КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Необходимость введения комплексных чисел

К появлению комплексных чисел привели вполне реальные задачи, например, задача извлечения квадратных корней из отрицательных чисел. Таким образом, возникла задача расширения множества действительных чисел до такой системы чисел, в которой возможно извлечение корней четной степени из отрицательных чисел. При этом представлялось важным сохранить все основные свойства алгебраических операций сложения, вычитания и умножения: коммутативность (перестановочность), ассоциативность (сочетательность), дистрибутивность (распределительное свойство). На такой основе были введены комплексные числа.

До середины XVIII века комплексные числа лишь эпизодически использовали в своих трудах некоторые математики, например, И. Ньютон, Н. Бернулли, А. Клеро. Первое изложение теории комплексных чисел на русском языке принадлежит Л. Эйлеру («Алгебра», Петербург, 1763).

Геометрическая интерпретация комплексных чисел (1799 г. датчанин Каспер Вессель) способствовала их широкому распространению. Использование комплексных чисел, как правило, упрощает вычисления. Комплексные числа являются базовой основой в теории функций комплексного переменного.

С помощью комплексных чисел и функций комплексного переменного можно описать динамику процессов, происходящих в природе, в технике, в экономике и т.д.

К примеру, с конца XIX века стали широко применяться генераторы переменного тока. Для расчета цепей переменного тока оказались непригодными старые методы, разработанные для цепей постоянного тока на основе закона Ома. Эффективный метод расчета цепей переменного тока основан на применении комплексных чисел.

В настоящее время комплексные числа и функции комплексного переменного находят широкое применение в картографии, электротехнике, аэро- и гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике, теории упругости, в расчетах различных конструкций на прочность, в квантовой механике, при изучении движения спутников.

2. Комплексные числа в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация

Наиболее просто, ясно и логически безупречно разъяснил понятие комплексного числа в 1833 г. ирландский математик У.Р. Гамильтон: ***комплексные числа – это всевозможные упорядоченные пары действительных чисел***. Существует много способов алгебраической записи комплексных чисел.

$$(x, y), \quad x * y, \quad \boxed{\mathbf{x}}\boxed{\mathbf{y}}\,.$$

В математике принята ***алгебраическая форма комплексного числа***

$$z = x + iy, \tag{2.1}$$

$x, \ y$ – вещественные числа;

$$i = \sqrt{-1}, \ \ i^2 = -1. \tag{2.2}$$

Число i – ***мнимая единица*** (символ i введен Л. Эйлером), $x = Re\, z$ – ***вещественная часть***, $y = Im\, z$ – ***мнимая часть*** комплексного числа z.

Обозначение множества комплексных чисел:

$$C = \{z = x + iy, \ x, \, y \in R, \ i^2 = -1\}.$$

Если $y = 0$, то $z = x$, то есть множество вещественных чисел есть подмножество множества комплексных чисел: $R \subset C$.

Если $x = 0$, то число $z = iy$ называют ***чисто мнимым***.

Комплексные числа считают ***равными*** только в том случае, если их вещественные и мнимые части совпадают.

Комплексное число $z = x + iy$ считается равным ***нулю*** только в том случае, если его действительная и мнимая части равны нулю: $x = 0, \, y = 0$.

От попыток упорядочить множество комплексных чисел C пришлось отказаться из-за нарушения важного свойства, справедливого в области вещественных чисел: если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$. Для двух комплексных чисел z_1 и z_2 нельзя сказать, какое из них больше.

Числа, отличающиеся знаками мнимой части, называются ***комплексно-сопряженными*** и обозначаются:

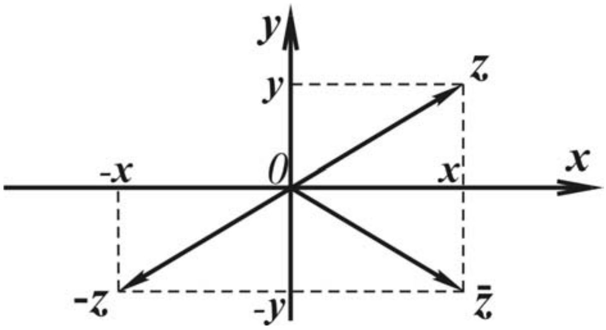
$$z = x + iy, \ \ \bar{z} = x - iy. \tag{2.3}$$

Противоположные числа:

$$z = x + iy, \ \ -z = -x - iy. \tag{2.4}$$

Геометрически комплексное число z изображается на плоскости либо точкой $(x; y)$, либо радиус-вектором этой точки (рис. 1). Вещественная часть $x = Re z$ изображается на оси *0x*, мнимая часть $y = Im\, z$ – на оси *0y*.

Ось $0x$ в этом случае называют ***вещественной***, ось $0y$ – ***мнимой***. Плоскость, которая служит для изображения комплексных чисел, называется ***комплексной плоскостью***. Комплексно-сопряженные числа изображаются векторами (точками), симметричными относительно оси $0x$, а взаимно-противоположные – векторами (точками), симметричными относительно начала координат.



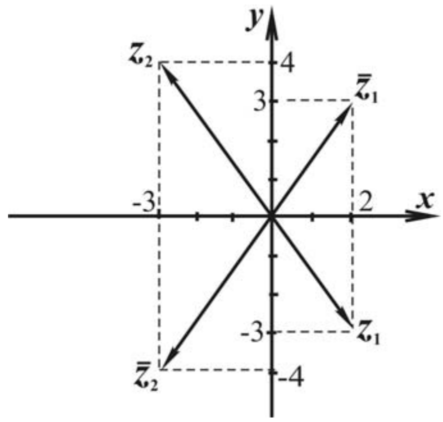


Рис. 1 **Рис. 2**

Пример 2.1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -3 + 4i.$

Определить вещественные и мнимые части чисел $z_1,\ z_2$. Записать $\bar{z}_1, \bar{z}_2, -z_1, -z_2$ и изобразить все числа на комплексной плоскости.

Решение. Для числа $z_1 = 2 - 3i$ вещественная часть $Re\, z_1 = 2$, мнимая часть $\operatorname{Im} z_1 = -3$; аналогично $\operatorname{Re} z_2 = -3$, $\operatorname{Im} z_2 = 4$; $\bar{z}_1 = 2 + 3i$, $\bar{z}_2 = -3 - 4i$ (рис. 2); $-z_1 = -2 + 3i$, $-z_2 = 3 - 4i$ (предлагаем читателю изобразить геометрически самостоятельно).

Пример 2.2. Найти действительные числа x, y из равенства

$$(2 + i)x - (3 - 2i)y = 13 - (3 + i)x - (y - 1)i.$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в равенстве, приводя обе части к виду $a + bi$:

$$(2x - 3y) + (x + 2y)i = (13 - 3x) + (-x - y + 1)i,\ x,\ y \in R.$$

Воспользуемся определением равенства комплексных чисел и приравняем соответственно вещественные и мнимые части слева и справа. В результате получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 - 3x, \\ x + 2y = -x - y + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 3y = 13, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

Складывая уравнения последней системы, получим $7x = 14$; $x = 2$; выражая y через x, например, из второго уравнения, найдем $y = \frac{1-2x}{3}$; $y = -1$.

Ответ: $x = 2,\ y = -1$.

Пример 2.3. Найти чисто мнимые числа x, y из равенства

$$(2x - 3y) + (x + 2y)i = -18 - 3x - (x + y - 3)i.$$

Решение. Пусть $x = x_1 i,\ y = y_1 i$ – чисто мнимые числа, $x_1,\ y_1 \in R$. Тогда равенство перепишется в виде

$$(2x_1 - 3y_1)i + (x_1 + 2y_1)i^2 = -18 - 3x_1 i - (x_1 + y_1)i^2 + 3i.$$

Учитывая $i^2 = -1$, получаем

$$(2x_1 - 3y_1)i + (-x_1 - 2y_1) = (3 - 3x_1)i + (-18 + x_1 + y_1),$$

откуда $\begin{cases} 2x_1 - 3y_1 = 3 - 3x_1, \\ -x_1 - 2y_1 = -18 + x_1 + y_1, \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1 - 3y_1 = 3, \\ 2x_1 + 3y_1 = 18. \end{cases}$

Складывая уравнения последней системы, получим $7x_1 = 21$; $x_1 = 3$; выражая y_1 из любого уравнения системы через x_1, найдем $y_1 = 4$. Таким образом, $x = 3i$; $y = 4i$.

Ответ: $x = 3i,\ y = 4i$.

Пример 2.4. Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$ и выяснить связь между корнями.

Решение. Корни приведенного квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$ находим по формуле

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}: \quad z = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4}, \ \ z = -3 \pm 2i.$$

Вывод: квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами при отрицательном дискриминанте имеет два комплексно-сопряженных корня.

Ответ: $z_1 = -3 + 2i,\ \ z_2 = -3 - 2i,\ \ z_2 = \bar{z}_1$.

Пример 2.5. Установить соответствие между квадратными уравнениями и их корнями:

а) $z^2+8z+25=0$; 1) $-2\pm 3i$; 2) $2\pm 3i$;

б) $z^2-8z+25=0$; 3) $2\pm 9i$; 4) $4\pm 3i$;

в) $z^2+4z+13=0$. 5) $-4\pm 3i$; 6) $-4\pm 9i$.

Решение. Решаем данные квадратные уравнения: $z^2+8z+25=0$ $\Leftrightarrow$ $z=-4\pm 3i$, что соответствует ответу 5); $z^2-8z+25=0$ $\Leftrightarrow$ $z=4\pm 3i$, соответствует ответу 4); $z^2+4z+13=0$ $\Leftrightarrow$ $z=-2\pm 3i$, соответствует ответу 1).

Ответ: а) – 5); б) – 4); в) – 1).

Пример 2.6. Решить уравнения:

а) $8z^3+27=0$; б) $16z^4-81=0$; в) $z^4-15z^2-16=0$.

Решение. Для решения уравнений а) и б) используем формулы сокращенного умножения

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),\ a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Приравнивая к нулю каждый сомножитель, получаем корни уравнений:

а) $(2z+3)\left(4z^2-6z+9\right)=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{3}{2};\ z=\dfrac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 9}}{4}=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}\,i}{4}$;

б) $\left(4z^2-9\right)\left(4z^2+9\right)=0 \Leftrightarrow z=\pm\dfrac{3}{2};\ z=\pm\dfrac{3}{2}i$.

Уравнение в) биквадратное. Нетрудно свести его к квадратному уравнению: $z^2=t,\ t^2-15t-16=0\Rightarrow t=-1,\ t=16$, то есть $z^2=-1$, $z^2=16$. Таким образом, корни заданного уравнения: $z=\pm i$, $z=\pm 4$.

Ответ: а) $z=-\dfrac{3}{2},\ z=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}\,i}{4}$; б) $z=\pm\dfrac{3}{2},\ z=\pm\dfrac{3}{2}i$; в) $z=\pm i$; $z=\pm 4$.

Пример 2.7. Установить соответствие между биквадратными уравнениями и их корнями:

а) $z^4-12z^2-64=0$; 1) ± 2; $\pm 4i$; 2) $\pm 2i$; $\pm 3i$;

б) $z^4+12z^2-64=0$; 3) ± 4; $\pm 2i$; 4) ± 3; $\pm 2i$;

в) $z^4+20z^2+64=0$. 5) ± 2; $\pm 3i$; 6) $\pm 2i$; $\pm 4i$.

Решение. Решаем биквадратные уравнения (см. пример 2.6. в))

а) $z^4-12z^2-64=0 \Leftrightarrow z^2=-4$, $z^2=16 \Leftrightarrow z=\pm 2i$, $z=\pm 4$;

б) $z^4+12z^2-64=0 \Leftrightarrow z^2=4$, $z^2=-16 \Leftrightarrow z=\pm 2$, $z=\pm 4i$;

в) $z^4+20z^2+64=0 \Leftrightarrow z^2=-4$, $z^2=-16 \Leftrightarrow z=\pm 2i$, $z=\pm 4i$.

Ответ: а) – 3); б) – 1); в) – 6).

3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Над комплексными числами в алгебраической форме вводятся операции сложения, вычитания, умножения, деления на число, отличное от нуля.

1⁰. ***Сложение (вычитание).*** При сложении (вычитании) комплексных чисел соответственно складываются (вычитаются) вещественные и мнимые части: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2 \quad \Rightarrow$

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2). \tag{3.1}$$

Операции сложения и вычитания можно также сравнить с соответствующими операциями над векторами в координатной форме (рис. 3).

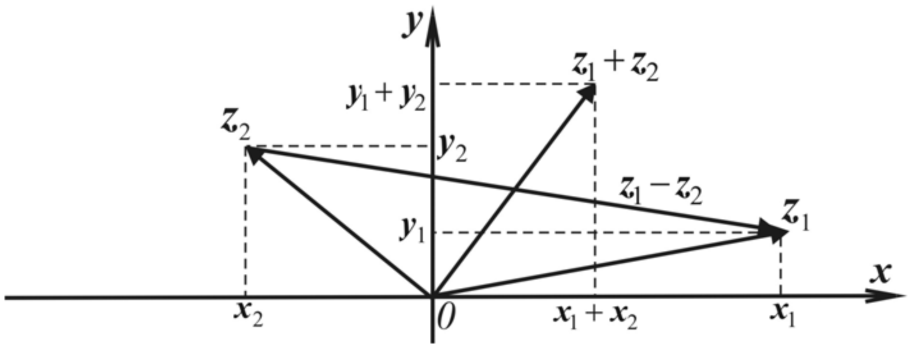


Рис. 3

2⁰. ***Умножение.*** Операция умножения проводится так же, как при действии с многочленами: раскрытие скобок, приведение подобных с заменой $i^2=-1$: $\quad z_1 \cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$,

$$z_1 \cdot z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{3.2}$$

Следствие. Произведение комплексно сопряженных чисел есть вещественное неотрицательное число: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$,

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0; \quad z \cdot \bar{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0; \quad z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0. \qquad (3.3)$$

Из определения операций сложения и умножения вытекают следующие законы:

• *коммутативный (переместительный) закон*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

• *ассоциативный (сочетательный) закон*:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

• *дистрибутивный (распределительный) закон*:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Комплексно-сопряженные числа позволяют ввести метрику в пространстве $C: \sqrt{|z|} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Не вдаваясь в точное понятие, отметим, что метрика, как модуль комплексного числа, с геометрической точки зрения задает длину радиус-вектора точки, изображающей комплексное число на комплексной плоскости.

