1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Основные определения.

1.2. Свойства неопределенного интеграла.

1.3. Таблица интегралов.

1.1. Основные определения

Определение

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и

$$\boxed{F'(x) = f(x).}$$

Примеры

$F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$, $(-\infty, +\infty)$.

$F(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $(-\infty, +\infty)$.

$F(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(0, +\infty)$.

Теорема

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на (a,b),

то $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – некоторая константа.

Доказательство

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \Rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \Rightarrow$$
$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Вывод

Если $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$ на интервале (a,b), то $\Phi(x) = F(x) + C$ – также первообразная.

Определение

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на интервале (a,b).

Обозначение

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

Замечание

Так как $F'(x) = f(x)$, $d(F(x)+C) = (F(x)+C)' dx = F'(x)dx = f(x)dx \Rightarrow$

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.}$$

1.2. Свойства неопределенного интеграла

1°. $dF(x) = f(x)dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3°. $\int [Cf(x)]dx = C\int f(x)dx$.

4°. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

1.3. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\forall \alpha \neq -1)$.

3. $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

   $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C,\ a \neq 0.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,\ |x| > |a|,\ a \neq 0.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,\ a \neq 0.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0.$

14. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

15. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Здесь 11, 12 – формулы «длинного» логарифма, 9 – формула «высокого» логарифма.

2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих простейшие способы интегрирования.

Пример

Найти интеграл $\int x^{100} dx.$

Решение

Используя табличную формулу $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, получим

$$\int x^{100} dx = \frac{x^{101}}{101} + C\,.$$

Пример

Найти интеграл $\int a^{100} da.$

Решение

В отличие от предыдущего примера изменилось обозначение переменной интегрирования (выражение, стоящее под знаком дифференциала). Соответственно изменяется результат

$$\int a^{100} da = \frac{a^{101}}{101} + C\,.$$

Аналогично $\int (\sin x)^{100} d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{101}}{101} + C.$

Пример

Найти интеграл $\int x^{100} da.$

Решение

Подынтегральная функция x^{100} относительно переменной a является константой и может быть вынесена за знак интеграла

$$\int x^{100} da = x^{100} \int 1 da = x^{100} \cdot a + C.$$

Если интеграл не является табличным и использование свойств не приводит к желаемому результату, как, например, в случае

$\int\left((\sin x)^{100}+\cos x\right)dx$, применяются специальные методы интегрирования. Рассмотрим первый из них – *метод замены переменной.*

Теорема

Если

1) $x=\varphi(t)$ и $x'=\varphi'(t)$ непрерывны;

2) $\exists t=\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция,

то

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.}$$

Доказательство

Производная левой части: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.

Производная правой части:

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt\right)'_t\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x).$$

Производные левой и правой части совпадают, то есть левая и правая части формулы выражают одно и то же множество первообразных для функции $f(x)$, это означает справедливость доказываемой формулы.

Замечание 1

Формулой замены переменной можно пользоваться «слева направо» (подстановка вместо x новой переменной):

$$\int f(x)dx=\begin{bmatrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{bmatrix}=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

и «справа налево» (подведение новой переменной под знак дифференциала):

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=\left[\varphi'(x)\,dx=d\varphi\right]=\int g(\varphi)\,d\varphi.$$

Замечание 2

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Примеры

Найти интегралы.

1. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ с использованием замены переменной (подстановки) $x = t^2$.

Решение

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = \left(t^2\right)' dt = 2t\ dt \end{bmatrix} = \int \frac{2t}{1+t}dt = 2\int \frac{t}{1+t}dt =$$

$$= 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\int 1\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt\right) =$$

$$= \left[d(t+1) = dt\right] = 2\left(t + \int \frac{1}{1+t}\,d(t+1)\right) = 2\left(t + \ln|t+1|\right) + C.$$

2. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$.

Решение

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left[x = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)'\right] = \int \frac{\frac{1}{2}\overbrace{\left(x^2+1\right)' dx}^{d(x^2+1)}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$$

$$= \left[t = x^2+1\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

3. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\, dx$.

