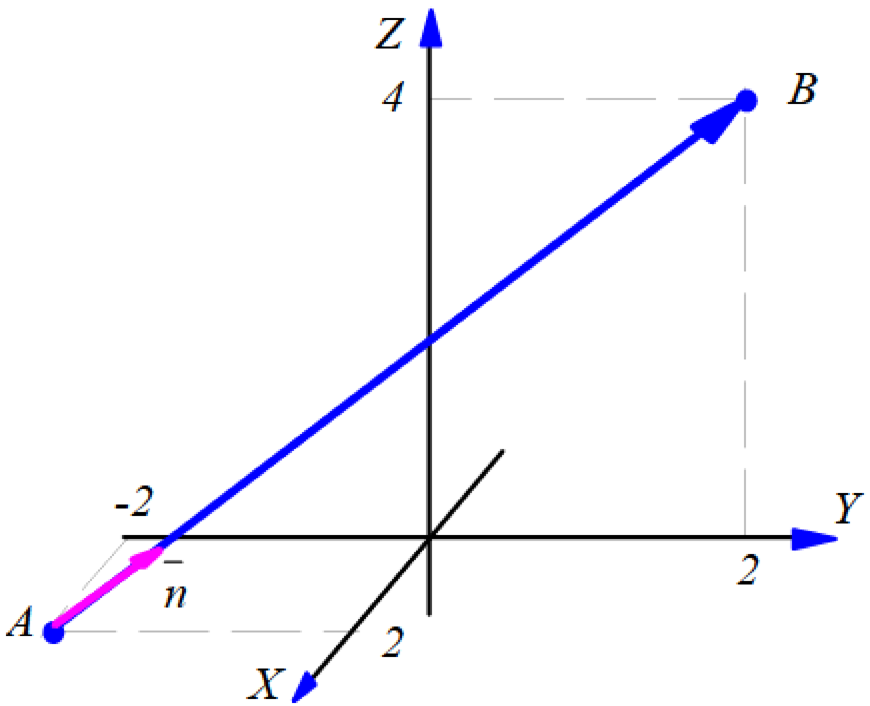
$\overline{AD}=\overline{BC}=C(7;4)-B(8;2)=(-1;2)$

Отсюда $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AD} \Rightarrow \overline{OD}=(3;1)+(-1;2)=(2;3) \Rightarrow D(2;3)$. Ответ: $D(2;3)$

Пример 6.

Вычислить модуль вектора $\overline{AB}$, где $A(2;-2;0)$, $B(0;2;4)$. Найти орт $\bar{n}$ вектора $\overline{AB}$. Сделать чертеж.

Решение. Построим точки A, B и вектор $\overline{AB}$ в пространстве



Находим проекции вектора $\overline{AB} = B(0;2;4) - A(2;-2;0) = (-2;4;4)$

Модуль вычисляется по формуле $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2} = 6$

Орт $\bar{n} = \dfrac{1}{\left|\overline{AB}\right|} \cdot \overline{AB} = \dfrac{1}{6} \cdot (-2;4;4) = \left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

Чтобы построить орт $\bar{n}$ нужно уменьшить вектор $\overline{AB}$ в 6 раз (во столько раз, какова длина вектора)

Пример 7.

При каких значениях параметра x два вектора $\overline{a}=(x;2\cdot x-1)$, $\overline{b}=(2;\ x+1)$ будут коллинеарными?

Решение. Применим признак коллинеарности векторов - “ два вектора коллинеарны в том и только том случае, когда их одноименные координаты пропорциональны”,

$$\overline{a}\|\overline{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

Для двумерных векторов $\overline{a}\|\overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{2\cdot x-1}{x+1}$. Решаем это уравнение

$$x\cdot(x+1)=2\cdot(2\cdot x-1),\ x^2+x=4\cdot x-2,\ \ x^2-3\cdot x+2=0,\ x_1=1,\ x_2=2$$

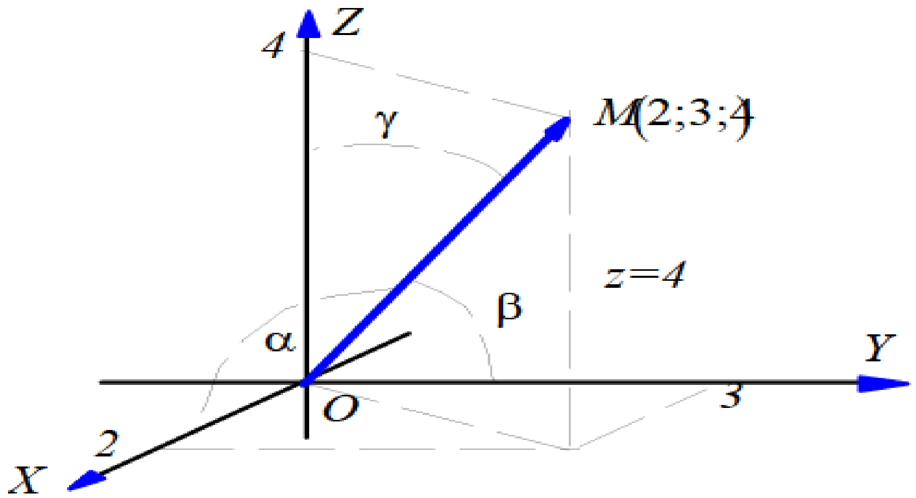
С геометрической точки зрения векторы коллинеарны, если один вектор получается из другого растяжением (сжатием). Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$

ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 1.

Построить радиус-вектор точки $M(2;3;4)$, определить его модуль и направление (т.е. его направляющие косинусы).

Решение. Построим точку $M(2;3;4)$ и вектор $\overline{OM}$. Координаты радиуса-вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами его конца $M(2;3;4)$, т.е. $\overline{OM}=(2;3;4)$.



Модуль вектора $|\overline{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}\approx 5,4$

Направляющие углы - это углы, которые вектор образует с координатными осями. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами. Вычислим их по формулам:

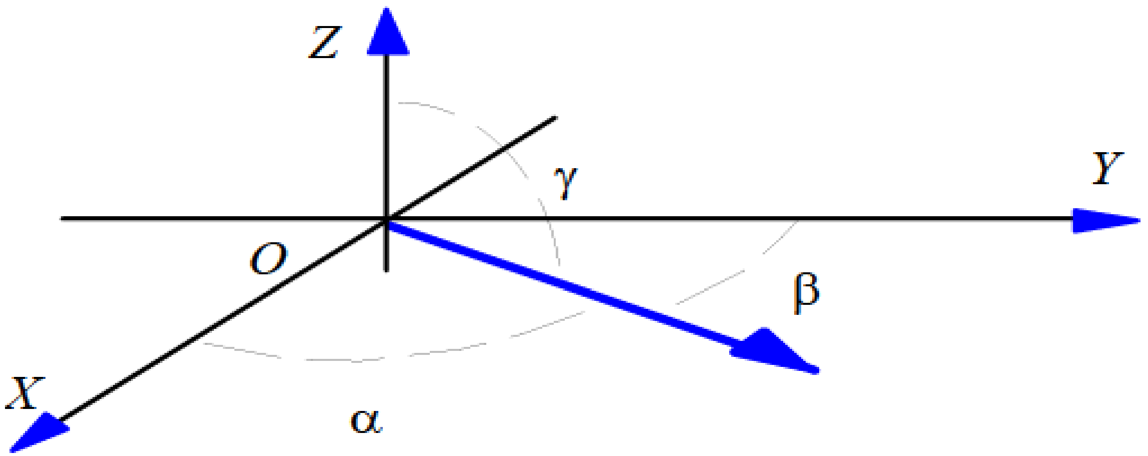
$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overline{OM}|}=\frac{2}{\sqrt{29}},\ \cos\beta=\frac{y}{|\overline{OM}|}=\frac{3}{\sqrt{29}},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\overline{OM}|}=\frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Единичный вектор $\overline{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}};\frac{3}{\sqrt{29}};\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$ определяет направление вектора $\overline{OM}$. (т.е. является ортом этого вектора).

Пример 2.

Вектор $\overline{a}$ составляет с осями OX, OZ углы 60^0 и 90^0. Найти угол, который этот вектор составляет с осью OY.