Замечание. Степени мнимой единицы: i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, …,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = i^2 = -1, \quad i^{4k+3} = i^3 = -i, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

то есть, чтобы найти i^n, достаточно i возвести в степень, показатель которой равен остатку от деления n на 4.

Напомним признак делимости на 4: число делится на 4 только в том случае, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4, или число заканчивается двумя нулями. Например, 136 делится на 4, так как 36: 4=9.

Пример 3.1. Вычислить степени мнимой единицы: i^{135}, i^{196}, i^{210}, i^{257}.

Решение. Используя признак делимости на 4, в показателе степени выделяем ближайшее число, которое делится на 4:

$$i^{135} = i^{136-1} = i^{4\cdot 34} \cdot i^{-1} = \frac{1}{i} = -i \qquad (\text{ иначе } i^{135} = i^{4\cdot 33} \cdot i^3 = i^3 = -i);$$

$$i^{196} = i^{4\cdot 49} = 1; \; i^{210} = i^{4\cdot 52+2} = i^2 = -1; \; i^{257} = i.$$

Ответ: $i^{135} = -i$; $i^{196} = 1$; $i^{210} = -1$; $i^{257} = i$.

3^0. ***Деление.*** Чтобы поделить комплексные числа, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное к знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}, \; z_2 \neq 0. \qquad (3.4)$$

Пример 3.2. Для комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i, \; z_2 = -3 + 4i$ найти:

а) $2z_1 - 3z_2$, б) $z_1 \cdot z_2$, в) $\frac{z_1}{z_2}, \; Re\frac{z_1}{z_2}, \; Im\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. При выполнении операций сложения и умножения комплексных и вещественных чисел раскрываем скобки и приводим подобные.

а) $2z_1 - 3z_2 = 2(2 - 3i) - 3(-3 + 4i) = 4 - 6i + 9 - 12i \Rightarrow$

$2z_1 - 3z_2 = 13 - 18i.$

б) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(-3 + 4i) = -6 + 9i + 8i - 12i^2$.

Приводя подобные после раскрытия скобок, с учетом $i^2 = -1$ получаем $z_1 \cdot z_2 = 6 + 17i.$

в) Воспользуемся правилом деления комплексных чисел (3.4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} = \left\{ z\bar{z} = x^2 + y^2 \right\} = \frac{-6 + 9i - 8i + 12i^2}{9 + 16}.$$

Приводя подобные с заменой $i^2 = -1$, получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-18 + i}{25} = -\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i, \;\; Re\frac{z_1}{z_2} = -\frac{18}{25}, \; Im\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{25}.$$

Ответ: а) $2z_1 - 3z_2 = 13 - 18i$; б) $z_1 \cdot z_2 = 6 + 17i$;

в) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i, \;\; Re\frac{z_1}{z_2} = -\frac{18}{25}, \; Im\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{25}.$

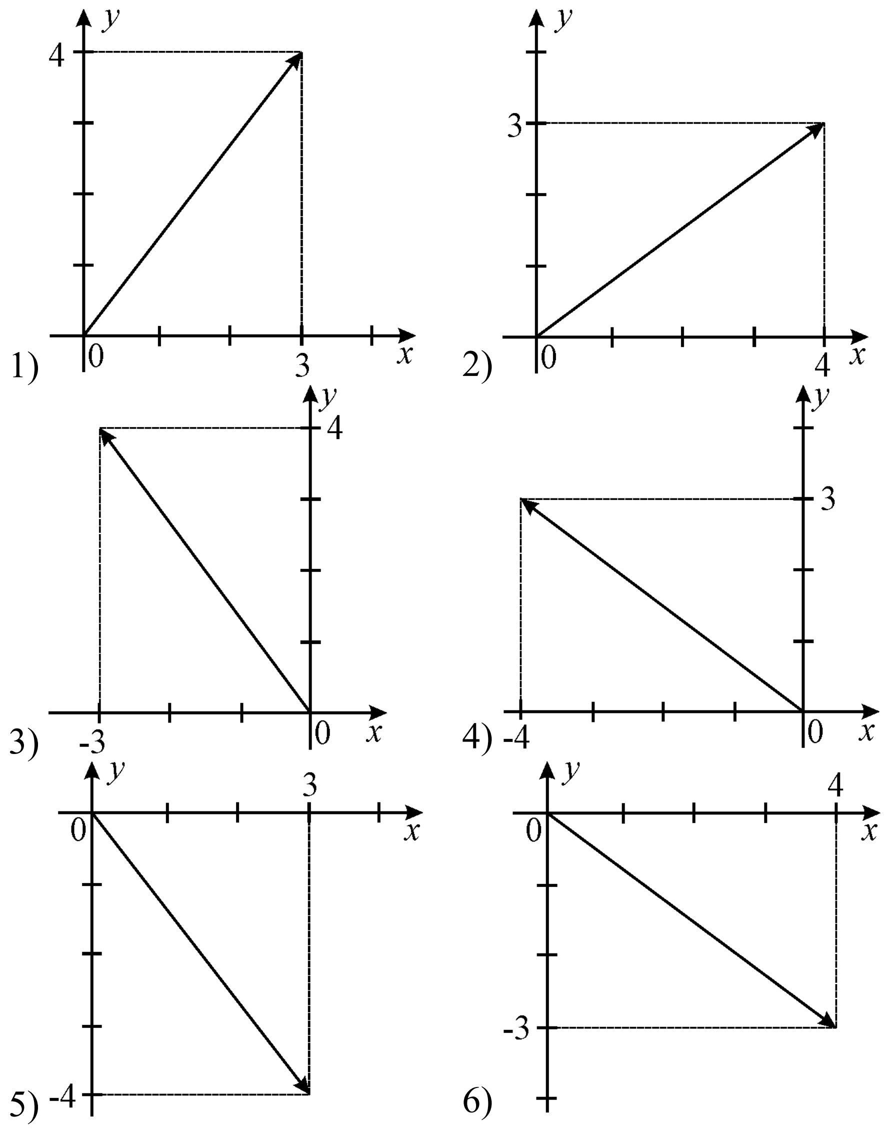
Заметим, что возведение в степень и извлечение корней из комплексных чисел в алгебраической форме затруднительно. В этом случае удобны так называемые тригонометрическая и показательная формы, которые будут рассмотрены ниже.

Пример 3.3. Представить комплексные числа в алгебраической форме, установить соответствие между ними и геометрическими изображениями.

а) $z_1 = (2 - i)(1 + 2i)$

б) $z_2 = (1 + 2i)^2$

в) $z_3 = (2 - i)^2$



Решение. Выполнив указанные действия, получим комплексные числа z_1, z_2, z_3 в алгебраической форме и определим их вещественные и мнимые части:

$$z_1 = (2 - i)(1 + 2i) = 4 + 3i; \quad \operatorname{Re} z_1 = 4, \quad \operatorname{Im} z_1 = 3.$$

$$z_2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i; \quad \operatorname{Re} z_2 = -3, \quad \operatorname{Im} z_2 = 4.$$

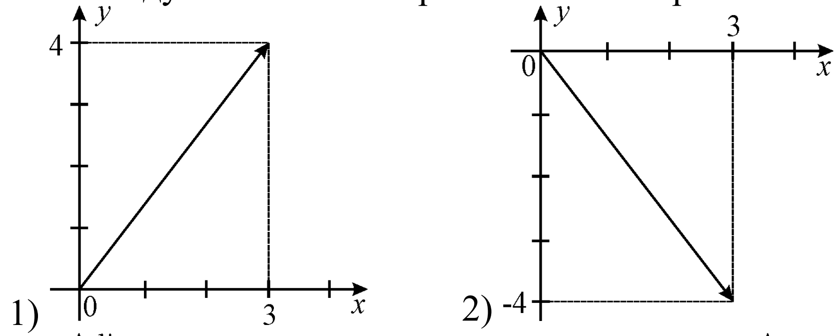
$$z_3 = (2 - i)^2 = 3 - 4i; \quad \operatorname{Re} z_3 = 3, \quad \operatorname{Im} z_3 = -4.$$

Таким образом, z_1 изображено на рис. 2); z_2 – на рис. 3); z_3 – на рис. 5).

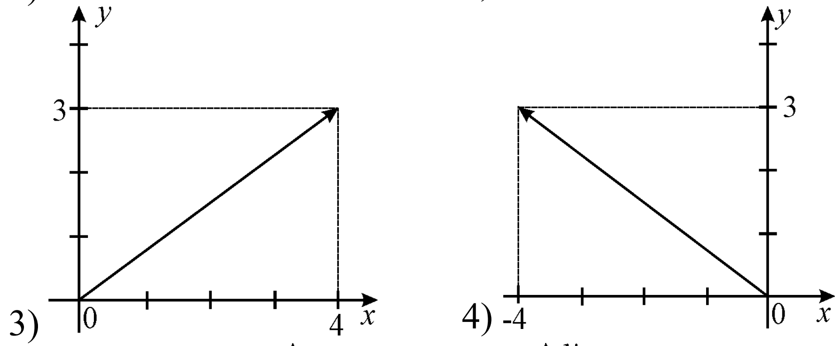
Ответ: а) – 2); б) – 3); в) – 5).

Пример 3.4. Представить комплексные числа в алгебраической форме, установить соответствие между ними и геометрическими изображениями.

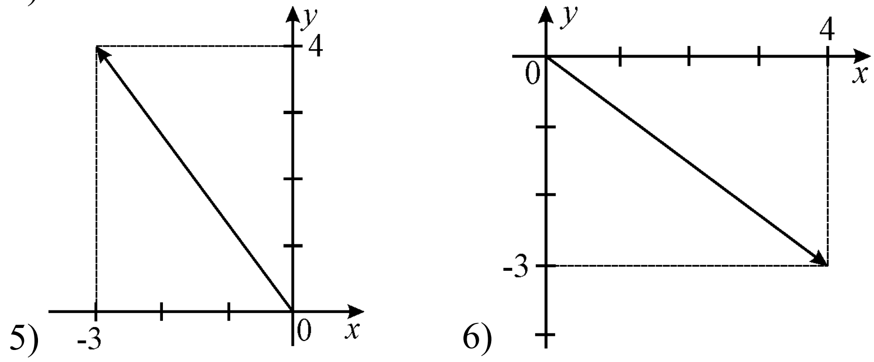
а) $z = \dfrac{25}{3+4i}$



б) $\bar{z}$, $z = \dfrac{25}{3+4i}$



в) $-z$, $z = \dfrac{25}{3+4i}$



Решение. Представим комплексное число z в алгебраической форме, используя правило деления комплексных чисел:

$z = \dfrac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{25(3-4i)}{3^2+4^2}$, $z = 3-4i$, $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -4$, рис. 2).

Тогда $\bar{z} = 3+4i$, $\operatorname{Re}\bar{z} = 3$, $\operatorname{Im}\bar{z} = 4$, рис. 1); $-z = -3+4i$, $\operatorname{Re}(-z) = -3$, $\operatorname{Im}(-z) = 4$, рис. 5).

Ответ: а) – 2); б) – 1); в) – 5).

Пример 3.5. Найти алгебраическую форму противоположного числа $-z$, если комплексное число задано в виде определителя $z = \begin{vmatrix} 5-3i & 2i \\ 1-3i & 2+i \end{vmatrix}$.

Решение. Найдем алгебраическую форму числа z, вычислив определитель второго порядка:

$$z = (5-3i)(2+i) - (1-3i)2i = 10 - 6i + 5i - 3i^2 - 2i + 6i^2.$$

Используя $i^2 = -1$, после приведения подобных получим $z = 7 - 3i$. Тогда противоположное число $-z = -7 + 3i$.

Ответ: $-z = -7 + 3i$.

Пример 3.6. Найти комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ к числу, заданному в виде определителя.

$$z = \begin{vmatrix} 2i & 0 & 4-3i \\ -1+2i & 0 & 2+i \\ 3-i & 1 & 4i \end{vmatrix}.$$

Решение. Для нахождения алгебраической формы числа z воспользуемся правилом Лапласа, разлагая определитель по второму столбцу, в котором только один элемент отличен от нуля:

$$z = -\begin{vmatrix} 2i & 4-3i \\ -1+2i & 2+i \end{vmatrix} = -\left[2i(2+i) - (-1+2i)(4-3i)\right],$$

$$z = -4i - 2i^2 - 4 + 8i + 3i - 6i^2,\ i^2 = -1 \ \Rightarrow\ z = 4 + 7i.$$

Таким образом, комплексно-сопряженное число $\bar{z} = 4 - 7i$.

Ответ: $\bar{z} = 4 - 7i$.

Пример 3.7. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 4-3i & -i \\ 2+3i & z \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } z^2 + \begin{vmatrix} 3-2i & -6 \\ -4i & 8i \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Вычисляем определители в заданных уравнениях и решаем полученные алгебраические уравнения.

а) $z(4-3i) - (2+3i)(-i) = 0$, $z(4-3i) - 2i + 3i^2 = 0$, $i^2 = -1 \ \Leftrightarrow\ z = \dfrac{3+2i}{4-3i}$,

$$z = \frac{(3+2i)(4+3i)}{16+9} = \frac{12 + 8i + 9i + 6i^2}{25} \ \Leftrightarrow\ z = \frac{6+17i}{25}.$$

б) $z^2 + (3-2i)8i - (-4i)(-6) = 0$, $z^2 + 24i - 16i^2 - 24i = 0$, $z^2 = 16i^2$, откуда $z = \pm 4i$.