Решение

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \overbrace{\cos x\, dx}^{(\sin x)' dx} = \int \sqrt{\sin x} \cdot d \sin x =$$

$$= \left[t = \sin x\right] = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

3. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Рассмотрим $d(uv)=(uv)'dx=(u'v+v'u)dx=u'vdx+v'udx=vdu+udv$.

Таким образом, $d(uv)=udv+vdu$. Почленное интегрирование последнего равенства приводит к формуле интегрирования по частям

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu \Rightarrow \boxed{\int udv=uv-\int vdu\,.}$$

Примеры

Найти интегралы.

1. $\int x\sin x\,dx$.

Решение

$$\int x\sin x\,dx=\begin{bmatrix} u=x,\ dv=\sin x\,dx \\ du=dx,\ v=-\cos x\end{bmatrix}=$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

2. $\int arctg\,x\,dx$.

Решение

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x,\ dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2},\ v=x\end{bmatrix}=$$
$$=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\,.$$

Замечание

Формулу интегрирования по частям можно применять несколько раз.

Пример

Найти интеграл $\int e^x\cos x\,dx$.

Решение

$$\int e^x\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=e^x,\ dv=\cos x\,dx \\ du=e^xdx,\ v=\sin x\end{bmatrix}=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^x,\ dv=\sin x\,dx \\ du=e^xdx, v=-\cos x\end{bmatrix}=e^x\sin x-\left(-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\right)=$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Обозначим $J = \int e^x \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad J = e^x(\sin x + \cos x) - J \quad \Rightarrow$

$$2J = e^x(\sin x + \cos x).$$

$$J = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Метод интегрирования по частям используется для нахождения интегралов от произведения функций различных типов:

– многочлен $P_n(x)$,

– тригонометрические и обратные тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$,

– показательная функция a^x, в том числе e^x,

– логарифмическая функция $\log_a x$.

Например, $\int (x^3+1)\cos x\, dx$, $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$, $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$, $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}dx$, $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

На практике часто встречается интеграл $\int P_n(x)\, f(x)\,dx$, где $f(x)$ – тригонометрическая, показательная или логарифмическая функция. Выясним, какие из функций $f(x)$ при использовании метода интегрирования по частям принимать за u, а какие относить к dv.

Для простоты рассуждений примем $P_n(x) = x$.

1. $f(x)$: $\sin x$, $\cos x$.

В примере 1 использовалось следующее разделение на u и dv:

$$\int x \sin x\, dx = \int \underset{u}{x}\, d\underset{v}{(-\cos x)}.$$

В противном случае, при $u = \sin x$, формула интегрирования по частям приводит к более сложному интегралу $\int x^2 \cos x\, dx$.

Такой подход применим и к функциям $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, как правило, в четной степени.

Пример

Вычислить интеграл $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Решение

$$\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{x}{\cos^2 x} - x \right) dx = \int \frac{x\, dx}{\cos^2 x} - \int x\, dx .$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл:

$$\int x\,\overset{(\operatorname{tg} x)' dx}{\frac{dx}{\cos^2 x}} = \int \overset{u}{x}\, d(\overset{v}{\operatorname{tg} x}) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= x \operatorname{tg} x - \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = x \operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C_1 .$$

Тогда исходный интеграл

$$\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx = x \operatorname{tg} x - \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C .$$

2. $f(x)$: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Разделяя подынтегральную функцию на произведение $u \cdot dv$, примем $u = f(x)$, $dv = P_n(x) dx$.

При другом варианте выбора $dv = f(x) dx$ сталкиваемся со сложностью в определении функции v (ее производная должна быть равной обратной тригонометрической функции).

3. $f(x)$: a^x.

Пусть $a=e$:

$$\int xe^x\,dx=\int \overset{u}{x}\,d\left(\overset{v}{e^x}\right)=x e^x-\int e^x\,dx=x e^x-e^x+C.$$

Альтернативное разложение подынтегрального выражения на множители u и dv приведет к усложнению интеграла (проверьте).

4. $f(x)$: $\log_a x$.