Решение. Сделаем чертеж. Построим вектор $\overline{a}$ произвольной длины, который с осями образует заданные направляющие углы $\alpha = 60^0$, $\gamma = 90^0$. Так как $\gamma = 90^0$, то это значит, что вектор $\overline{a}$ лежит в плоскости XOY. Угол α можно откладывать в обе стороны от оси абсцисс. Для положения изображенного на чертеже находим $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 60^0 = 30^0$



Решим эту задачу аналитически. Применим тождество для направляющих косинусов

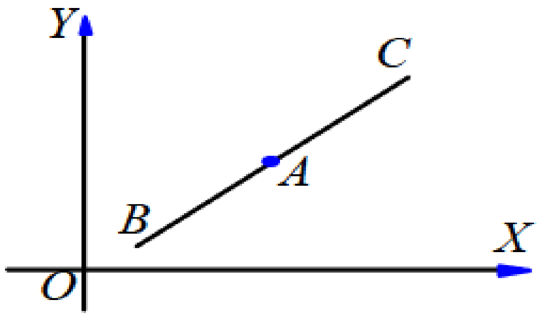
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 60^0 + \cos^2\beta + \cos^2 90^0 = 1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta + 0 = 1,\ \cos^2\beta = \frac{3}{4},$$

$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Условию задачи удовлетворяют два вектора, имеющих направляющие углы: $\beta_1 = 30^0$, $\beta_2 = 150^0$. Ответ: $\beta_1 = 30^0$, $\beta_2 = 150^0$.

Пример 3.

Построить точку C, симметричную точке $B(-4\,;1)$ относительно $A(1;\,3)$

Решение. Симметричные точки B, C относительно точки A лежат на одной прямой и центр симметрии A делит отрезок BC пополам.

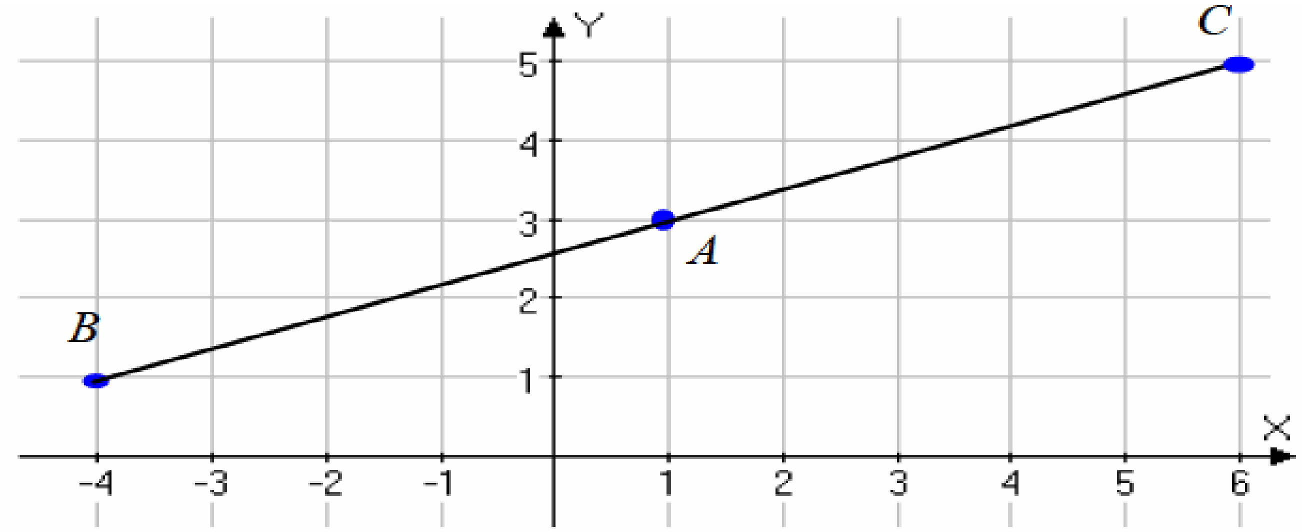


Применим формулы середины отрезка

$x_A = \frac{1}{2}\cdot(x_B + x_C) \Rightarrow 2x_A = x_B + x_C$, $x_C = 2x_A - x_B$. По аналогии $y_C = 2y_A - y_B$

Отсюда $x_C = 2\cdot 1 - (-4) = 6$; $y_C = 2\cdot 3 - 1 = 5$. Точка $C(6;5)$

Выполним точные построения



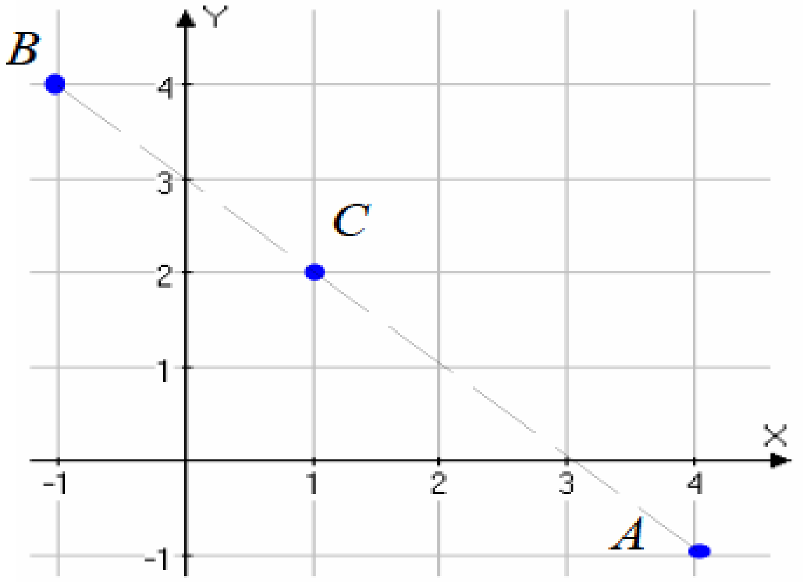
Пример 4.

Найти (геометрически и аналитически) центр масс C системы двух точек $A(4;\ -1)$, $B(-1;4)$, имеющих соответственно массы $m_1 = 2$, $m_2 = 3$

Решение. Координаты центра масс системы двух точек:

$$x_C = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{2+3} = 1;\ y_C = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4}{2+3} = 2.$$

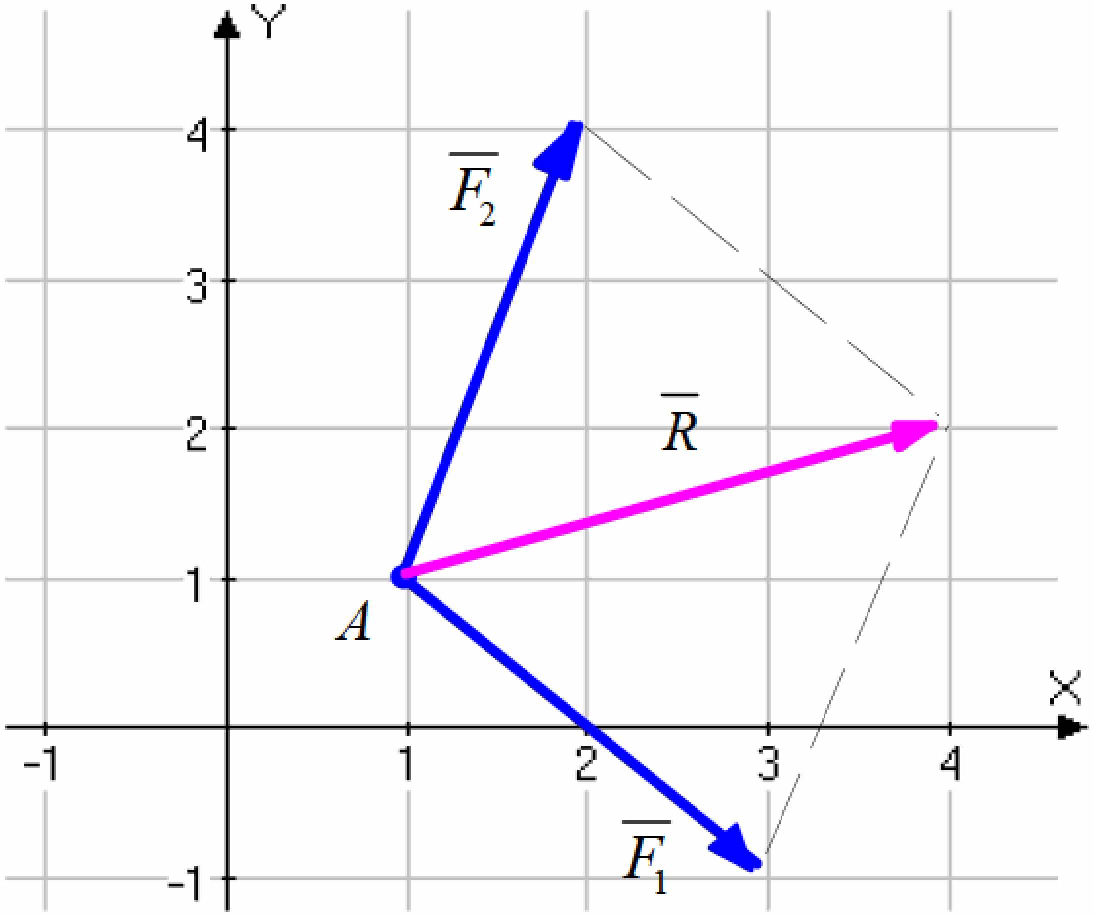
Центр масс $C(1;2)$ делит отрезок AB в отношении $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{3}{2}$, считая от точки A.