Ответ: а) $z = \dfrac{6+17i}{25} = 0{,}24 + 0{,}68i$; б) $z = \pm 4i$.

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формулы Эйлера

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа связаны с представлением декартовых координат точки в полярной системе координат (рис. 4).

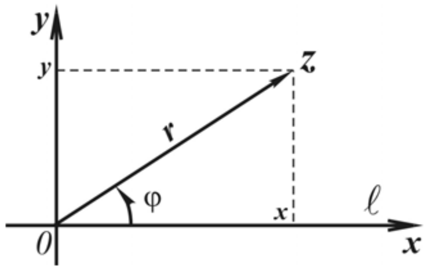


Рис. 4

Полярную ось совмещаем с вещественной осью, а полюс помещаем в начало координат. Тогда $(r,\ \varphi)$ – полярные координаты точки, r – полярный радиус, φ – полярный угол:

$$z = x + iy,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

откуда получается ***тригонометрическая форма комплексного числа***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4.1}$$

Полярный радиус r комплексного числа z называется ***модулем комплексного числа*** (определяется однозначно):

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0\,; \tag{4.2}$$

полярный угол φ – ***аргумент комплексного числа*** (определяется с точностью до кратного 2π) с учетом четверти, в которой лежит точка:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \mathrm{Arg}z = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}. \tag{4.3}$$

При движении в положительном направлении, то есть против часовой стрелки, аргумент φ имеет знак «+»; при движении в отрицательном направлении, то есть по часовой стрелке, аргумент φ имеет знак «–».

Главное значение аргумента φ: $-\pi < \arg z \leq \pi$ (часто $0 \leq \arg z < 2\pi$) нетрудно определить по геометрическому изображению комплексного числа.

Для этого напомним, что главное значение $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для I и IV четверти;} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \pm \pi & \text{для II и III четверти.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Формулы Эйлера

Основные формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \quad (4.5)$$

Второе соотношение в (4.5) получается из первого с использованием четности функции $\cos\varphi$ и нечетности функции $\sin\varphi$.

Складывая и вычитая соотношения в (4.5), получаем представление $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через показательную функцию:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right). \quad (4.6)$$

Формулы Эйлера позволяют записать комплексное число z более компактно в так называемой ***показательной форме***

$$z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi). \quad (4.7)$$

Замечание 1. Функции $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ являются периодическими с периодом 2π, то есть:

$$\cos(\varphi + 2\pi n) = \cos\varphi, \ \sin(\varphi + 2\pi n) = \sin\varphi;$$

следовательно,

$$e^{i(\varphi+2\pi n)} = e^{i\varphi}, \ n \in \mathrm{Z}, \quad (4.8)$$

то есть функция $e^{i\varphi}$ является периодической с периодом $T = 2\pi i$.

Замечание 2. Аргументы противоположных чисел отличаются на величину π радиан.

Замечание 3. Аргумент положительных вещественных чисел $\varphi = 0$; аргумент отрицательных чисел $\varphi = \pi$. Аргумент чисто мнимых чисел вида $z = iy$ равен

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y > 0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \text{при} \quad y < 0.$$

Замечание 4. Комплексные числа в тригонометрической или показательной форме считаются равными, если их модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное 2π.

Пример 4.1. Найти показательную и тригонометрическую формы каждого из следующих комплексных чисел:

а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2$; в) $z_3 = i$;

г) $z_4 = -2i$; д) $z_5 = 1 - i$; е) $z_6 = -\sqrt{3} + i$.

Решение. Изобразим на комплексной плоскости заданные комплексные числа (рис. 5).

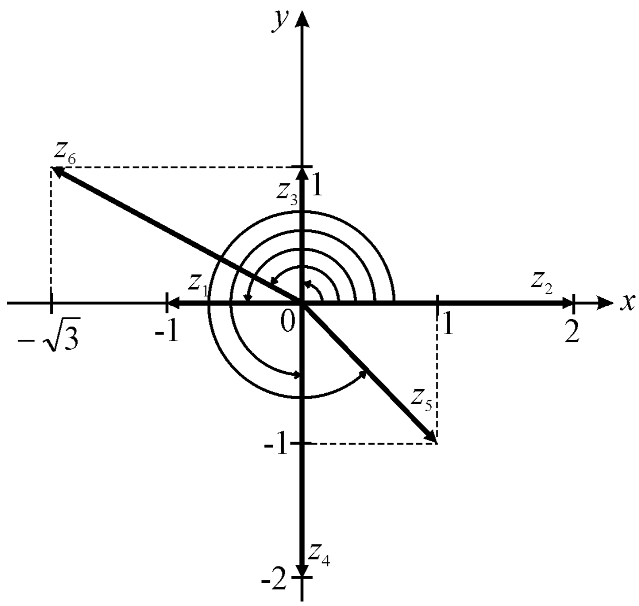


Рис. 5

Для представления чисел z_1, z_2, z_3, z_4 нет необходимости в каких-либо формулах. Действительно, их модули и аргументы определяются без всякого труда. Углы отмечены на рис. 5 дуговыми стрелками.

а) $z_1 = -1$: $r = 1$, $\varphi = \pi$ $\Rightarrow$ $-1 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi$.

б) $z_2 = 2$: $r = 2$, $\varphi = 0$ $\Rightarrow$ $2 = 2e^{0i} = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

в) $z_3 = i$: $r = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $i = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

г) $z_4 = -2i$: $r = 2$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$

показательная форма: $-2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$, тригонометрическая форма:

$$-2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

д) $z_5=1-i$: $x=1$, $y=-1$, $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\left\{\frac{y}{x}\right\}=-1$,

число z_5 расположено в IV четверти $\Rightarrow$ $\varphi=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Искомые показательная и тригонометрическая формы:

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

е) $z_6=-\sqrt{3}+i$: $x=-\sqrt{3}$, $y=1$, $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{-\sqrt{3}}$,

число z_6 расположено во II четверти $\Rightarrow$ $\varphi=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

Искомые показательная и тригонометрическая формы:

$$-\sqrt{3}+i=2e^{\frac{5\pi}{6}i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Пример 4.2. Установить соответствие между комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах:

а) $z_1=-\sqrt{3}+i$; 1) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

б) $z_2=1-\sqrt{3}\,i$; 3) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $z_3=1+i$. 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Для числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$ определяем вещественную и мнимую части: соответственно $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$, то есть модуль $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$; аргумент $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$ (II четверть).

Таким образом, тригонометрическая форма комплексного числа z_1:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Аналогично,

$$z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \text{ (IV четверть).}$$

$$z_3 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(I четверть).}$$

Ответ: а) – 2); б) – 1); в) – 5).

Пример 4.3. Установить соответствие между комплексными числами в алгебраической и показательной формах:

а) $z_1 = -\sqrt{3} + i$; 1) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; 2) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$;

б) $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$; 3) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; 4) $4e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

в) $z_3 = 1 + i$. 5) $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; 6) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Решение. В предыдущей задаче найдены тригонометрические формы указанных чисел. Перейдем к показательной форме:

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{5\pi}{6}i};\quad 1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i};\quad 1 + i = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Ответ: а) – 2); б) – 1; в) – 5).

5. Действия над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах

Пользуясь тригонометрическими тождествами и правилами действий со степенями, можно доказать следующие ***правила действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах*** (таблица 1).

1^0. При перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Пусть даны комплексные числа в показательной и тригонометрической формах:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Рассмотрим умножение комплексных чисел в показательной форме: $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}$. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, то есть $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Используя формулу Эйлера, получаем результат умножения в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Можно доказать правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме непосредственно:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Раскрываем скобки и, с учетом свойства $i^2 = -1$, группируем слагаемые:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)).$$

Используя тригонометрические формулы (косинус и синус суммы аргументов), окончательно получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

то есть при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2^0. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Доказательство. Рассмотрим деление комплексных чисел в показательной форме: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}$.

Используя свойство степеней – при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются – получаем: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Применяя формулу Эйлера, получаем правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

При непосредственном доказательстве правила деления комплексных чисел в тригонометрической форме используем правило деления комплексных чисел в алгебраической форме и тригонометрические формулы (косинус и синус разности аргументов).

Итак, чтобы поделить два комплексных числа, числитель и знаменатель дроби домножим на число, комплексно-сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2};\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}.$$

Раскрываем скобки в числителе и знаменателе и приводим подобные с учетом $i^2=-1$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}.$$

В числителе применяем формулы синус и косинус разности аргументов; в знаменателе – основное тригонометрическое тождество: $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Итак, доказано, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3^{0}. *Следствие* из **1**^{0}. При возведении в натуральную степень модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (***формула Муавра***).

Доказательство формулы Муавра:

$$z=re^{i\varphi};\quad z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n,\ n\in Z.$$

При возведении произведения в степень n каждый сомножитель возводится в эту степень; при возведении степени в степень показатели перемножаются. Таким образом, формула Муавра в показательной форме доказана: $z^n=r^ne^{in\varphi}$.

Применяя формулу Эйлера, получим формулу Муавра в тригонометрической форме:

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Формула Муавра является следствием правила **1⁰**: $z^n = re^{i\varphi} \cdot re^{i\varphi} \cdot \ldots \cdot re^{i\varphi}$ (n сомножителей); при умножении комплексных чисел их модули умножаются, аргументы складываются:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

4⁰. При извлечении корня n-ой степени из комплексного числа из модуля извлекается корень n-ой степени, а аргумент имеет ровно n разных значений $\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Доказательство правила извлечения корня n-ой степени из комплексного числа проведем в показательной форме, используя определение аргумента с точностью до кратного 2π и свойство степеней: при извлечении корня из степени показатели делятся.

Пусть $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, $k \in Z$. Тогда $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}$, $k \in Z$.

Докажем, что $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n различных значений. Действительно, при $k = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ k = n-1$ получаем разные значения аргумента:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \ \ldots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$$

и, соответственно, разные значения $z_k = \sqrt[n]{z}$: $z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}$.

При $k = n,\ k = n+1, \ldots,\ k = 2n-1$ получаем аргументы

$$\varphi_n = \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi, \quad \varphi_{n+1} = \frac{\varphi + 2(n+1)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\pi}{n} + 2\pi, \ \ldots$$

$$\varphi_{2n-1} = \frac{\varphi + 2(2n-1)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + 2\pi,$$

которые отличаются от $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ на величину 2π радиан; то есть значения корня n-ой степени из z совпадают со значениями $z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}$. Аналогично, при $k = 2n,\ k = 2n+1,\ \ldots,\ k = 3n-1$; ... получаем значения аргументов, отличающиеся от $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ на 4π, ...

Итак, корень n-ой степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений; то есть для комплексного числа в показательной и тригонометрических формах имеет место формула

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ \ n = 0, 1, ..., n-1.$$

Нетрудно убедиться, что n значений z_k корня $\sqrt[n]{z}$ геометрически изображаются точками, лежащими в вершинах правильного n- угольника на окружности с центром в начале координат, радиуса $\sqrt[n]{r}$ ($r, \varphi -$ полярные координаты точки z).

Таблица 1

Действия над комплексными числами

в показательной форме $z = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi)$	***в тригонометрической форме*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
1⁰. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$	**1⁰.** $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$
2⁰. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$	**2⁰.** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$
3⁰. $z^n = r^n e^{in\varphi}$	**3⁰.** Формула Муавра $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
4⁰. $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$	**4⁰.** $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Пример 5.1. Вычислить z^9, где $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение. Прежде всего, число z нужно изобразить геометрически, записать в показательной и тригонометрической формах, что сделано в ***примере 4.1***:

$$z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Используем правило **3⁰** таблицы 1.

$$z^9 = \left(2e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^9 = 2^9 \cdot e^{\frac{5\pi\cdot 9}{6}i} = 2^9 e^{\frac{15\pi}{2}i}.$$

Прежде чем переходить к тригонометрической форме, лучше воспользоваться периодичностью функции $e^{\varphi i}$: $e^{(\varphi+2k\pi)i} = e^{\varphi i}$.

$$z^9 = 2^9 \cdot e^{\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right)i} = 2^9 e^{-\frac{\pi}{2}i}, \qquad z^9 = 2^9\left(cos\frac{\pi}{2} - i\,sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, то $z^9 = -2^9 i$.

Ответ: $z^9 = -512i$.

Пример 5.2. Решить уравнение $z^3 + 1 = 0$.

Решение. $z^3 = -1 \iff z_k = \sqrt[3]{-1}$. В области вещественных чисел известно единственное значение: $\sqrt[3]{-1} = -1$.

В области комплексных чисел $\sqrt[3]{z}$ имеет три значения. Для их нахождения нужно число z представить в показательной и тригонометрической формах, а затем воспользоваться правилом $\mathbf{4^0}$ из таблицы 1 при $n = 3$:

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{3}i} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2.$$

В ***примере 4.1*** получены показательная и тригонометрическая формы числа -1:

$$-1 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi.$$

Таким образом,

$$z_k = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3},\ \ k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 \ \Rightarrow\ z_0 = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \qquad z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 1 \ \Rightarrow\ z_1 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi, \qquad z_1 = -1;$$

$$k = 2 \ \Rightarrow\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{3}i} = e^{\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Полученные корни уравнения образуют вершины правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $r = 1$ с центром в начале координат. Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.

Заметим, что данное тривиальное уравнение можно решить, разлагая $z^3 + 1$ как сумму кубов: $(z+1)\left(z^2 - z + 1\right) = 0$.

(В общем случае подобный прием практически неосуществим).

$$\left[\begin{array}{l} z+1=0, \\ z^2-z+1=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1, \\ z=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1, \\ z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $z=-1$, $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

Пример 5.3. Комплексное число $a=\dfrac{2\sqrt{2}}{-1-i}$:

а) записать в алгебраической форме, изобразить геометрически;
б) представить в тригонометрической и показательной формах;
в) найти a^{10}; г) решить уравнение $z^3+a=0$.