Пусть $a=e$:

$$\int x\ln x\,dx=\int \overset{u}{\ln x}\,d\left(\overset{v}{\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\,d\ln x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Отнесение функции $f(x)$ к u или dv для интеграла $\int P_n(x)\,f(x)\,dx$ приведено в таблице.

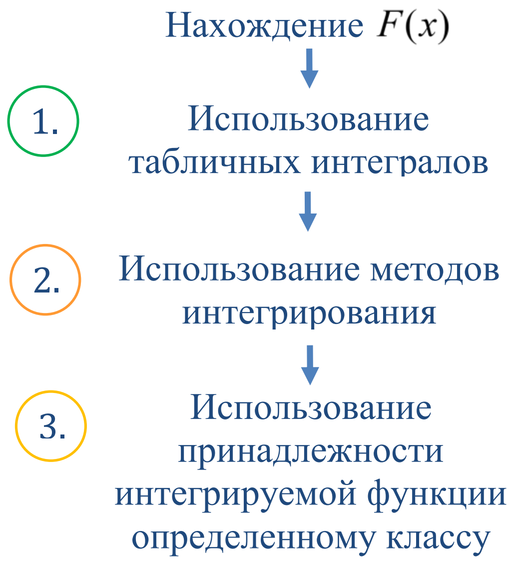
$u=f(x)$	$u=P_n(x)$
$\arcsin x$	$\sin x$
$\arccos x$	$\cos x$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathrm{tg}\, x$ (после преобразований)
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$ (после преобразований)
$\log_a x$	a^x

4. КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. Классы интегрируемых функций в вычислении неопределенного интеграла

Выбор способа для нахождения первообразной можно представить в виде следующей условной схемы анализа подынтегрального выражения (переход к следующему шагу требуется в случае нерезультативности рассматриваемого действия).

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$



Более точно, на третьем шаге также могут использоваться методы интегрирования, но с привязкой к определенному классу функций (возможно, оказавшиеся не очевидными на втором этапе анализа).

Далее мы рассмотрим следующие классы интегрируемых функций.

Классы интегрируемых функций

Дробно-рациональные функции	Тригонометрические функции	Иррациональные функции

4.2. Интегрирование дробно-рациональных функций

Интегрирование дробно-рациональных функций

Интегрирование простейших дробей	Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование простейших дробей

Напомним, что к простейшим относятся дроби вида

$$\frac{A}{x-a}, \tag{I}$$

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \tag{II}$$

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \tag{III}$$

$$\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \tag{IV}$$

где A, M, N, a, p, q – действительные константы,

n – натуральное число, $n>1$,

$p^2-4q<0$.

Приведем описание последовательности действий при интегрировании каждой из простейших дробей.

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

$$\boxed{\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.}$$

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$= \frac{A}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$.

$$\boxed{\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.}$$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left[(x^2+px+q)' = 2x+p \right] = \int \frac{?(2x+p)+?}{x^2+px+q} dx =$

$\int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + J$.

$J = \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{array}{c} x^2+px+q = \\ \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \end{array} \right] = \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2} \right)}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + A^2} =$

$= \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{A} + C$.

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.}$$

IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n} dx =$

$= \frac{M}{2} \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + I$.

$$I=\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\left[\begin{array}{c}\text{заменим } t=x+\frac{p}{2},\\ a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\end{array}\right]=\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=$$

$$=\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n,\text{ где } I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}.$$

Найдем I_n

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\left[\begin{array}{c}u=\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n},\ dv=dt\\ du=\frac{-n2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}},\ v=t\end{array}\right]=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{\left(t^2+a^2\right)-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}.$$

Имеем

$$I_n=\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}.$$

$$\boxed{I_{n+1}=\frac{t}{2na^2\left(t^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n}$$

– ***рекуррентная*** (возвратная) формула с глубиной рекурсии, равной 1.

$$\boxed{I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.}$$

Пример

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)}-?$$

Решение

$$I_1-?\ A=2,\ I_1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

$$I_2-?\ n=1,\ I_2=\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

$$I_3-?\ n=2,\ I_3=\frac{x}{16\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{16}\left(\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим рациональную дробь $\dfrac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}$.

$\int \dfrac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}dx$ – ?