Пример 5.

Найти равнодействующую сил $\overline{F_1} = 2 \cdot \overline{i} - 2 \cdot \overline{j}$, $\overline{F_2}$, приложенных к точке $A(1;1)$, где $F_{2,x} = 1$, $F_{2,y} = 3$.

Решение. Запишем силы в проекциях $\overline{F_1} = (2;-2)$, $\overline{F_2} = (1;3)$.

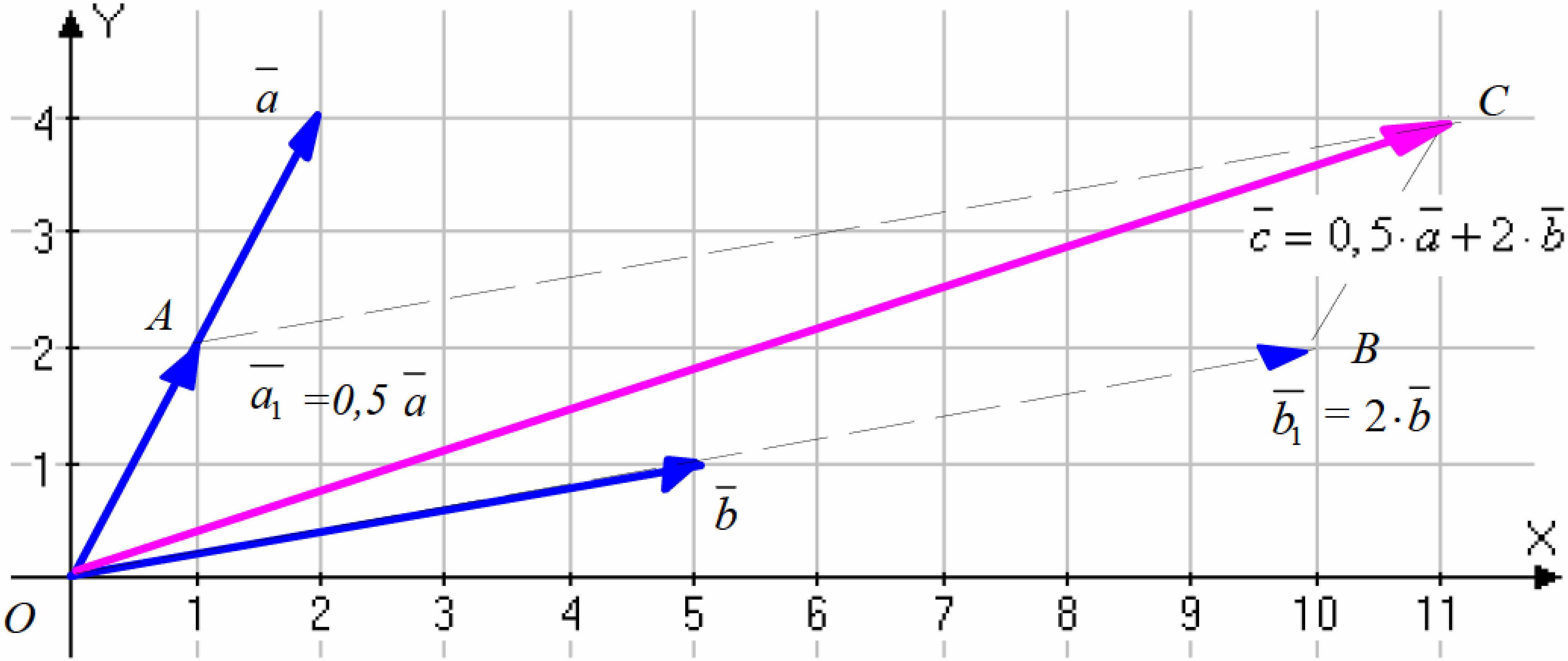


При построении силы, например $\overline{F_2} = (1;3)$, смещаемся из точки A горизонтально на 1 единицы вправо и на три единицы вверх. Равнодействующая равна сумме сил: $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = (2;-2) + (1;3) = (3;1)$.

Пример 6.

Разложить (геометрически и аналитически) вектор $\overline{c}=(11;4)$ по базису $\overline{a}=(2;4),\overline{b}=(5;1)$.

Решение. Изобразим двумерные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$. Они не коллинеарные и поэтому образуют базис плоскости $XOY=R^2$. Это значит, что любой вектор $\overline{c}\in R^2$ выражается в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. найдутся такие скаляры $x,y\in R$, что верно разложение $\overline{c}=x\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}$.



Получим геометрически разложение вектора $\overline{c}$ по этому базису. Проведем пунктирные оси через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$. Затем построим параллелограмм с диагональю $\overline{c}$, т.е. проецируем точку C на пунктирную ось параллельно другой оси. Получаем разложение $\overline{c} = \overline{a_1} + \overline{b_1}$, в котором слагаемые коллинеарны соответственно векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$. Выразим приближенно слагаемые $\overline{a_1}$, $\overline{b_1}$ через базисные векторы: $\overline{a_1} = 0,5 \cdot \overline{a}$ и $\overline{b_1} = 2 \cdot \overline{b}$. Следовательно, $\overline{c} = 0,5 \cdot \overline{a} + 2 \cdot \overline{b}$.

Эту задачу можно решить аналитически так. Проецируем обе части равенства $\overline{c} = x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b}$ на координатные оси:

$(11;4) = x \cdot (2;4) + y \cdot (5;1) \Rightarrow$ проекция на ось OX: $11 = 2 \cdot x + 5 \cdot y$; на ось OY: $4 = 4 \cdot x + y$.

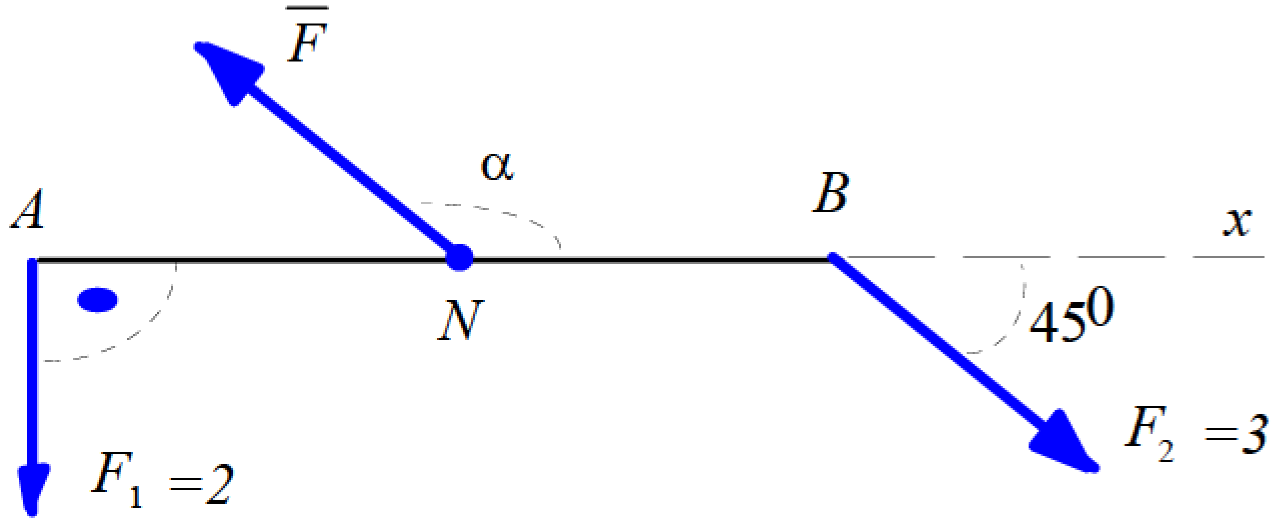
Решаем систему линейных уравнений по методу Крамера $\begin{cases} 2 \cdot x + 5 \cdot y = 11 \\ 4 \cdot x + y = 4 \end{cases}$.