Решение. а) Используем правило деления комплексных чисел в алгебраической форме.

$$a=\frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}=\frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{1-i^2},$$

$$a=\{i^2=-1\}=\frac{2\sqrt{2}(-1+i)}{2}.$$

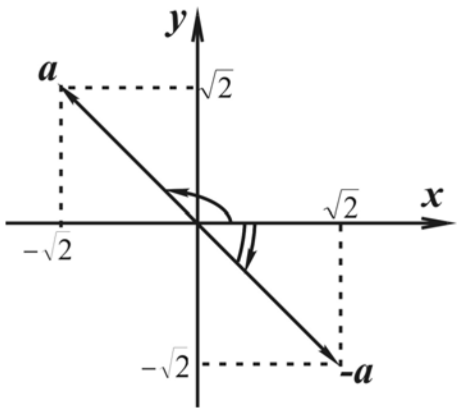


Рис. 6

Таким образом, алгебраическая форма комплексного числа $a=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

Геометрическое изображение (рис. 6):

$$x=\operatorname{Re}a=-\sqrt{2},\ y=\operatorname{Im}a=\sqrt{2}.$$

б) Модуль комплексного числа

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow |a|=2.$$

Комплексное число a расположено во второй четверти, его аргумент

$$\varphi=arg\,a=arctg\frac{y}{x}+\pi\Rightarrow\quad \varphi=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi,\ \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма:

$$a\overset{(4.1)}{=}2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Показательная форма:

$$a\overset{(4.7)}{=}2\exp\left(\frac{3\pi}{4}i\right)=2e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

в) $a^{10}\overset{(3^0)}{=}2^{10}\exp\left(\dfrac{3\pi}{4}i\cdot 10\right)=2^{10}\exp\left(\dfrac{15\pi}{2}i\right)=2^{10}\exp\left(\dfrac{3\pi}{2}i\right),$

$$a^{10} = 1024\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -1024i\,.$$

г) $z^3 + a = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 = -a = \sqrt{2}(1-i)$.

В полярных координатах аргументы противоположных чисел отличаются на π:

$$-a = 2\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$z_k = \sqrt[3]{-a} \overset{(4^0)}{=} \sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}i\right),\; k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\exp\left(-\frac{\pi}{12}i\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\exp\frac{7\pi}{12}i\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),\; z_1 = \sqrt[3]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\exp\frac{5\pi}{4}i\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right),\; z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

При вычислении z_1 и z_2 использованы формулы приведения.

Вычисляя приближенно значения тригонометрических функций, можно получить алгебраическую форму корней уравнения. Здесь мы ограничимся только вычислением последнего корня:

$$z_2 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}(1+i) = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}(1+i).$$

Итак, уравнение $z^3 + a = 0$ имеет корни

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),\; z_1 = \sqrt[3]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right),\; z_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}(1+i).$$

Пример 5.4. Получить алгебраическую форму заданного числа

$$z = \frac{\left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}.$$

Найти вещественную и мнимую части комплексно-сопряженного числа $\bar{z}$.

Решение. Выполним действия над комплексными числами в тригонометрической форме в соответствии с формулой Муавра и правилом деления (табл. 1):

$$z = \frac{16\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}} = 16\left[\cos\left(\frac{8\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)\right],$$

$$z = 16\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Используя формулы приведения, получаем

$$z = 16\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Итак, $z = 8\left(\sqrt{3} - i\right)$, $\overline{z} = 8\left(\sqrt{3} + i\right)$, $\operatorname{Re}\overline{z} = 8\sqrt{3}$, $\operatorname{Im}\overline{z} = 8$.

Ответ: $\operatorname{Re}\overline{z} = 8\sqrt{3}$, $\operatorname{Im}\overline{z} = 8$.

Пример 5.5. Число $z = \dfrac{4}{1 + \sqrt{3}\,i}$ представить в алгебраической форме. Записать противоположное число $-z$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Сначала представим число z в алгебраической форме:

$$z = \frac{4\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)}{1 + 3};\ z = 1 - \sqrt{3}\,i.$$

Противоположное число $-z = -1 + \sqrt{3}\,i$ находится во второй четверти $\left(x = -1,\ y = \sqrt{3}\right)$, модуль $|-z| = |z| = \sqrt{1 + 3} = 2$, аргумент

$$\arg(-z) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Показательная и тригонометрическая формы:

$$-z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ответ: $z = 1 - \sqrt{3}\,i$, $\quad -z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Замечание. Можно представить число z в тригонометрической и показательной формах: $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (IV четверть), а затем учесть, что модули противоположных чисел равны, а аргументы отличаются на π.

Пример 5.6. Комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ к числу $z = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}$ представить в алгебраической форме.

Решение. Приведем один из наиболее возможных рациональных вариантов решения. Запишем комплексное число z в показательной форме: $z = \dfrac{2}{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$. Модули комплексно-сопряженных чисел равны, а аргументы отличаются знаком, то есть

$$\bar{z} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i},\ \bar{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}\,i$.

Пример 5.7. Для числа $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}$ найти противоположное и комплексно-сопряженное числа в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

Решение. Выполним указанные действия, используя показательную форму, получим:

$$z = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\cdot e^{\frac{5\pi}{6}i} = 2e^{\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)i}.$$

Таким образом, получаем число z

в показательной форме: $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$;

в тригонометрической форме: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в алгебраической форме: $z = \sqrt{3} + i$.

Комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ и противоположное число $-z$ соответственно:

в показательной форме:

$$\bar{z} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}, \; -z = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i};$$

в тригонометрической форме:

$$\bar{z} = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right), \; -z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$$

в алгебраической форме: $\bar{z} = \sqrt{3} - i$, $-z = -\sqrt{3} - i$.

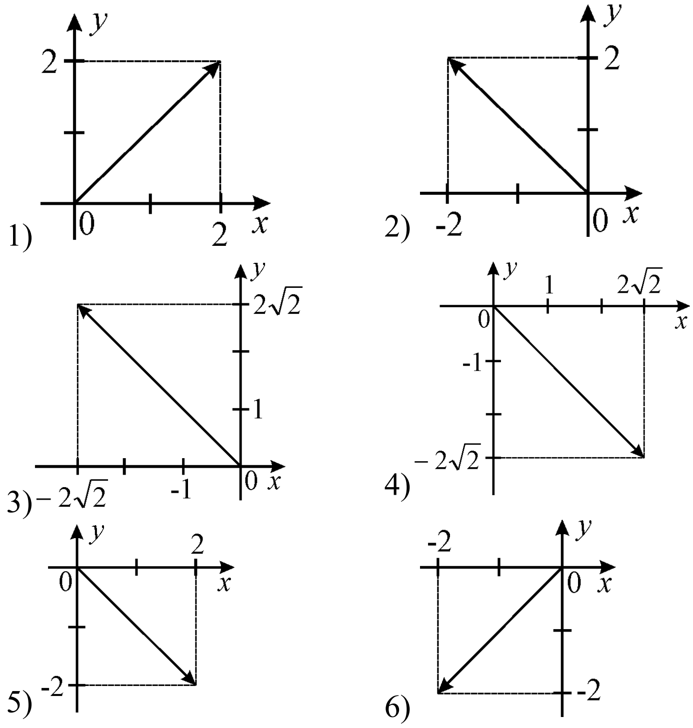
Приведены две записи показательной и тригонометрической форм комплексного числа со значением аргумента от $-\pi$ до π и от 0 до 2π в соответствии с формулой $e^{(\varphi + 2\pi n)} = e^{\varphi i}$.

Пример 5.8. Установить соответствие между комплексными числами и их геометрическими изображениями:

а) $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

б) $z_2 = 4e^{\frac{3\pi}{4}i}$;

в) $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.



Решение. Вычисляя значения тригонометрических функций, получим:

$z_1 = 2(-1 + i)$ – рис. 2);

$z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}(-1 + i)$ – рис. 3);

$z_3 = 2(1 - i)$ – рис. 5).

Ответ: а) – 2); б) – 3); в) – 5).

Пример 5.9. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Выполнив указанные действия, установить соответствие между комплексными числами в различных формах:

а) $z_1 z_2$;　　1) $\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$;　　4) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

б) $\frac{z_1}{z_2}$;　　2) $e^{-\frac{5\pi}{6}i}$;　　5) $-2i$;

в) $\frac{z_2}{z_1}$.　　3) $4i$;　　6) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

Решение. Приведем один из возможных вариантов решения. Запишем оба числа в показательной форме:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i},\ z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}.$$

Тогда:

$$z_1 z_2 = 4e^{\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)i} = 4e^{\frac{\pi}{2}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ z_1 z_2 = 4i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)i};\ \frac{z_1}{z_2} = e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{-\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Ответ: а) – 3); б) – 1); в) – 2).

Пример 5.10. Выполнив деление, получить алгебраическую форму числа $z = \frac{2\left(\sqrt{3} + i\right)}{1 + \sqrt{3}\,i}$ и найти противоположное число $-z$ в различных формах. Указать правильные ответы.

1) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$;　　2) $\sqrt{3} - i$;　　3) $-\sqrt{3} + i$;　　4) $\sqrt{3} + i$;

5) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;　　6) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Используя правило деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z=\frac{2\left(\sqrt{3}+i\right)\left(1-\sqrt{3}\,i\right)}{1+3}=\frac{\sqrt{3}+i-3i-\sqrt{3}i^2}{2},\ \left\{i^2=-1\right\}\Rightarrow\ z=\sqrt{3}-i\,.$$

Тогда противоположное число в алгебраической форме: $-z=-\sqrt{3}+i$;

в показательной форме: $-z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$;

в тригонометрической форме: $-z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Ответ: правильные ответы 1); 3); 5).

Пример 5.11. Комплексное число z, модуль которого равен 4, изображается вектором, образующим угол $\psi=150^{\circ}$ с положительным направлением оси *0y* (по часовой стрелке). Записать число z в различных формах.

Решение. Изобразим комплексное число z в соответствии с условиями задачи (рис. 7). Направление по часовой стрелке дает отрицательное значение аргумента; поворот от положительного направления оси *0y* на 150° по часовой стрелке означает поворот от положительного направления оси *0x* на 60° по часовой стрелке, то есть аргумент комплексного числа $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

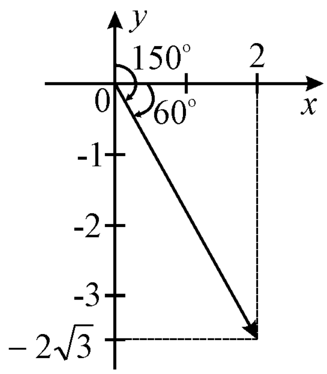


Рис. 7

Ответ:

показательная форма: $z=4e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

тригонометрическая форма: $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

алгебраическая форма: $z=2\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$.

Пример 5.12. Комплексное число z, модуль которого равен $2\sqrt{2}$, изображается вектором, образующим угол $\psi=135^{\circ}$ от отрицательного направления оси *0y* (против часовой стрелки). Записать число z в различных формах.

Решение. Изобразим комплексное число в соответствии с условиями задачи (рис. 8). Поворот против часовой стрелки от отрицательного направления оси *0y* на 135° означает поворот против часовой стрелки от

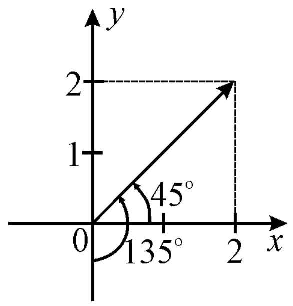


Рис. 8

положительного направления оси $0x$ на 45°, что соответствует значению аргумента комплексного числа $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: для заданного комплексного числа

показательная форма: $z = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$;

тригонометрическая форма: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

алгебраическая форма: $z = 2(1+i)$.

Пример 5.13. Установить соответствие между комплексными числами, заданными в виде определителей, и комплексными числами в тригонометрической и показательной формах:

а) $z_1 = \begin{vmatrix} -1+i & \sqrt{3}\,i \\ 2 & 1+i \end{vmatrix}$; 1) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $4e^{-\frac{\pi}{6}i}$;

б) $z_2 = \begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i \\ -2 & 1-i \end{vmatrix}$; 3) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; 4) $4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$;

в) $z_1 = \begin{vmatrix} i & 2+\sqrt{3}\,i \\ i & -\sqrt{3}i \end{vmatrix}$. 5) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; 6) $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

Решение. Вычисляя определители, найдем алгебраическую форму комплексных чисел, а затем показательную и тригонометрическую:

$$z_1 = (-1+i)(1+i) - 2\sqrt{3}i,\ z_1 = -2\left(1+\sqrt{3}i\right) = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$z_2 = (1+i)(1-i) + 2\sqrt{3}i,\ z_2 = 2\left(1+\sqrt{3}i\right) = 4e^{\frac{\pi}{3}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$z_3 = -\sqrt{3}\,i^2 - i\left(2+\sqrt{3}\,i\right),\ z_3 = 2\left(\sqrt{3} - i\right) = 4e^{-\frac{\pi}{6}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: а) – 4); б) – 1); в) – 2).

Пример 5.14. Комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ к числу z задано в виде определителя $\bar{z} = \begin{vmatrix} 2+i & i \\ 1-2i & 3i \end{vmatrix}$. Установить соответствие между z, $\bar{z}$, $-z$ и различными формами комплексных чисел:

а) z; 1) $5e^{\frac{5\pi}{4}i}$; 2) $5-5i$;

б) $\bar{z}$; 3) $5+5i$; 4) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

в) $-z$. 5) $5\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$; 6) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение. Вычисляя определитель, найдем число $\bar{z}$ в различных формах:

$$\bar{z} = (2+i)\cdot 3i - (1-2i)\cdot i = 6i + 3i^2 - i + 2i^2,\ \{i^2 = -1\} \Rightarrow \ \bar{z} = -5 + 5i.$$

Алгебраическая форма указанных в условии чисел:

$$\bar{z} = -5 + 5i, \quad z = -5 - 5i, \quad -z = 5 + 5i.$$

Показательная и тригонометрическая формы:

$$z = 5\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$$

$$\bar{z} = 5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$-z = 5\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

то есть число z соответствует показательной форме 5); $\bar{z}$ – тригонометрической форме 4); $-z$ – алгебраической форме 3).