Этапы интегрирования:

1. Выделение целой части, если дробь неправильная

$$\frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)} = Q_l(x) + \frac{R_p(x)}{\varphi_m(x)},$$

где $\dfrac{R_p(x)}{\varphi_m(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2. Разложение дроби $\dfrac{R_p(x)}{\varphi_m(x)}$ на сумму простейших.

3. Интегрирование суммы

$$\int \frac{f_n(x)}{\varphi_m(x)}dx = \int Q_l(x)dx + \int \frac{A_1}{(x-a)}dx + \ldots + \int \frac{B_t x + C_t}{\left(x^2 + px + q\right)^t}dx.$$

Интеграл от рациональной дроби всегда выражается через элементарные функции: рациональные дроби, арктангенсы и натуральные логарифмы.

Пример 1

Найти интеграл $\int \dfrac{xdx}{\left(x^2-1\right)(x-2)}$.

Решение

$\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)(x-2)}$ – правильная дробь.

$$\frac{x}{\left(x^2-1\right)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

По свойствам линейности

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

Пример 2

Найти интеграл $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$.

Решение

$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ – неправильная дробь.

1. Выделение целой части

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

2. Разложение правильной дроби на сумму простейших

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

3. Интегрирование суммы

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + 2\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1. Интегралы, содержащие произведение тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

5.2. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx$.

5.3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

5.4. Примеры решений.

5.1. Интегралы, содержащие произведение тригонометрических функций вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

1. Пусть n и m – ***четные, неотрицательные целые*** числа.

Используется прием *понижения степени* переходом к двойному аргументу.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2. Пусть хотя бы одно из чисел n и m – ***нечетное положительное***.

Прием нахождения интеграла – от нечетной степени отделяется один сомножитель и заносится под знак дифференциала, а оставшаяся подынтегральная функция выражается через функцию, стоящую под знаком дифференциала, по формуле

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1.}$$

Пример 1

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x\, dx = -\int \sin^2 x \cos^5 x\, d\cos x =$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^5 x d\cos x=\int\left(\cos^7 x-\cos^5 x\right)d\cos x=$$
$$=\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C.$$

Пример 2

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x\,dx}{\cos^5 x}=-\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x}{\cos^5 x}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

3. Пусть n и m таковы, что $\boxed{m+n=-2k}$, где $k\in N$.

Прием – используется подстановка $\boxed{\operatorname{tg} x=t}$ ($\boxed{\operatorname{ctg} x=t}$), с привлечением формул: $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(1+\operatorname{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Пример

$$\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}=\begin{bmatrix}3-5=-2\\ \operatorname{tg} x=t\end{bmatrix}=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\operatorname{tg}^3 x\,d\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C.$$

5.2. Интегралы вида $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$

Прием – переход к сумме функций и сумме интегралов:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha x\sin\beta x&=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right),\\ \sin\alpha x\cos\beta x&=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right),\\ \cos\alpha x\cos\beta x&=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right).\end{aligned}}$$

5.3. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Здесь $R(\sin x,\cos x)=R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных $u=\sin x$, $v=\cos x$.

Прием – универсальная тригонометрическая подстановка

$$\boxed{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.}$$

Рассмотрим

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Формула универсальной тригонометрической подстановки имеет вид

$$\boxed{\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}},\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Таким образом, универсальная тригонометрическая подстановка сводит исходный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одной переменной t.

Пример

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left[\begin{array}{c}t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{2\left(1+t^2\right)dt}{\left(1+t^2\right)2t}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Замечание

Если подынтегральная функция $R(\sin x,\cos x)$ является *четной* функцией аргументов $\sin x$ и $\cos x$ $\left(R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)\right)$, более эффективной является подстановка

$$\boxed{t=\operatorname{tg}x.}$$

Пример

$$\int\frac{dx}{A^2\sin^2 x+B^2\cos^2 x}-?$$

Решение

$$\int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(A^2 tg^2 x + B^2\right)} = \frac{1}{A^2}\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(tg^2 x + \frac{B^2}{A^2}\right)} =$$

$$= \left[t = \operatorname{tg} x\right] = \frac{1}{A^2}\int \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{B^2}{A^2}\right)} = \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1}{B/A}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{B/A} + C =$$

$$= \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\frac{A\operatorname{tg} x}{B} + C.$$

Рассмотренные приемы интегрирования выражений, содержащих тригонометрические функции представлены на схеме.