Вычисляем определители: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -18$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -36$.

Отсюда: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0,5$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2$, $\overline{c} = 0,5 \cdot \overline{a} + 2 \cdot \overline{b}$

Пример 7.

Определить угол α и силу $\overline{F}$, приложенную к середине C отрезка AB, такую, что система сил, изображенных на чертеже, уравновешенная.



Решение. Введем систему координат. Направим ось OX вдоль AB, точку A примем за начало отсчета. Обозначим $\overline{F} = \left(F_x; F_y\right)$.

Система сил уравновешена, если их векторная сумма равна нулю. Находим проекции сил на координатные оси:

$$\sum F_{i;x} = 0 \Rightarrow 0 + F_x + F_2 \cdot \cos 45^0 = 0;$$

$$\sum F_{i;y} = 0 \Rightarrow -F_1 + F_y - F_2 \sin 45^0 = 0.$$

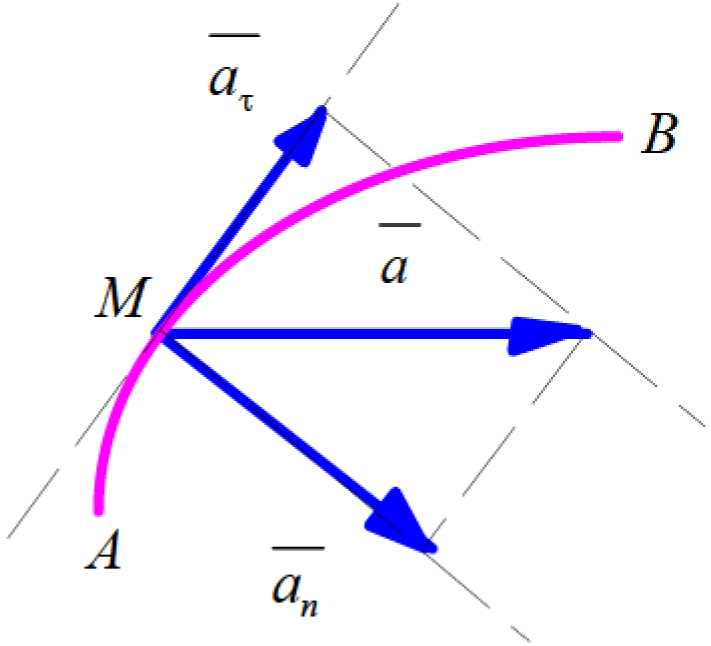
Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} F_x + 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ F_y - 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -2,1 \\ F_y = \dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2} + 2 \approx 4,1 \end{cases}$$; модуль $F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = \sqrt{(-2,1)^2 + 4,1^2} = 4,6$

$\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} = -\dfrac{2,1}{4,6} = -0,46$, $\alpha \approx 117^0$.

Пример 8.

Точка M движется с ускорением $\overline{a}$ по дуге AB. Разложить геометрически ускорение $\overline{a}$ в сумму нормального и касательного ускорений $\overline{a_n}$, $\overline{a_\tau}$.

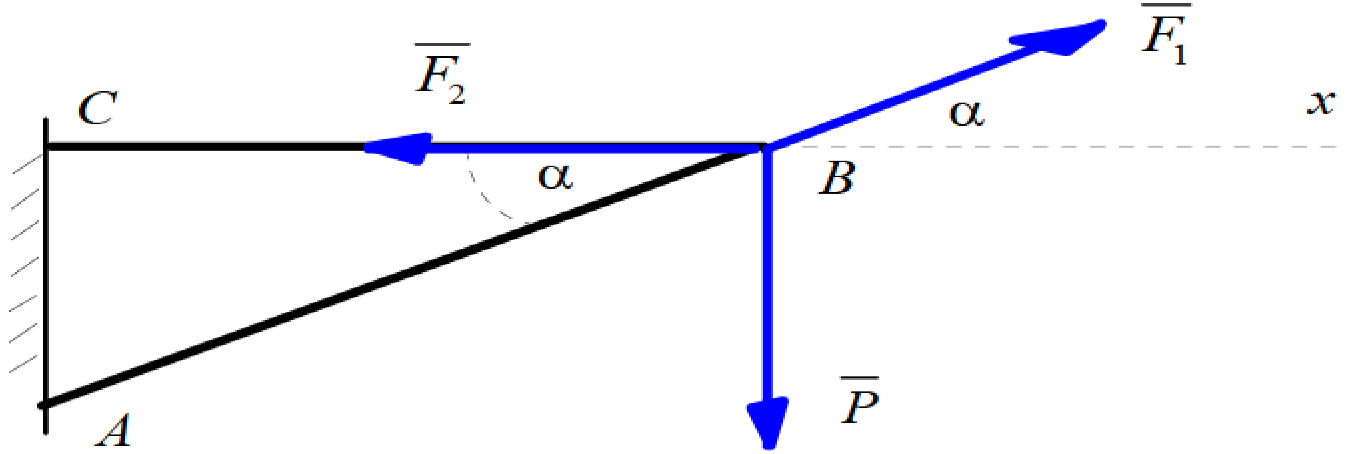


Решение. Проводим через точку касания M касательную к траектории AM. Далее проводим нормаль траектории, т.е. перпендикуляр к касательной, проходящий через точку M. Постоим прямоугольник на этих прямых с диагональю, равной вектору $\overline{a}$.

Получаем разложение ускорения $\overline{a} = \overline{a_n} + \overline{a_\tau}$

Пример 9.

Найти силу, растягивающую стержень CB кронштейна, к которому подвешен груз P. Угол $\angle ABC = \alpha$.



Решение. Укажем на чертеже силы, приложенные к точке B: вес груза - $\overline{P}$, реакция $\overline{F_1}$ стержня AB, реакция $\overline{F_2}$ стержня CB. Составим уравнение равновесия точки B:

$$\sum F_{i,x} = 0 \Rightarrow -F_2 + F_1 \cdot \cos\alpha = 0; \quad \sum F_{i,y} = 0 \Rightarrow -P + F_1 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Решаем систему уравнений:

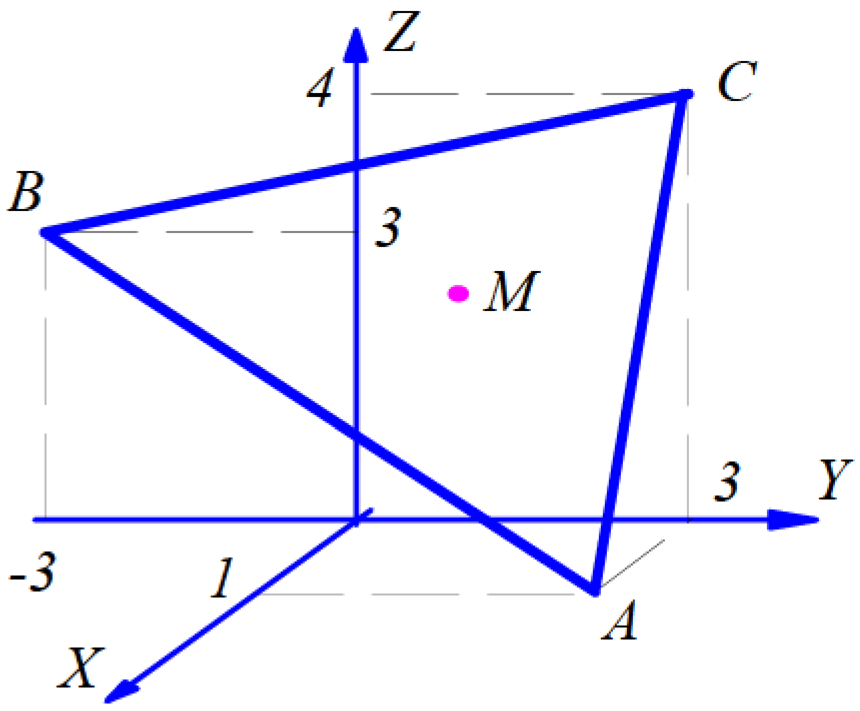
$$-P + F_1 \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{P}{\sin\alpha}$$

$$-F_2 + F_1 \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \cos\alpha = \frac{P}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = P \cdot ctg\alpha$$

Ответ. $F_1 = \dfrac{P}{\sin\alpha}$, $F_2 = P \cdot ctg\alpha$.