Ответ: а) – 5); б) – 4); в) – 3).

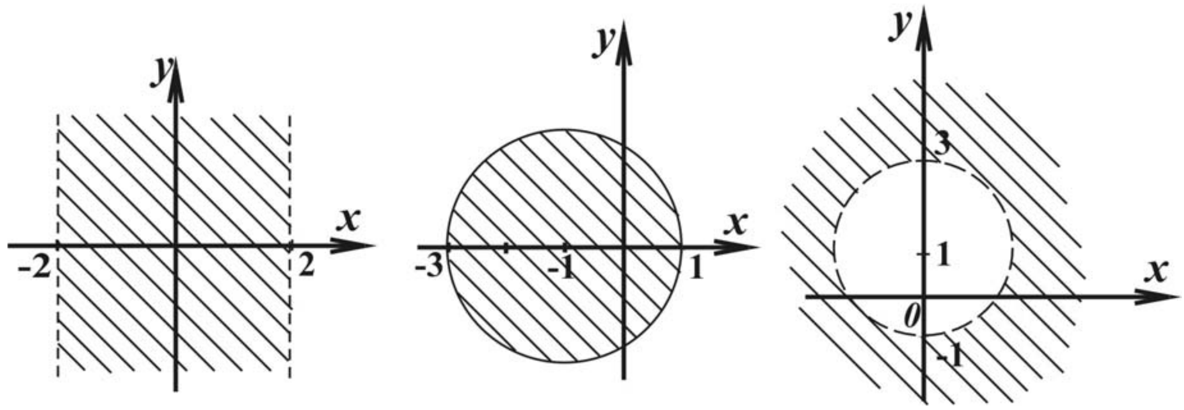
Пример 5.15. Изобразить геометрически множества комплексных чисел:

а) $|\operatorname{Re} z| < 2$; б) $|z+1| \le 2$; в) $|z-i| > 2$; г) $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$.

Решение. Запишем комплексное число в алгебраической форме $z = x + iy$.

а) $\operatorname{Re} z = x \Rightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Таким образом, множество комплексных чисел $|\operatorname{Re} z| < 2$ представляет собой вертикальную полосу (рис. 9 а).



а б в

Рис. 9

б) $z+1 = x+1+iy$, $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \le 2 \iff (x+1)^2 + y^2 \le 4.$

Множество комплексных чисел представляет собой замкнутый круг радиуса 2 с центром в точке $(-1;\ 0)$ (рис. 9 б).

в) $z - i = x + iy - i = x + i(y-1)$,

$$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} > 2 \iff x^2 + (y-1)^2 > 4 .$$

Геометрическое изображение множества комплексных чисел в этом случае – внешность круга радиуса 2 с центром в точке (0; 1) (рис. 9 в).

г) комплексное число z представим в показательной форме $z = re^{i\varphi}$. Тогда неравенство, задающее область, примет вид: $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$.

Соответствующая область комплексных чисел изображена на рис. 9 г.

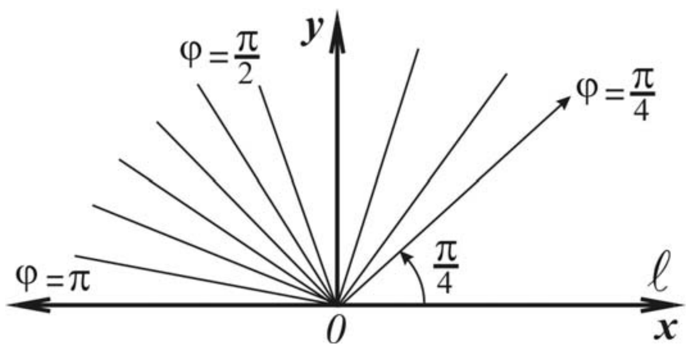


Рис. 9 г

Замечание. Покажем, что в области комплексных чисел уравнение $|z-z_0|=R$ задаёт окружность с центром в точке z_0 радиуса R, неравенство $|z-z_0|<R$ – открытый круг, неравенство $|z-z_0|\le R$ – закрытый круг, неравенство $|z-z_0|>R$ – внешность круга с центром в точке z_0 радиуса R.

Для доказательства представим комплексные числа z и z_0 в алгебраической форме: $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$. Тогда

$$z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0),\quad |z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Таким образом, уравнение $|z-z_0|=R$ в декартовой системе координат примет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Полученное уравнение определяет окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, которая является изображением комплексного числа $z_0=x_0+iy_0$. Окружность разбивает всю плоскость на две области. В одной из областей будет иметь место неравенство $|z-z_0|<R$, что равносильно неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2,$$

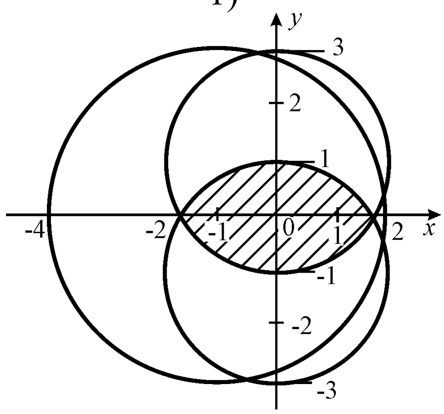
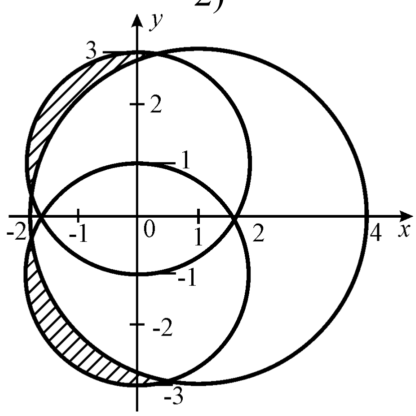
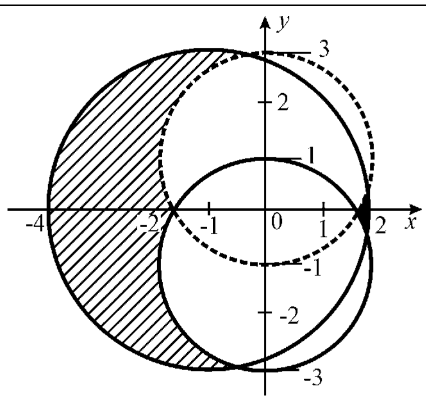
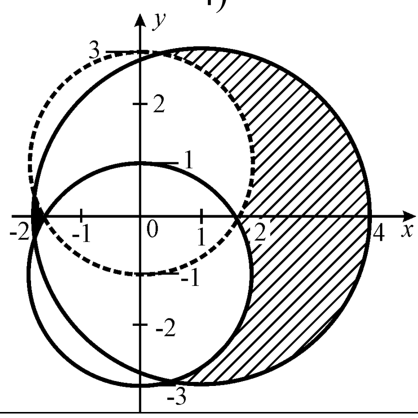
а в другой области – противоположный знак. При подстановке координат центра окружности $M_0(x_0,\ y_0)$ в левую часть последнего неравенства, очевидно, получается верное неравенство. Для всех точек, лежащих в той же области, что и $M_0(x_0,\ y_0)$, будет выполняться тот же самый знак неравенства. Это означает, что внутренность круга с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ радиуса R описывается неравенством $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$, что равносильно неравенству $|z-z_0|<R$.

Как легко видеть, неравенство

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>R^2 \text{ или } |z-z_0|>R$$

описывает внешность соответствующего круга.

Пример 5.16. Установить соответствие между множествами комплексных чисел и их геометрическими изображениями.

Множество в области комплексных чисел	Изображение на комплексной плоскости	
а) $\begin{cases} \lvert z-1 \rvert \le 3, \\ \lvert z+i \rvert \ge 2, \\ \lvert z-i \rvert > 2. \end{cases}$	1) 	2) 
б) $\begin{cases} \lvert z+1 \rvert \le 3, \\ \lvert z+i \rvert \ge 2, \\ \lvert z-i \rvert > 2. \end{cases}$	 3)	4) 

Решение. Как было показано выше, неравенство $\lvert z - z_0 \rvert \le r$ задает замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса r (окружность $\lvert z - z_0 \rvert = r$ рисуем сплошной линией); $\lvert z - z_0 \rvert < r$ – открытый круг (окружность рисуем пунктиром); $\lvert z - z_0 \rvert > r$ – внешность круга. Таким образом, $\lvert z-1 \rvert \le 3$ – замкнутый круг с центром $z_0 = 1$ радиуса $r = 3$; $\lvert z+1 \rvert \le 3$ – замкнутый круг с центром $z_0 = -1$ радиуса $r = 3$; $\lvert z+i \rvert \ge 2$ – внешность круга с центром $z_0 = -i$ радиуса $r = 2$, включая точки на окружности; $\lvert z-i \rvert > 2$ – внешность круга с центром $z_0 = i$ радиуса $r = 2$, исключая точки на окружности. Стало быть, множеству а) соответствует рисунок 4), а множеству б) – рисунок 3).

Ответ: а) – 4; б) – 3).

Задания для самостоятельной работы

1. Теоретические вопросы

1.1. Мнимая единица i. Степени мнимой единицы.
1.2. Комплексное число в алгебраической форме. Множество комплексных чисел C. Вещественная и мнимая части комплексного числа.
1.3. Чисто мнимые числа.
1.4. Равенство комплексных чисел в алгебраической форме. Сравнение комплексных чисел. Нуль в области комплексных чисел.
1.5. Комплексно-сопряженные и взаимно противоположные комплексные числа.
1.6. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Геометрическое изображение на комплексной плоскости комплексно-сопряженных и взаимно противоположных чисел.
1.7. Действия над комплексными числами в алгебраической форме (сложение, вычитание, умножение, деление).
1.8. Произведение комплексно-сопряженных чисел.
1.9. Геометрическая интерпретация сложения и вычитания комплексных чисел в алгебраической форме.
1.10. Модуль и аргумент комплексного числа.
1.11. Аргументы противоположных и комплексно-сопряженных чисел.
1.12. Тригонометрическая форма комплексного числа.
1.13. Формулы Эйлера.
1.14. Показательная форма комплексного числа.
1.15. Равенство комплексных чисел в показательной и тригонометрической формах.
1.16. Алгебраические операции над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах (умножение, возведение в степень – формула Муавра, деление, извлечение корня n-ой степени).
1.17. Геометрическая интерпретация умножения и деления комплексных чисел.
1.18. Геометрическая интерпретация совокупности корней $z_k = \sqrt[n]{z}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
1.19. Изображение множеств на комплексной плоскости.
1.21. Окружность и круг (открытый и замкнутый) на комплексной плоскости.
1.22. Решение квадратного уравнения с вещественными коэффициентами в зависимости от дискриминанта. Решение алгебраических уравнений.
1.23. Комплексные числа в определителях.
1.26. Соответствие между множествами комплексных чисел и их изображениями на комплексной плоскости.

2. Алгебраическая форма комплексных чисел. Основные понятия

2.1. К комплексному числу $z = -5 + 3i$ найдите противоположное и комплексно-сопряженное числа.

2.2. Укажите вещественную и мнимую части числа $z = 2 - 3i$.

2.3. Вычислите: i^3, i^4, i^{17}, i^{26}, i^{119}, i^{58}.

2.4. Из равенства $(2x - y) + (x + 4y)\cdot i = y + 2 + (x + 2y)\cdot i$ найдите:

а) действительные числа x и y;

б) чисто мнимые числа x и y.

Ответы. **2.1.** $-z = 5 - 3i$, $\bar{z} = -5 - 3i$. **2.2.** $Re\, z = 2$, $Im\, z = -3$
2.3. $-i$, 1, i, -1, $-i$, -1. **2.4.** а) $x = 1$, $y = 0$; б) $x = -i$, $y = -i$.

3. Действия с комплексными числами в алгебраической форме

3.1. Вычислите: а) $(2 - 3i)\cdot(5 + 2i)$; б) $\dfrac{2-3i}{5-2i}$; в) $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$.

3.2. Найдите вещественную и мнимую части комплексных чисел:
а) $z = \dfrac{3-2i}{4+3i}$; б) $z = (3-2i)(4-3i)$; в) $z = (3-2i)^2$; г) $z = \dfrac{10}{1+3i}$.

3.3. Найдите комплексно-сопряженные числа $\bar{z}$ к комплексным числам:
а) $z = \dfrac{3+2i}{2+3i}$; б) $z = (3+2i)(2-3i)$; в) $z = (3-2i)^2$; г) $z = \dfrac{10}{1-3i}$.

3.4. Найдите противоположные числа $-z$ к комплексным числам:
а) $z = \dfrac{3-2i}{2+i}$; б) $z = (3-2i)(2-3i)$; в) $z = (2+3i)^2$; г) $z = \dfrac{5}{2+i}$.

Ответы. **3.1.** а) $16 - 11i$; б) $\dfrac{16-11i}{29}$; в) $-1 + i$. **3.2.** а) $Re\, z = \dfrac{6}{25}$; $Im\, z = -\dfrac{17}{25}$;
б) $Re\, z = 6$; $Im\, z = -17$; в) $Re\, z = 5$; $Im\, z = -12$; г) $Re\, z = 1$; $Im\, z = -3$.
3.3. а) $\dfrac{12+5i}{13}$; б) $12+5i$; в) $5+12i$; г) $1-3i$. **3.4.** а) $\dfrac{-4+7i}{5}$; б) $-4+7i$;
в) $5-12i$; г) $-2+i$.

4. Алгебраические уравнения

4.1. Решите квадратные уравнения: а) $z^2+20z+104=0$;
б) $z^2+18z+90=0$; в) $z^2+26z+170=0$;
г) $z^2-26z+170=0$; д) $z^2-26z+173=0$.