Интегрирование тригонометрических функций

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

$m = 2k_1$ и $n = 2k_2$, $k_1, k_2 \in Z$, $k_1, k_2 \geq 0$

Понижение степени подынтегральной функции

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$m = 2k+1$, или $n = 2k+1$, $k \in N$

Подстановка:

$t = \cos x$, или $t = \sin x$

Для перехода в подынтегральной функции к новой переменной используется тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$m + n = -2k$, $k \in N$

Подстановка:

$t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$\int R(\sin x, \cos x)dx$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

Подстановка:

$t = \operatorname{tg} x$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Подстановка:

$t = \cos x$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Подстановка:

$t = \sin x$

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$

Переход к интегралам $\int \sin(ax)\,dx$, $\int \cos(bx)\,dx$ с использованием формул:

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$$

$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x)$$

$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x)$$

5.4. Примеры решений

Пример 1

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\sin x\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{\cos x}}d\cos x = -\int (\cos x)^{-\frac{1}{2}} d\cos x +$$

$$+\int (\cos x)^{\frac{3}{2}} d\cos x = -2(\cos x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}(\cos x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

Пример 2

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2 \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x\cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Пример 3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x\sin x}} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sqrt{\cos^3 x\sin x}}{\cos^2 x}} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

Пример 4

$$\int \sin 3x\cos^2 5x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right)\sin 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x\sin 3x\,dx = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{4}\int (\sin 13x - \sin 7x)dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{28}\cos 7x - \frac{1}{52}\cos 13x + C.$$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

6.1. Линейные иррациональности.

6.2. Дробно-линейные иррациональности.

6.3. Квадратичные иррациональности.

6.1. Линейные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

где $R(x, y, z, \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов,

$(ax+b)^{\frac{m_i}{n_i}}$ – *линейные иррациональности* – корни степени n_i (m_i, n_i – целые числа).

Пусть S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, $\frac{m_k}{n_k}$, тогда подстановка

$$\boxed{t^S = ax+b}$$

сводит указанный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одного аргумента t.

Пример

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}+1}dx = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, s=4, t^4 = 2x-1, x = \frac{t^4+1}{2}, dx = 2t^3dt \right] =$$

$$= \int \frac{t^2 2t^3 dt}{t^3+1} = 2\int \frac{t^2\left(t^3+1-1\right)}{t^3+1}dt = 2\int t^2 dt - 2\int \frac{t^2dt}{t^3+1} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t^3+1\right)}{t^3+1} =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\ln\left|(2x-1)^{\frac{3}{4}}+1\right| + C.$$

6.2. Дробно-линейные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где $R(x, y, \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов,

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}}$ – *дробно-линейная иррациональность*.

Подстановка

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^S,}$$

где S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, $\frac{m_k}{n_k}$,

сводит указанный интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции одного аргумента t (корни исчезают).

6.3. Квадратичные иррациональности

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где $\sqrt{ax^2+bx+c}$ – квадратичная иррациональность,

$R(u, v)$ – дробно-рациональная функция своих аргументов.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и заменой

$$\boxed{u = x + \frac{b}{2a}}$$

исходный интеграл сводится к одному из следующих трех типов, которые рационализируются с помощью соответствующих тригонометрических или гиперболических подстановок

1) $\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right)du \Rightarrow \boxed{u = l\sin t}$ или $\boxed{u = l\,\mathrm{th}\,t}$;

2) $\int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right)du \Rightarrow \boxed{u = l\,\mathrm{tg}\,t}$ или $\boxed{u = l\,\mathrm{sh}\,t}$;

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2 - l^2}\right) du \Rightarrow \boxed{u = \dfrac{l}{\cos t}}$ или $\boxed{u = l \operatorname{ch} t}$.