Пример 10.

Определить вершины и проекции центра масс M однородного треугольника ABC по данным пространственного чертежа



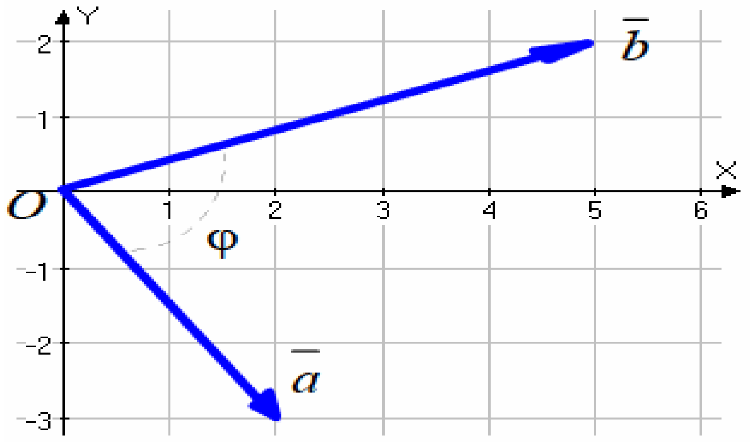
Ответ. $A(1;3;0)$, $B(0;-3;3)$, $C(0;3;4)$, $M\left(\frac{1}{3};1;\frac{7}{3}\right)$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 1.

Найти угол φ между векторами $\overline{a} = -3 \cdot \overline{j} + 2 \cdot \overline{i}$, $\overline{b} = (5;\, 2)$.

Решение. Запишем векторы $\overline{a} = (2;-3)$, $\overline{b} = (5;\, 2)$ в проекциях. Построим эти вектора



Угол φ между векторами определим согласно формуле $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.

Находим скалярное произведение векторов, модули векторов:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 = 4$;

модули $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $|\overline{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

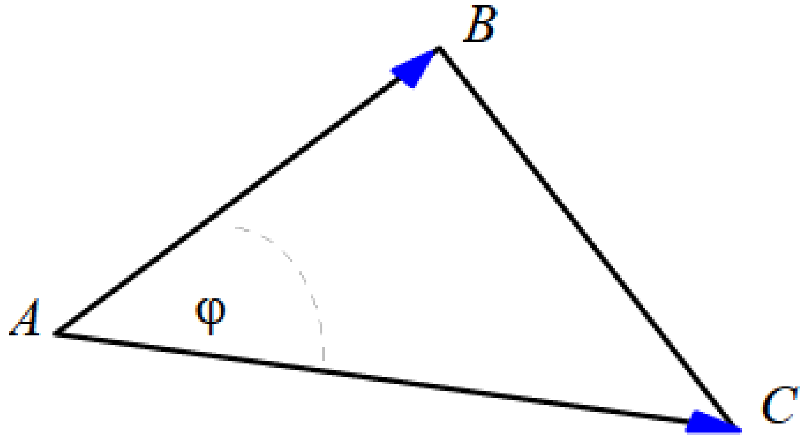
Определим угол φ :

$\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \dfrac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,2$; $\varphi \approx \arccos 0,2 \approx 78^0$. Ответ. $\varphi \approx 78^0$

Пример 2.

Найти $\varphi=\angle A$ в треугольнике ABC, где $A(2;-1;0)$, $B(1;-2;1)$, $C(0;3;4)$

Решение. Сделаем схематический чертеж.



Находим вектор: $\overline{AB}=B(1;-2;1)-A(2;-1;0)=(-1;-1;1)$; аналогично: $\overline{AC}=(-2;4;4)$.

Скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+1\cdot 4=2.$$

Угол между этими векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot 6}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Rightarrow\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}\approx\arccos 0,19\approx 79^0$.

Ответ. $\varphi\approx 79^0$

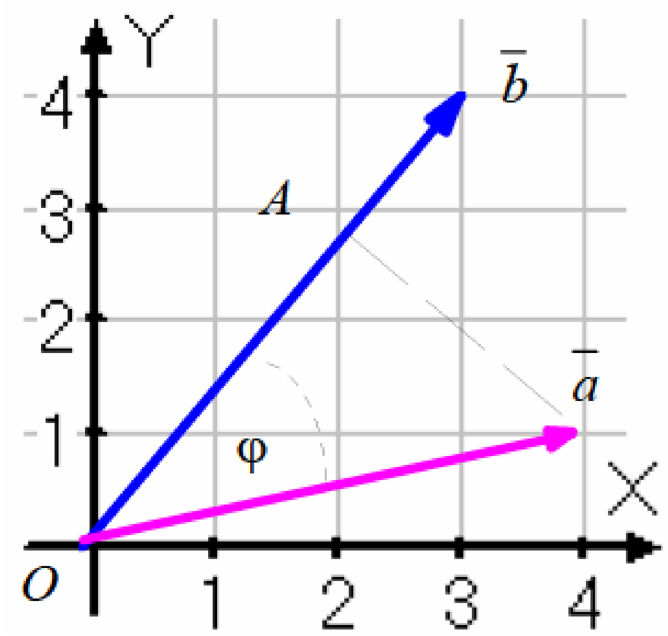
Пример 3.

Найти проекцию вектора $\overline{a} = (4;1)$ на вектор $\overline{b} = (3;4)$

Решение. Из конца вектора $\overline{a}$ опускаем перпендикуляр на прямую, проходящую через вектор $\overline{b}$ Проекция равна длине отрезка OA, взятой со знаком «плюс», если угол φ - острый, в противном случае – со знаком «минус». Согласно определению проекция $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$

Скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 16$, модуль вектора $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

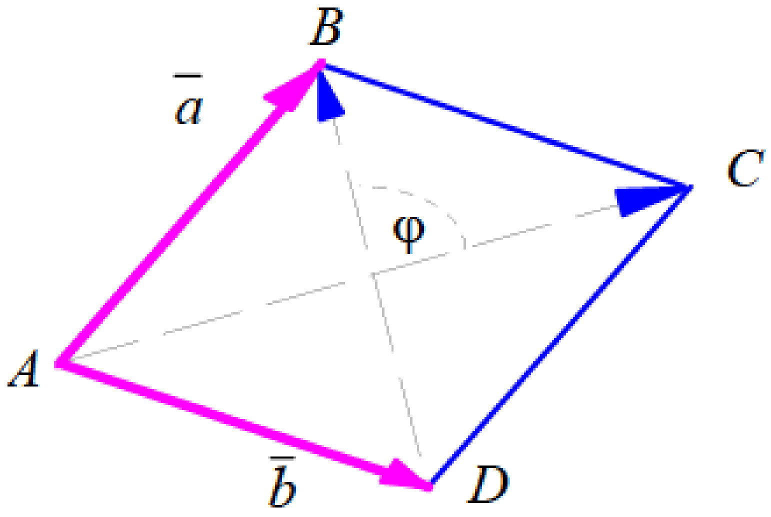
Применим формулу проекции $\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{b}\right|} = \dfrac{16}{5} = 3,2$



Пример 4.

Доказать, что параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны

Решение. Докажем необходимость этого утверждения. Построим ромб $ABCD$ на векторах $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AD}$.



Выразим диагонали $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$ через вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$

Применим признак перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$$\overline{AC} \perp \overline{DB} \;\Leftrightarrow\; \overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0.$$

Вычислим скалярное произведение диагоналей

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \left(\overline{a} - \overline{b}\right) = \overline{a}^2 - \overline{b}^2 = \left|\overline{a}\right|^2 - \left|\overline{b}\right|^2 = 0,$$

Равенство верно, так как для ромба стороны равны, т.е. $\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{b}\right|$

Угол φ между диагоналями ромба прямой.