4.2. Решите кубические уравнения:
а) $z^3+64=0$; б) $z^3+216=0$; в) $z^3+125=0$.

4.3. Решите уравнения четвертой степени: а) $z^4-81=0$;
б) $16z^4-1=0$; в) $z^4+5z^2-36=0$; г) $z^4-21z^2-100=0$.

4.4. Установите соответствие между квадратными уравнениями и их корнями:

а) $z^2-16z+89=0$;	1) $8\pm 5i$; 2) $8\pm 4i$;
б) $z^2+16z+89=0$;	3) $-8\pm 5i$; 4) $8\pm 10i$;
в) $z^2+16z+80=0$.	5) $-8\pm 4i$; 6) $-8\pm 10i$.

4.5. Установите соответствие между биквадратными уравнениями и их корнями:

а) $z^4+5z^2-36=0$;	1) $\pm 2; \pm 3i$; 2) $\pm 4; \pm 3i$; 3) $\pm 2i; \pm 3i$;
б) $z^4-5z^2+36=0$.	4) $\pm 3; \pm 2i$; 5) $\pm 4i; \pm 3$.

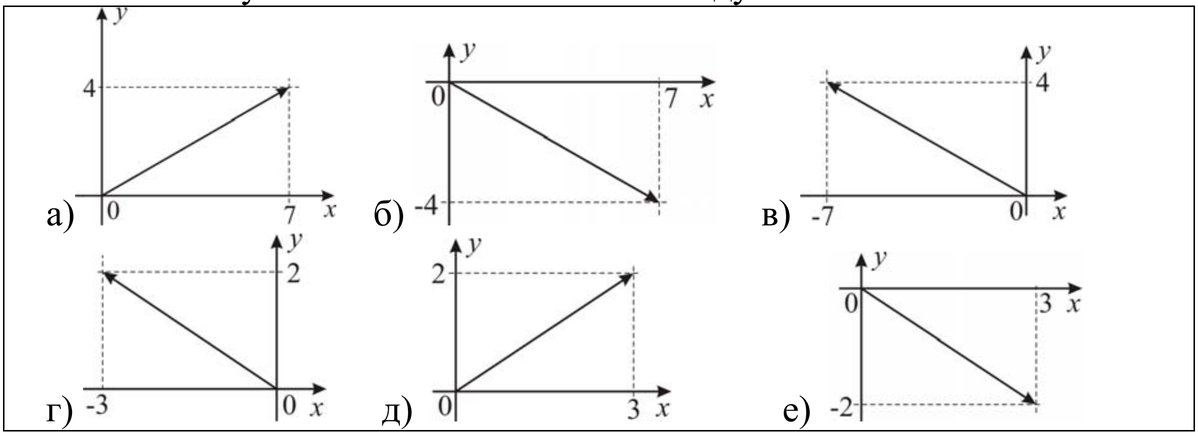
4.6. Решите уравнение $z^4-121=0$ и укажите корни.
1) $\pm\sqrt{11}; \pm\sqrt{11}i$ 2) $\pm 11; \pm 11i$ 3) ± 11
4) $\pm\sqrt{11}; \pm 11i$ 5) $\pm\sqrt{11}$ 6) $11;\ 11i$

4.7. Решите уравнение $z^4-144=0$ и укажите корни.
1) $\pm\sqrt{12}; \pm\sqrt{12}i$ 2) $\pm\sqrt{12}$ 3) $\pm\sqrt{12}; \pm 12i$
4) $\pm 2\sqrt{3}; \pm 2\sqrt{3}i$ 5) ± 12 6) $\pm 12; \pm 12i$

Ответы. **4.1.** а) $-10\pm 2i$; б) $-9\pm 3i$; в) $-13\pm i$; г) $13\pm i$; д) $13\pm 2i$.
4.2. а) $-4;\ 2\pm 2\sqrt{3}i$; б) $-6;\ 3\pm 3\sqrt{3}i$; в) $-5;\ 2.5(1\pm\sqrt{3}i)$.
4.3. а) $\pm 3;\ \pm 3i$; б) $\pm 0,5;\ \pm 0,5i$; в) $\pm 2;\ \pm 3i$; г) $\pm 2i;\ \pm 5$.
4.4. а) – 1); б) – 3); в) – 5). **4.5.** а) – 1; б) – 4). **4.6.** 1). **4.7.** 1) и 4).

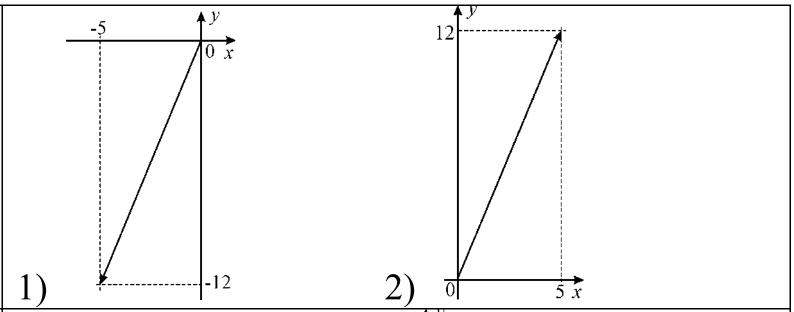
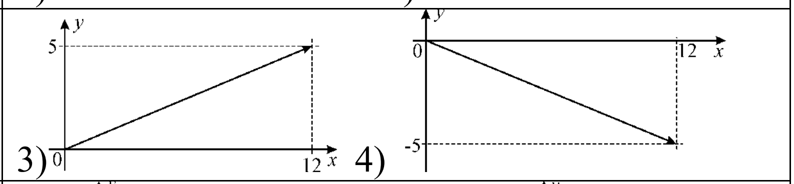
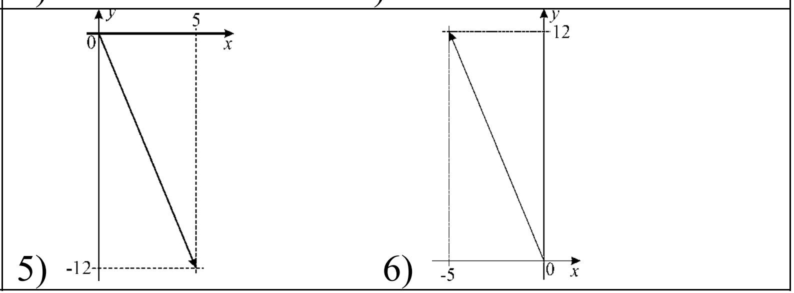
5. Алгебраическая форма комплексных чисел и их геометрическое изображение

5.1. Запишите комплексные числа по заданным геометрическим изображениям и установите соотношение между ними.

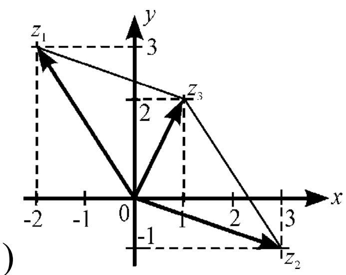
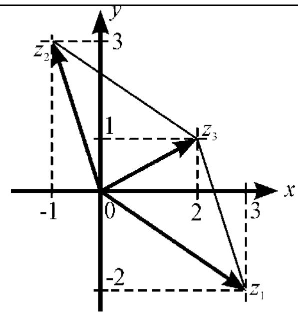
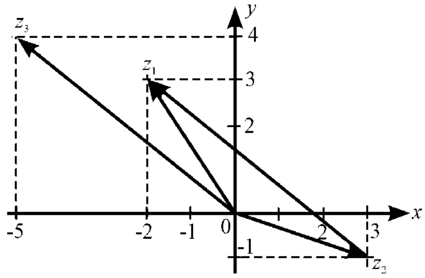
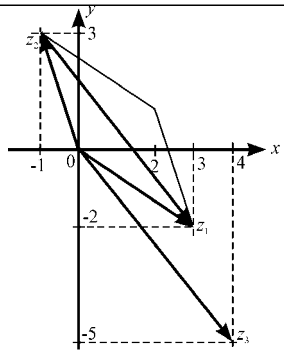
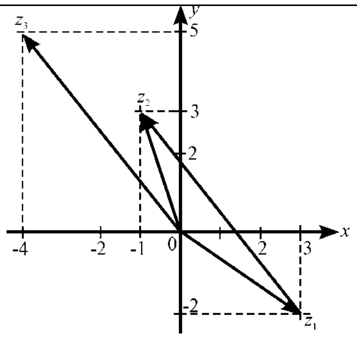


5.2. Выполните указанные действия над комплексными числами и приведите соответствующие геометрические изображения чисел $z, \ \bar{z}, \ -\bar{z}$ в указанном порядке: а) $z=(3-2i)(2-i)$; б) $z=\dfrac{13}{2+3i}$.

5.3. Установите соответствие между комплексными числами z_1, z_2, z_3, представив их в алгебраической форме, и геометрическими изображениями:

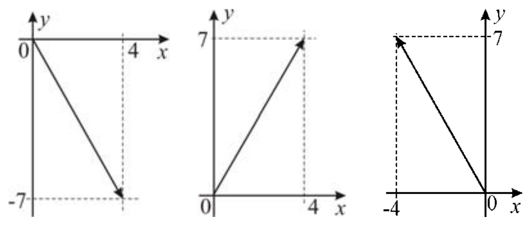
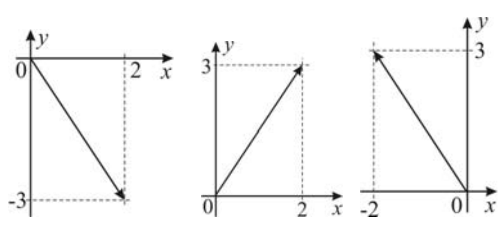
а) $z_1=(-2+3i)^2$;	
б) $z_2=(3-2i)(2+3i)$;	
в) $z_3=(3-2i)^2$.	

5.4. Установите соответствие между комплексными числами и их геометрическими изображениями:

а) $z_1 + z_2$, $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$;	 1)  2)
б) $z_1 - z_2$, $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$;	 3)  4)
в) $z_2 - z_1$, $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$.	 5)

Ответы.

5.1. а) $z_1 = 7 + 4i$; б) $z_2 = 7 - 4i = \bar{z}_1$; в) $z_3 = -7 + 4i = -z_2 = -\bar{z}_1$;
г) $z_4 = -3 + 2i$; д) $z_5 = 3 + 2i = -\bar{z}_4$; е) $z_6 = 3 - 2i = -z_4 = \bar{z}_5$.

5.2. а)  б) 

5.3. а) – 1); б) – 3); в) – 5).

5.4. а) – 2); б) – 4); в) – 5) .

6. Тригонометрическая и алгебраическая формы комплексных чисел

6.1. Найдите тригонометрические формы комплексных чисел:

а) $z=-\sqrt{3}+i$; б) $z=1-i$; в) $z=\dfrac{4}{1+i}$.

6.2. Представьте в алгебраической форме комплексное число

$$z=\frac{2\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}.$$

6.3. Представьте в тригонометрической форме комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ и противоположное число $-z$ к числу $z=\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$.

6.4. Представьте в алгебраической форме комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ и противоположное число $-z$ к числу $z=\dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$.

6.5. Найдите вещественные и мнимые части комплексных чисел:

а) $z=4(cos\frac{\pi}{3}-i\,sin\frac{\pi}{3})$; б) $z=4(cos\frac{\pi}{3}-i\,sin\frac{\pi}{3})(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$.

6.6. Найдите вещественную и мнимую части числа $\bar{z}$, комплексно-сопряженного к числу $z=\dfrac{2(cos\frac{4\pi}{3}+i\,sin\frac{4\pi}{3})}{cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}}$.

6.7. Найдите вещественную и мнимую части числа $-z$, противоположного комплексному числу $z=\dfrac{(\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4}-i\,sin\frac{\pi}{4}))^5}{cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}}$.

6.8. Установите соответствие между алгебраическими и тригонометрическими формами комплексных чисел:

а) $z=1+\sqrt{3}i$;	1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;	2) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
б) $z=-1-\sqrt{3}i$;	3) $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;	4) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
в) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.	5) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;	6) $z=4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответы. 6.1. а) $z = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$;

б) $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

6.2. $z = 2 - 2i$. **6.3.** $\bar{z} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$; $-z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$.

6.4. $\bar{z} = \sqrt{3} + i$; $-z = -\sqrt{3} + i$.

6.5. а) $Re\,z = 2$; $Im\,z = -2\sqrt{3}$; б) $Re\,z = 2\sqrt{3}$; $Im\,z = -2$.

6.6. $Re\,\bar{z} = -\sqrt{3}$; $Im\,\bar{z} = 1$.

6.7. $Re(-z) = -4$; $Im(-z) = -4$. **6.8.** а) – 1); б) – 4); в) – 5).

7. Показательная и алгебраическая формы комплексных чисел

7.1. Найдите показательные формы комплексных чисел:

а) $z = -\sqrt{3} + i$; б) $z = 1 - i$; в) $z = \frac{4}{1+i}$.

7.2. Представьте в показательной форме комплексно-сопряженное число $\bar{z}$ и противоположное число $-z$ к числу $z = \frac{4}{-\sqrt{3} - i}$.

7.3. Найдите алгебраическую форму комплексного числа $z = 4e^{\frac{11\pi}{3}i}$ и противоположного числа.

7.4. Найдите алгебраическую форму комплексного числа $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ и комплексно-сопряженного к нему.

7.5. Представьте в алгебраической форме комплексное число $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, противоположное число $-z$, комплексно-сопряженное число $\bar{z}$.

7.6. Выполните действия с комплексными числами в показательной форме. Найдите вещественные и мнимые части полученных комплексных чисел.

а) $z = \frac{2e^{\frac{4\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{6}i}}$; б) $z = \frac{(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^5}{e^{\frac{\pi}{2}i}}$.

7.7. Найдите вещественные и мнимые части чисел $\bar{z}$, комплексно-сопряженных к комплексным числам:

а) $z = 4e^{-\frac{\pi}{3}i}$; б) $z = 4e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$.