В результате получается интеграл вида

$$\boxed{\int R(\sin t, \cos t)\, dt}.$$

Пример

$$\int \sqrt{5 + 2x - x^2} dx = \int \sqrt{5 - \left(x^2 - 2x\right)} dx = \int \sqrt{5 - (x-1)^2 + 1}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{6 - (x-1)^2} dx = [x - 1 = u,\ dx = du] = \int \sqrt{6 - u^2} du =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = \sqrt{6} \sin t \\ du = \sqrt{6} \cos t\, dt,\ t = \arcsin \dfrac{u}{\sqrt{6}} \end{array} \right] = \int \sqrt{6 - 6 \sin^2 t} \sqrt{6} \cos t\, dt = 6 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= 3 \int (1 + \cos 2t) dt = 3t + \frac{3}{2} \sin 2t + C = 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \sin 2 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \sin 2\alpha = 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x-1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{6}} + C =$$

$$= 3 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{x-1}{2} \sqrt{5 + 2x - x^2} + C.$$

Замечание 1

Интеграл $\int \dfrac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ находится как интеграл от простейшей дроби (III).

Замечание 2

Интегралы $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$ и $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ проще найти, применяя метод интегрирования по частям.

Пример

$$\int \sqrt{6+z^2}\,dz = \begin{bmatrix} u=\sqrt{6+z^2},\, dv = dz \\ du = \dfrac{zdz}{\sqrt{6+z^2}},\, v = z \end{bmatrix} = z\sqrt{6+z^2} - \int \frac{z^2dz}{\sqrt{6+z^2}} =$$

$$= z\sqrt{6+z^2} - \int \frac{\left(z^2+6\right)-6}{\sqrt{6+z^2}}dz = z\sqrt{6+z^2} - \int \sqrt{6+z^2}\,dz + 6\ln\left(z+\sqrt{6+z^2}\right),$$

$$\int \sqrt{6+z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{6+z^2} + 3\ln\left(z+\sqrt{6+z^2}\right) + C.$$

Замечание 3

При вычислении интеграла $\int \dfrac{dx}{(Mx+N)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($k=1,2$) эффективна обратная подстановка $\boxed{Mx+N=\dfrac{1}{t}}$.

Интегрирование иррациональных функций

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

Подстановка:

$t^s=ax+b$,

s - общий знаменатель

$\frac{m_1}{n_1},\ \dots,\ \frac{m_k}{n_k}$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Выделение полного квадрата

$u=x+\frac{b}{2a}$

$\int R\left(u,\sqrt{l^2-u^2}\right)du$ | $\int R\left(u,\sqrt{l^2+u^2}\right)du$ | $\int R\left(u,\sqrt{u^2-l^2}\right)du$

Тригонометрические подстановки

$u=l\sin t$ | $u=l\,\mathrm{tg}\,t$ | $u=\frac{l}{\cos t}$

$\to \int R(\sin t,\cos t)\,dt$

Гиперболические подстановки

$u=l\,\mathrm{th}\,t$ | $u=l\,\mathrm{sh}\,t$ | $u=l\,\mathrm{ch}\,t$

$\to \int R(\mathrm{sh}\,t,\mathrm{ch}\,t)\,dt$

Частные случаи

$$\int\frac{(Mx+N)^k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$k=1$: Аналог интегрирования простейшей дроби III

$k=-1,-2$: Подстановка: $t=\frac{1}{Mx+N}$

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

Подстановка:

$t^s=\frac{ax+b}{cx+d}$,

s - общий знаменатель

$\frac{m_1}{n_1},\ \dots,\ \frac{m_k}{n_k}$

В завершение рассмотрения классов интегрируемых функций необходимо отметить, что не все элементарные функции имеют первообразную, являющуюся также элементарной функцией. Например, интегралы

$\int \frac{f(x)}{x^n} dx$, где $n \in \mathrm{N}$, $f(x)$ – одна из функций e^x, $\sin x$, $\cos x$;

$\int R\left(x, \sqrt{P_n(x)}\right) dx$, $n = 3$ или $n = 4$ – *эллиптические интегралы*.

Исследование таких интегралов является отдельным вопросом, не входящим в данный курс.