Пример 5.

Раскрыть скобки в выражении $x=\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)^2$. Вычислить значение x при $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$.

Ответ. $x=34$

Решение. Применим формулы квадрат суммы и разности:

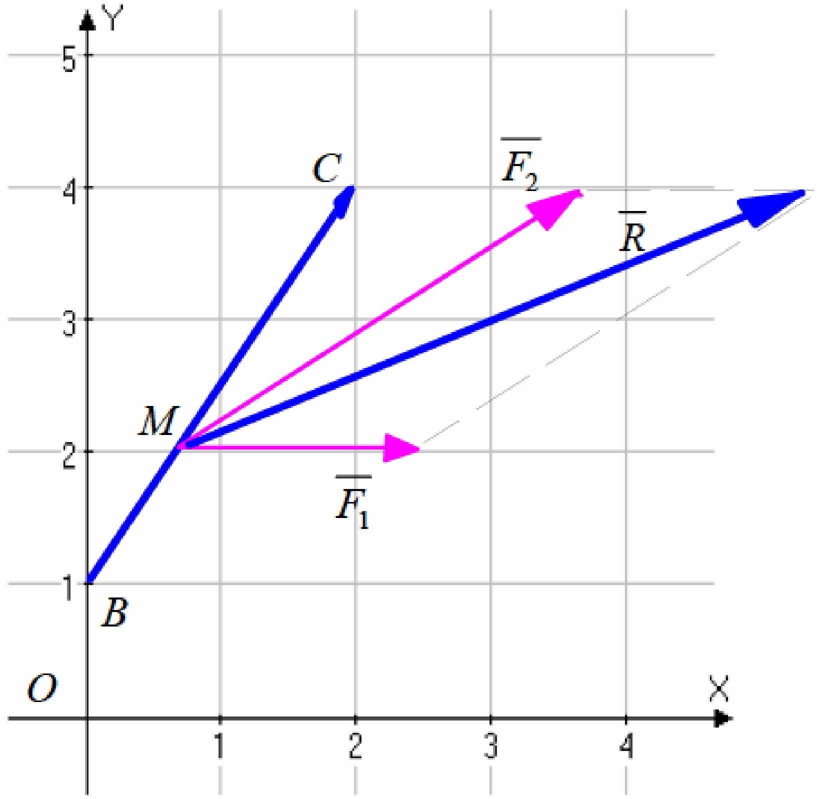
$$x=\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)^2 \Rightarrow x=\left(\overline{a}\right)^2+2\cdot\left(\overline{a}\cdot 2\overline{b}\right)+\left(2\overline{b}\right)^2+\left(\overline{a}\right)^2-2\cdot\left(\overline{a}\cdot 2\overline{b}\right)+\left(2\overline{b}\right)^2$$

$$x=2\cdot\left(\overline{a}\right)^2+2\cdot\left(2\overline{b}\right)^2,\ x=2\cdot\left|\overline{a}\right|^2+2\cdot 4\cdot\left|\overline{b}\right|^2,\ \ x=2\cdot 1^2+2\cdot 4\cdot 2^2=34$$

Пример 6.

Найти работу результирующей сил по перемещению точки M по прямой под действием постоянных сил $\overline{F_1}=(2;0)$, $\overline{F_2}=(3;2)$ из положения $B(0;1)$ в положение $C(2;4)$.

Решение. Построим вектора.



Находим результирующую силу $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}=(2;0)+(3;2)=(5;2)$.

Вектор-перемещение точки $\overline{BC}=C(2;4)-B(0;1)=(2;3)$

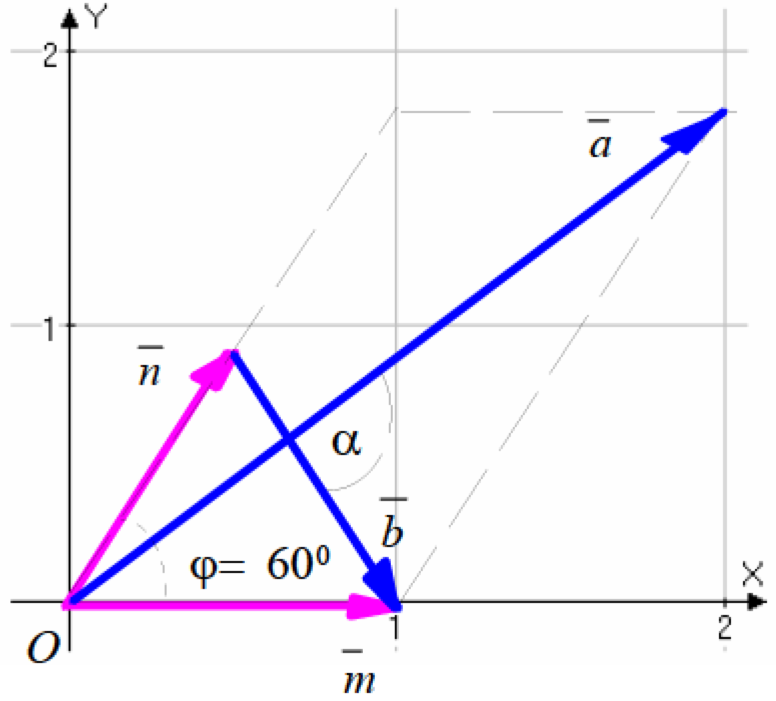
Находим работу A силы как скалярное произведение силы на вектор-перемещение:

$A=\overline{R}\cdot\overline{BC}=5\cdot 2+2\cdot 3=16$.

Пример 7.

Найти угол α между векторами $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, где $\overline{m}$, $\overline{n}$ -единичные векторы, образующие угол $\varphi = 60^0$.

Решение. Построим вектора $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$.



Находим косинус угла α по формуле $\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$. Координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ неизвестны, поэтому нельзя вычислить скалярное произведение этих векторов по обычной формуле.

Находим произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{m}+2\cdot\overline{n})\cdot(\overline{m}-\overline{n})$. Раскрываем скобки

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{m}\cdot\overline{m}-\overline{m}\cdot\overline{n}+2\cdot\overline{n}\cdot\overline{m}-2\cdot\overline{n}\cdot\overline{n} \Rightarrow \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{m}\cdot\overline{m}+\overline{m}\cdot\overline{n}-2\cdot\overline{n}\cdot\overline{n}$$

Скалярные квадраты единичных векторов равны единице, т.е.

$$|\overline{m}|=1 \text{ и } |\overline{n}|=1 \Rightarrow \overline{m}\cdot\overline{m}=|\overline{m}|^2=1 \text{ и } \overline{n}\cdot\overline{n}=|\overline{n}|^2=1$$

Вычислим скалярное произведение орт с помощью определения $\overline{m}\cdot\overline{n}=|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|\cdot\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos 60^0=\frac{1}{2}$

Поэтому $\overline{a}\cdot\overline{b}=1+\frac{1}{2}-2\cdot1=-\frac{1}{2}$

Далее аналогично находим квадраты модулей

$$|\overline{a}|^2=(\overline{m}+2\cdot\overline{n})^2=\overline{m}^2+4\cdot\overline{m}\cdot\overline{n}+4\cdot\overline{n}^2=1+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1=7;$$

$|\overline{b}|^2=(\overline{m}-\overline{n})^2=\overline{m}^2-2\cdot\overline{m}\cdot\overline{n}+\overline{n}^2=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=1$; Модули $|\overline{a}|=\sqrt{7}$, $|\overline{b}|=1$