7.8. Установите соответствие между алгебраическими и показательными формами комплексных чисел:

а) $z=-\sqrt{3}-i$;	1) $z=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; 2) $z=4e^{\frac{\pi}{4}i}$;
б) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;	3) $z=2e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 4) $z=4e^{\frac{\pi}{6}i}$;
в) $z=-1+\sqrt{3}i$.	5) $z=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$; 6) $z=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Ответы. 7.1. $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; б) $z=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$; в) $z=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z=2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$.

7.2. $\bar{z}=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$; $\bar{z}=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$; $-z=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$. **7.3.** $z=2(1-\sqrt{3}i)$; $-z=2(-1+\sqrt{3}i)$.

7.4. $z=-\sqrt{3}+i$; $\bar{z}=-\sqrt{3}-i$. **7.5.** $z=1-i$; $-z=-1+i$; $\bar{z}=1+i$.

7.6. а) $Re\, z=-\sqrt{3}$; $Im\, z=-1$; б) $Re\, z=4$; $Im\, z=4$. **7.7.** а) $Re\,\bar{z}=2$; $Im\,\bar{z}=2\sqrt{3}$; б) $Re\,\bar{z}=2\sqrt{3}$; $Im\,\bar{z}=2$. **7.8.** а) – 1); б) – 3); в) – 5).

8. Соответствие между различными формами комплексного числа

8.1. Найдите тригонометрическую форму комплексного числа $z=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

8.2. Найдите показательную форму комплексного числа

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

8.3. Представьте в различных формах противоположное число к комплексному числу $z=-1+i$.

8.4. Для следующих комплексных чисел представьте комплексно-сопряженные числа в различных формах:

$$\text{а) } z=-\sqrt{3}+i; \qquad \text{б) } z=\frac{(1+i)^2}{1-i}.$$

8.5. Установите соответствие между показательными и тригонометрическими формами комплексных чисел:

а) $z=2e^{\frac{\pi}{3}i}$;	1) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
б) $z=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$;	3) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 4) $z=2\left(-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
в) $z=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.	5) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 6) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

8.6. Установите соответствие между показательными и тригонометрическими формами комплексных чисел:

а) $z=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$;	1) $z=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$; 2) $z=2e^{\frac{\pi}{4}i}$;
б) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;	3) $z=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; 4) $z=2e^{-\frac{\pi}{4}i}$;
в) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.	5) $z=2e^{\frac{\pi}{6}i}$; 6) $z=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

Ответы. 8.1. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **8.2.** $z=2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}i}$.

8.3. $-z=1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

8.4. а) $\bar{z}=-\sqrt{3}-i=2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}i}=2\left(cos\frac{7\pi}{6}+i\,sin\frac{7\pi}{6}\right)$;

б) $\bar{z}=-1-=\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

8.5. а) – 2); б) – 3); в) – 5). **8.6.** а) – 1); б) – 4); в) – 6).

9. Действия над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах

9.1. Представьте результат вычислений в алгебраической и показательной формах:

а) $z_1^2 z_2$, $z_1=2\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\,sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

б) $\frac{z_2}{z_1}$, $z_1=2\left(cos\frac{2\pi}{3}-i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2=4e^{\frac{\pi}{6}i}$; в) $\dfrac{\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)^9 e^{-\frac{\pi}{4}i}}{cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}}$.

9.2. Выполните указанные действия. Найдите вещественные и мнимые части комплексных чисел.

а) $z=4(cos\frac{\pi}{3}-i\,sin\frac{\pi}{3})e^{\frac{\pi}{6}i}$; б) $z=\dfrac{2e^{\frac{4\pi}{3}i}}{cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}}$.

9.3. Представьте в алгебраической форме комплексные числа, противоположные следующим числам:

$$\text{а) } z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})e^{-\frac{\pi}{3}i}\text{; б) } z = \frac{(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}))^5}{e^{\frac{\pi}{2}i}}.$$

9.4. Представьте в алгебраической форме комплексно-сопряженные числа к следующим числам:

$$\text{а) } z = \frac{(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^5}{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}; \quad \text{б) } z = \frac{2e^{\frac{4\pi}{3}i}}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}.$$

9.5. Для комплексных чисел $z_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $z_2 = 0.5e^{\frac{\pi}{3}i}$ выполните указанные действия. Результат вычислений представьте в алгебраической форме.

$$\text{а) } z_1z_2;\ \text{б) } \frac{z_1}{z_2},\ z_2 = 0.5e^{\frac{\pi}{3}i};\ \text{в) } z_1^2;\ \text{г) } \frac{z_1^2}{z_2};\ \text{д) } 8z_1\times z_2^2.$$

9.6. Для комплексных чисел $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ выполните указанные действия. Результат вычислений представьте в различных формах.

$$\text{а) } z_1z_2; \quad \text{б) } \frac{z_1}{z_2}; \quad \text{в) } \frac{z_2}{z_1}.$$

Ответы. 9.1. а) $4e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$; б) $2e^{\frac{5\pi}{6}i} = \left(-\sqrt{3} + i\right)$; в) $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

9.2. а) $Re\, z = 2\sqrt{3}$; $Im\, z = -2$; б) $Re\, z = -\sqrt{3}$; $Im\, z = -1$.

9.3. а) $-z = -2\sqrt{3} + 2i$; б) $-z = -4 - 4i$. **9.4.** а) $\bar{z} = 4 - 4i$; б) $\bar{z} = -\sqrt{3} + i$.

9.5. а) –1; б) $2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$; в) $-2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$; г) –8; д) $-2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$.

9.6. а) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i} = 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\sqrt{3} - i\right)$; б) $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$; в) $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$.

10. Геометрическая интерпретация комплексных чисел в различных формах

10.1. Представьте в различных формах комплексное число z, модуль которого равен 2, изображаемое вектором, образующим угол ψ с положительным направлением оси Oy (против часовой стрелки):

а) $\psi = 30°$; б) $\psi = 135°$.

10.2. Представьте в различных формах комплексное число z, модуль которого равен 2, изображаемое вектором, образующим угол ψ с отрицательным направлением оси Ox (против часовой стрелки):

а) $\psi = 30°$; б) $\psi = 60°$.

Ответы. 10.1. а) $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2(cos120° + i\,sin120°) = -1 + \sqrt{3}i$;

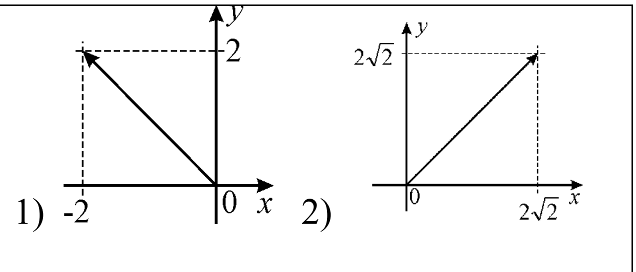
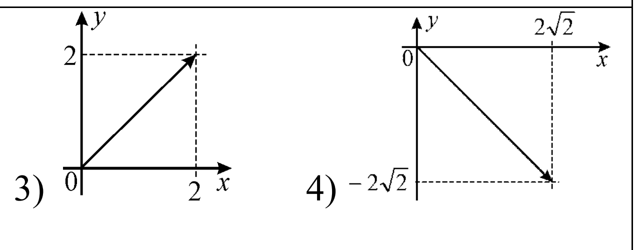
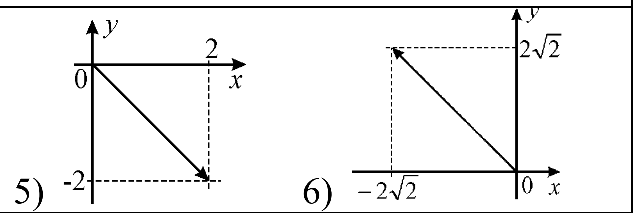
б) $z = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

10.2. а) $z = 2e^{-\frac{5\pi}{6}i} = 2(\cos150° - i\sin150°) = -\sqrt{3} - i$;

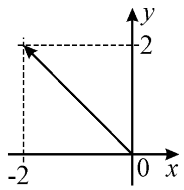
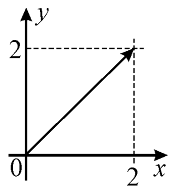
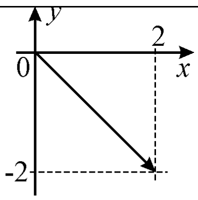
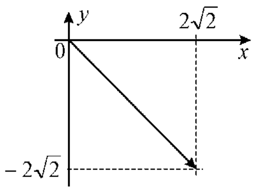
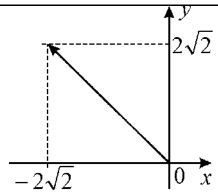
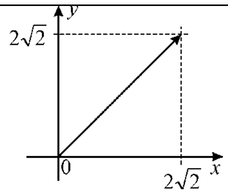
б) $z = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} - i\,sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$.

11. Комплексные числа в тригонометрической форме и их геометрическое изображение

11.1. Установите соответствие между комплексными числами и их геометрическими изображениями:

а) $z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$;	
б) $-\bar{z}$, $z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$;	
в) $-z$, $z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} - i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$.	

11.2. По геометрическим изображениям запишите комплексные числа в тригонометрической форме.

а) 	б) 	в) 
г) 	д) 	е) 

Ответы. 11.1. а) – 1); б) – 3); в) – 5). **11.2.** а) $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

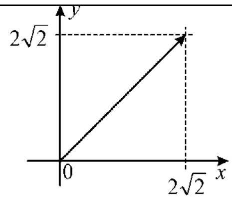
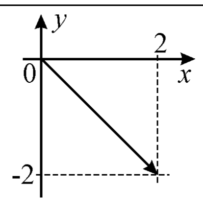
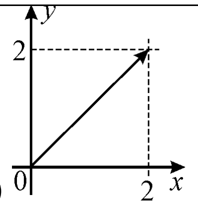
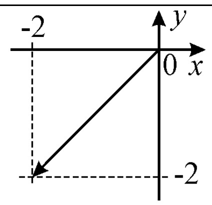
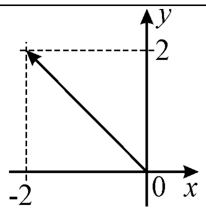
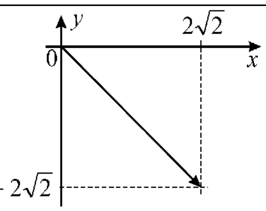
б) $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; в) $z_3 = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

г) $z_4 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; д) $z_5 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

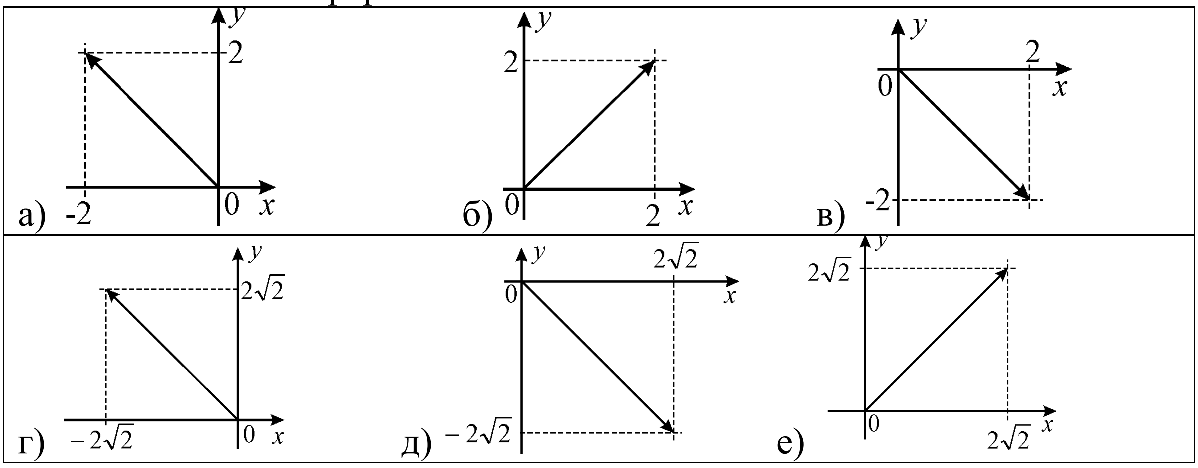
е) $z_6 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

12. Комплексные числа в показательной форме и их геометрическое изображение

12.1. Установите соответствие между комплексными числами и их геометрическими изображениями:

а) $z = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$;	1) 	2) 
б) $\overline{z}$, $z = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$;	3) 	4) 
в) $-z$, $z = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$.	5) 	6) 

12.2. По геометрическим изображениям запишите комплексные числа в показательной форме.



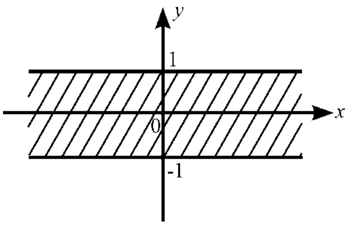
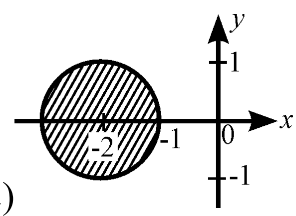
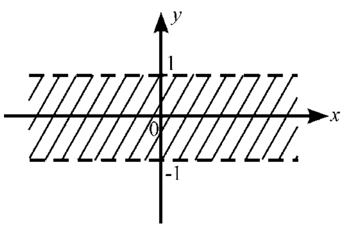
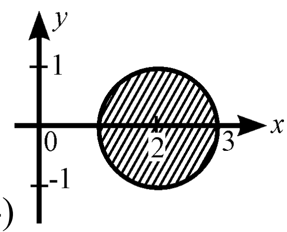
Ответы. 12.1. а) – 2); б) – 3); в) – 5).