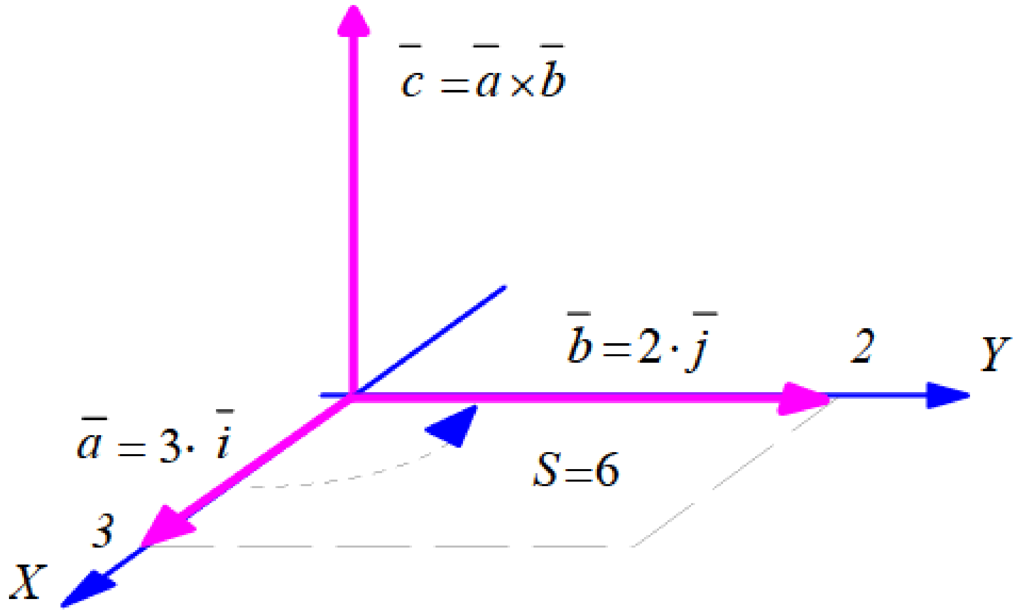
Отсюда $\cos\alpha=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}\cdot1}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}$, $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\right)$, $\alpha\approx101^0$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пример 1.

Построить векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$, если $\overline{a} = 3 \cdot \overline{i}$, $\overline{b} = 2 \cdot \overline{j}$. Определить направление векторного произведения с помощью правила правого буравчика.

Решение. Построим в пространстве вектора $\overline{a} = 3 \cdot \overline{i}$, $\overline{b} = 2 \cdot \overline{j}$ .. Векторное произведение $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ - это вектор, который лежит на перпендикуляре к плоскости векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$. В нашем случае это плоскость XOY, а вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ лежит на оси OZ.



Найдем модуль $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$ как площадь $S = 2 \cdot 3 = 6$ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 3 \cdot \overline{i}$, $\overline{b} = 2 \cdot \overline{j}$. Следовательно, $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = 3 \cdot 2 \cdot \sin 90^0 = 6$

Определим направление вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ на оси аппликат. С конца вектора $\bar{c}$ мы видим кратчайший поворот φ от вектора $\bar{a} = 3 \cdot \bar{i}$ к вектору $\bar{b} = 2 \cdot \bar{j}$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Значит, вектор $\bar{c}$ направлен вверх по оси OZ и равен $\bar{c} = 6 \cdot \bar{k}$.

Направление векторного произведение $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ можно также найти по правилу правого буравчика: его рукоятку вращаем кратчайшим поворотом из положения вектора $\bar{a}$ в положение $\bar{b}$. Поступательное движение буравчика укажет направление векторного произведения $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Пример 2.

Вычислить векторное произведение $\overline{a}\times\overline{b}$, если $\overline{a}=(2;1;0)$, $\overline{b}=(1;3;\ -1)$.

Решение. Векторное произведение вычислим с помощью (символического) определителя третьего порядка; в его первой строке записаны орты, а остальные строки - проекции перемножаемых векторов:

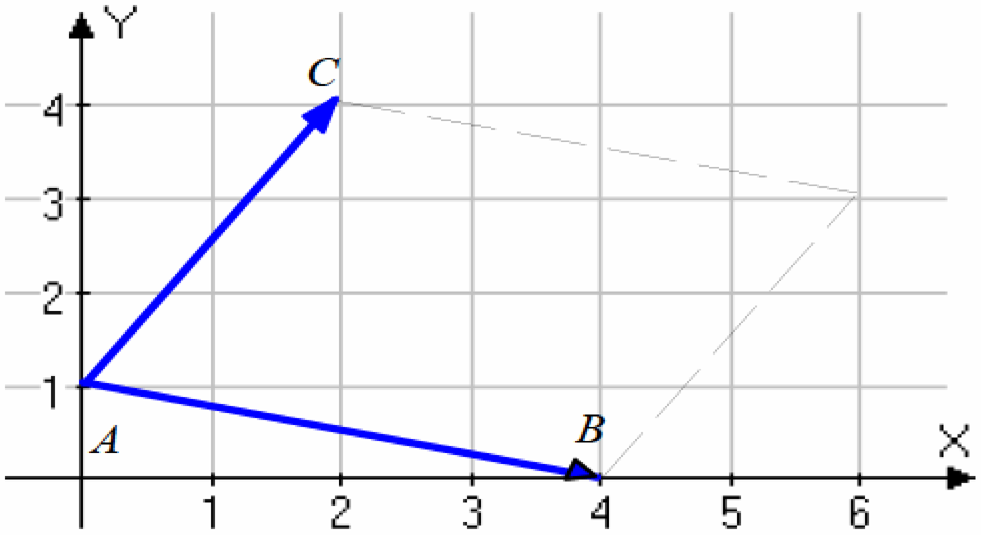
$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-\overline{i}+2\cdot\overline{j}+5\cdot\overline{k}\ \Rightarrow\ \overline{a}\times\overline{b}=(-1;2;5).$$

Произведем контроль: найденный вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}=(-1;2;5)$ перпендикулярен (ортогонален) векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Значит, скалярные произведения $\overline{c}\cdot\overline{a}$, $\overline{c}\cdot\overline{b}$ равны нулю. Например: $\overline{c}\cdot\overline{a}=(-1)\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 0=0$.

Пример 3.

Вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, где $A(0;1)$, $B(4;0)$, $C(2;4)$.

Решение. Построим параллелограмм на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$



Находим вектора: $\overline{AB} = B(4;0) - A(0;1) = (4;-1)$; $\overline{AC} = C(2;4) - A(0;1) = (2;3)$

Вычислим векторное произведение двумерных векторов, считая, что их аппликата $z = 0$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot \bar{k} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = (0;0;14).$$

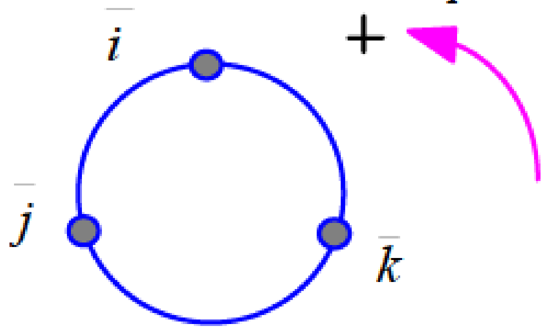
Воспользуемся геометрически смыслом модуля векторного произведения.

Площадь параллелограмма $S = \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = 14$.

Пример 4.

Выполнить действия: $2\cdot\bar{i}\cdot\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+3\bar{j}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+4\cdot\bar{k}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)+\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)\cdot\bar{i}$

Решение. Расположим орты в положительном направлении обхода окружности. Это мнемоническое правило помогает находить векторное произведение различных орт.



Векторное произведение двух орт равно третьему орту, взятому со знаком +, если от первого сомножителя мы передвигаемся ко второму по окружности в положительном направлении, иначе берем знак "минус". Например, $\bar{i}\times\bar{j}=+\bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}$.

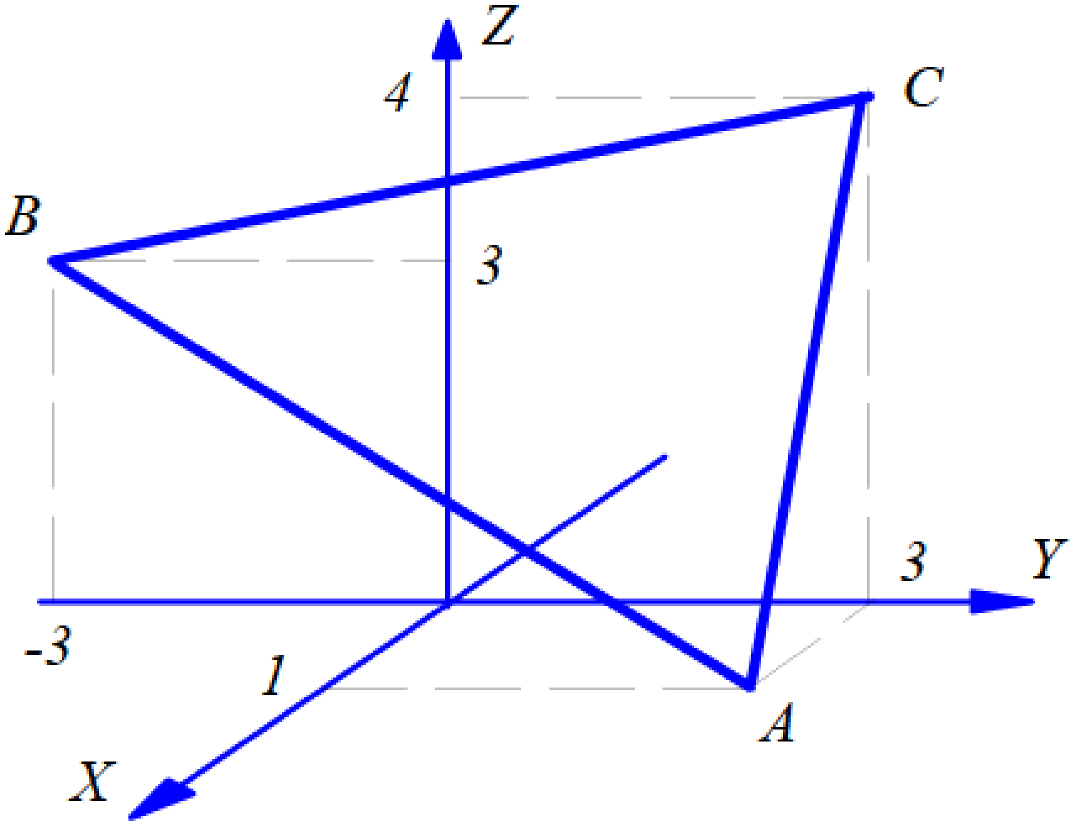
Отсюда

$$2\cdot\bar{i}\cdot\left(\bar{j}\times\bar{k}\right)+3\bar{j}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{k}\right)+4\cdot\bar{k}\cdot\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)+\left(\bar{i}\times\bar{j}\right)\cdot\bar{i}=2\cdot\bar{i}\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}\cdot\left(-\bar{j}\right)+4\cdot\bar{k}\cdot\bar{k}+\bar{k}\cdot\bar{i}=$$

$2\cdot1-3\cdot1+4\cdot1+0=3$. Ответ. 3.

Пример 5.

Найти площадь и высоту CD треугольника ABC, если $A(1;3;0)$, $B(0;-3;3)$, $C(0;3;4)$



Решение. Находим вектора: $\overline{AB} = B(0;-3;3) - A(1;3;0) = (-1;-6;3)$;

$\overline{AC} = C(0;3;4) - A(1;3;0) = (-1;0;4)$.

Вычислим векторное произведение двумерных векторов, считая, что их аппликата $z = 0$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -24 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 6 \cdot \bar{k} = (-24; 1; -6)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (-24; 1; -6) \Rightarrow \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{613} \approx 24{,}8$$

Площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{613} \approx 12{,}4$

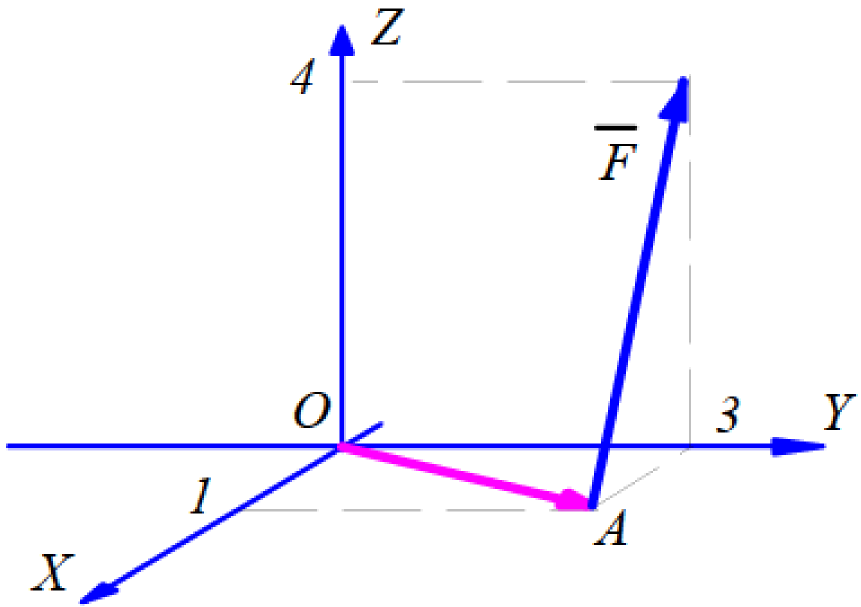
Высота $h = CD$ находится из другой формулы площади $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h \Rightarrow h = \frac{2 \cdot S}{AB}$

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{46} \approx 6{,}78; \quad h = \frac{2 \cdot S}{AB} = \frac{2 \cdot 12{,}4}{6{,}78} = 3{,}65$$

Пример 6.

Найти момент $\overline{M} = \overline{M}_o\left(\overline{F}\right)$ силы $\overline{F} = (-1;0;4)$ относительно начала координат O, если известно, что сила $\overline{F}$ приложена к точке $A(1;\,3;\,0)$. Найти модуль момента силы и направляющие косинусы момента силы.

Решение. Сделаем чертеж. Построим вектор-рычаг $\overline{OA} = (1;\,3;\,0)$ и силу $\overline{F} = (-1;0;4)$, приложенную $A(1;\,3;\,0)$.



Находим момент силы согласно формуле

$$\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=12\cdot\bar{i}-4\cdot\bar{j}+3\cdot\bar{k}=(12;-4;3)$$

Вычислим модуль момента:

$$\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}=(12;-4;3)\Rightarrow M=\left|\overline{OA}\times\overline{F}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{12^2+(-4)^2+3^2}=13$$

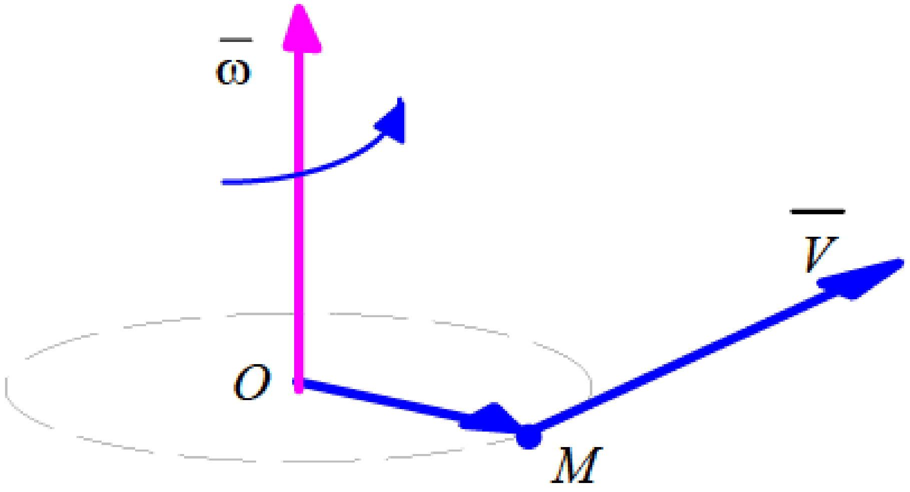
Направляющие косинусы момента

$$\cos\alpha=\frac{M_x}{M}=\frac{12}{13};\ \cos\beta=\frac{M_y}{M}=-\frac{4}{13};\ \cos\gamma=\frac{M_z}{M}=\frac{3}{13}$$

Пример 7.

Точка M движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\overline{\omega}=2\cdot\overline{i}+3\cdot\overline{j}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти скорость $\overline{V}$ этой точки в момент, когда $x=1$, $y=-2$, $z=1$.

Решение. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ перпендикулярен к плоскости окружности и его направление определяется по правилу правого буравчика при вращении его рукоятки в сторону скорости $\overline{V}$. Применим формулу $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{OM}$, где $\overline{OM}=(1;\,-2;1)$ - радиус-вектор точки M.



Запишем векторное произведение:

$$\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{OM}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\cdot\overline{i}-2\cdot\overline{j}-7\cdot\overline{k}=(3;-2;-7)$$