12.2. а) $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$; б) $z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$; в) $z_3 = 2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i} = -z_1 = \bar{z}_2$;

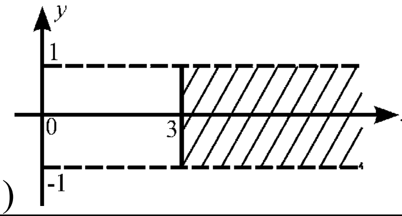
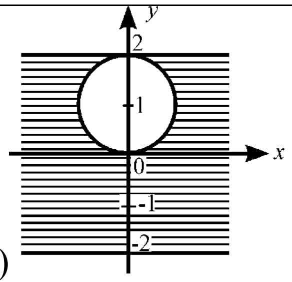
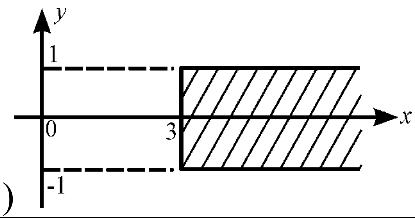
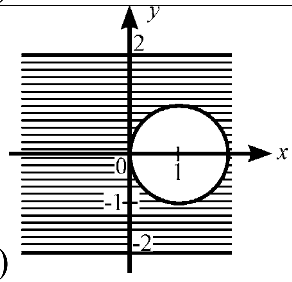
г) $z_4 = 4\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$; д) $z_5 = 4\,e^{-\frac{\pi}{4}i} = 4\,e^{\frac{7\pi}{4}i} = -z_4$; е) $z_6 = 4\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

13. Соответствие между множествами комплексных чисел и их изображением на комплексной плоскости

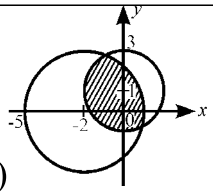
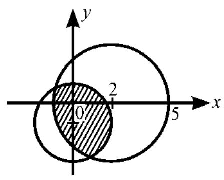
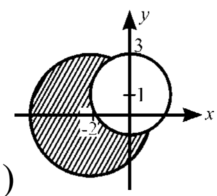
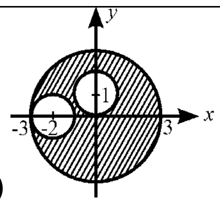
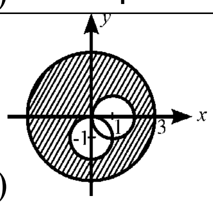
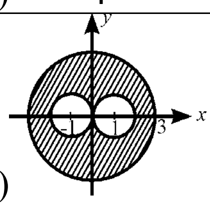
13.1. Установите соответствие между множествами комплексных чисел и их геометрическими изображениями:

Множество в области комплексных чисел	Изображение на комплексной плоскости	
а) $\lvert Im(z+2)\rvert < 1$;	1) 	2) 
б) $\lvert z+2\rvert \le 1$.	3) 	4) 

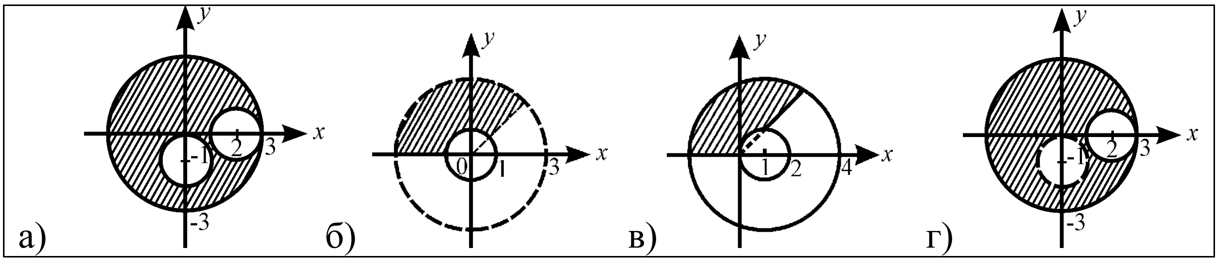
13.2. Установите соответствие между множествами комплексных чисел и их геометрическими изображениями:

Множество в области комплексных чисел	Изображение на комплексной плоскости
а) $\begin{cases} Re(z-1) \ge 2, \\ \lvert Im z \rvert < 1; \end{cases}$	1)  2) 
б) $\begin{cases} -1 \le Im(z+i) \le 3, \\ \lvert z-i \rvert \ge 1. \end{cases}$	3)  4) 

13.3. Установите соответствие между множествами комплексных чисел и их геометрическими изображениями:

Множество в области комплексных чисел	Изображение на комплексной плоскости
а) $\begin{cases} \lvert z-i \rvert \le 2, \\ \lvert z+2 \rvert \le 3; \end{cases}$	1)  2) 
б) $\begin{cases} \lvert z-i \rvert \ge 2, \\ \lvert z+2 \rvert \le 3; \end{cases}$	3)  4) 
в) $\begin{cases} \lvert z \rvert \le 3, \\ \lvert z-1 \rvert \ge 1, \\ \lvert z+i \rvert \ge 1. \end{cases}$	5)  6) 

13.4. Опишите множества комплексных чисел по изображениям на комплексной плоскости.



13.5. Изобразить геометрически области комплексных чисел:

а) $0 < \operatorname{Im} z < 3$; б) $\operatorname{Re} z > -1$; в) $|z+i| \le 4$; г) $|z+1| + |z-3| = 6$.

Ответы. 13.1. а) – 3); б) – 2). **13.2.** а) –1); б) – 2). **13.3.** а) –1); б) – 3); в) – 5).

13.4. а) $\begin{cases} |z| \le 3, \\ |z-2| \ge 1, \\ |z+i| \ge 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 \le |z| < 3, \\ \dfrac{\pi}{4} < arg\, z \le \pi; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 \le |z-1| \le 3, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \pi; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |z| \le 3, \\ |z-2| \ge 1, \\ |z+i| > 1. \end{cases}$

14. Комплексные числа в определителях

14.1. Представьте в алгебраической форме комплексные числа, заданные в виде определителей: а) $z = \begin{vmatrix} 2 & 3+i \\ 5i & i \end{vmatrix}$; б) $z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2-i & i \\ 0 & 1+i & 3i \end{vmatrix}$.

14.2. Представьте в алгебраической форме комплексно-сопряженные числа к числам, заданным в виде определителей:

а) $z = \begin{vmatrix} 3+5i & 3+2i \\ 3-2i & 2-3i \end{vmatrix}$; б) $z = \begin{vmatrix} 3i & 3+4i & 1+i \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3-2i & 2i \end{vmatrix}$.

14.3. Представьте противоположные числа к комплексным числам, заданным в виде определителей:

а) $z = \begin{vmatrix} 2-i & i \\ 1+i & 3i \end{vmatrix}$; б) $z = \begin{vmatrix} 3+5i & 3+2i & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3-2i & 2-3i & 0 \end{vmatrix}$.

14.4. Решите уравнения:

а) $z^2 + \begin{vmatrix} 7+3i & 3 \\ -7i & -3i \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} z & 3-2i \\ 13i & 2-3i \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1-2i & z \\ 1+2i & 5 \end{vmatrix} = 0$.

14.5. Установите соответствие между комплексными числами, заданными в виде определителей и в показательной форме:

а) $z = \begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i \\ -2 & 1-i \end{vmatrix}$;	1) $4e^{\frac{\pi}{3}i}$; 2) $8e^{\frac{2\pi}{3}i}$;
б) $\bar{z}$, $z = \begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i \\ -2 & 1-i \end{vmatrix}$;	3) $8e^{\frac{4\pi}{3}i}$; 4) $4e^{-\frac{\pi}{3}i}$;
в) $-z$, $z = \begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i \\ -2 & 1-i \end{vmatrix}$.	5) $4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; 6) $8e^{\frac{\pi}{3}i}$.

14.6. Установите соответствие между комплексными числами, заданными в виде определителей и в тригонометрической форме:

а) $z = \begin{vmatrix} -2+i & -i \\ 1+2i & 3i \end{vmatrix}$;	1) $10\left(cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $5\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} - i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
б) $\bar{z}$, $z = \begin{vmatrix} -2+i & -i \\ 1+2i & 3i \end{vmatrix}$;	3) $10\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $5\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
в) $-z$, $z = \begin{vmatrix} -2+i & -i \\ 1+2i & 3i \end{vmatrix}$.	5) $10\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $5\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$.

14.7. Комплексные числа, заданные в виде определителей, представьте в показательной форме:

а) $z_1 = \begin{vmatrix} 1+i & -\sqrt{3}\,i \\ -2 & -1+i \end{vmatrix}$; б) $z_2 = \begin{vmatrix} 2-\sqrt{3}\,i & -i \\ \sqrt{3}\,i & -i \end{vmatrix}$; в) $z_3 = \begin{vmatrix} 2-\sqrt{3}\,i & -2i \\ \sqrt{3}\,i & -2i \end{vmatrix}$.

14.8. Комплексные числа, заданные в виде определителей, представьте в тригонометрической форме:

а) $z_1 = \begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i \\ 2 & 1-i \end{vmatrix}$; б) $z_2 = \begin{vmatrix} 2+\sqrt{3}\,i & i \\ \sqrt{3}\,i & -i \end{vmatrix}$; в) $z_3 = \begin{vmatrix} -2+\sqrt{3}\,i & i \\ -\sqrt{3}\,i & i \end{vmatrix}$.

14.9. Установите соответствие между комплексными числами, заданными в виде определителей и в показательной форме:

а) $z=\begin{vmatrix} 1 & 7-i & 4i \\ 0 & 2+i & -i \\ 0 & 1-2i & -3i \end{vmatrix}$;	1) $5\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; 2) $10e^{-\frac{3\pi}{4}i}$;
б) $\bar{z}$, $z=\begin{vmatrix} 1 & 7-i & 4i \\ 0 & 2+i & -i \\ 0 & 1-2i & -3i \end{vmatrix}$;	3) $5\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; 4) $10e^{\frac{5\pi}{4}i}$;
в) $-z$, $z=\begin{vmatrix} 1 & 7-i & 4i \\ 0 & 2+i & -i \\ 0 & 1-2i & -3i \end{vmatrix}$.	5) $5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; 6) $10e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

14.10. Установите соответствие между комплексными числами, заданными в виде определителей и в тригонометрической форме:

а) $z=\begin{vmatrix} 2-i & 3 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+2i & 2 & 3i \end{vmatrix}$;	1) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
б) $\bar{z}$, $z=\begin{vmatrix} 2-i & 3 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+2i & 2 & 3i \end{vmatrix}$;	3) $10\left(cos\frac{5\pi}{4}+i\,sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $5\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}-i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
в) $-z$, $z=\begin{vmatrix} 2-i & 3 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+2i & 2 & 3i \end{vmatrix}$.	5) $10\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $5\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}-i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$.

14.11. Комплексные числа, заданные в виде определителей, представьте в показательной форме:

$$\text{а) } z_1=\begin{vmatrix} 0 & 1+i & \sqrt{3}\,i \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -1+i \end{vmatrix};\ \text{б) } z_2=\begin{vmatrix} 1+i & \sqrt{3}\,i & i \\ -2 & 1-i & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \text{в) } z_3=\begin{vmatrix} 2-\sqrt{3}\,i & -2i & 0 \\ -\sqrt{3}\,i & 2i & 0 \\ 3i & 11 & 1 \end{vmatrix}.$$

14.12. Комплексные числа, заданные в виде определителей, представьте в различных формах:

$$\text{а) } z_1=\begin{vmatrix}0 & 1+i & \sqrt{3}\,i\\ 0 & 2 & 1-i\\ 1 & 2 & 1-i\end{vmatrix};\ \text{б) } z_2=\begin{vmatrix}2+\sqrt{3}\,i & -i & 2\\ 0 & 0 & -1\\ -\sqrt{3}\,i & -i & i\end{vmatrix};\ \text{в) } z_3=\begin{vmatrix}-2+\sqrt{3}\,i & i & 0\\ -\sqrt{3}\,i & i & 0\\ 2i & -2 & 1\end{vmatrix}.$$

Ответы. 14.1. а) $5–13i$; б) $4+5i$. **14.2.** а) $8–i$; б) $13+5i$.

14.3. а) $–4–5i$; б) $8+i$.

14.4. а) $3i; –3i$; б) $–5+12i$; в) $–3–4i$.

14.5. а) – 1); б) – 4); в) – 5).

14.6. а) – 2); б) – 4); в) – 6).

14.7. а) $4e^{-\frac{2\pi}{3}i}=4e^{\frac{4\pi}{3}i}$; б) $4e^{-\frac{5\pi}{6}i}=4e^{\frac{7\pi}{6}i}$; в) $8e^{-\frac{5\pi}{6}i}=8e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

14.8. а) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

б) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

в) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

14.9. а) – 1); б) – 3); в) – 5).

14.10. а) – 1); б) – 6); в) – 4).

14.11. а) $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$; б) $4e^{\frac{\pi}{3}i}$; в) $8e^{\frac{\pi}{6}i}$.

14.12. а) $2\left(1-\sqrt{3}i\right)=4e^{-\frac{\pi}{3}i}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $2\left(\sqrt{3}-i\right)=4e^{-\frac{\pi}{6}i}=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $2\left(-\sqrt{3}-i\right)=4e^{-\frac{5\pi}{6}i}=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Библиографический список

1. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1981. – 302 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М. : Наука, 1971. – 431 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1965. – 716 с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М. : Наука, 1987. – 352 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – ч.1. – 464 с.
6. Сборник задач по алгебре / под ред. А.М. Кострикина. – М. : Наука, 1987. – 352 с.
7. Фадеев Д.К., Соминский М.С. Сборник задач по высшей математике. – М. : Наука, 1972. – 304 с.
8. Толстых О.Д., Попова Л.Н. Комплексные числа. Основы линейной алгебры. Системы линейных уравнений: учеб. пособие. – Иркутск : 2003. – 109 с.
9. Степанов А.П. Расчет и исследование линейных электрических цепей: учеб. пособие по теоретическим основам электротехники для студентов технических вузов. – Иркутск : 2003. – 262 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Методы, разработанные для электрических цепей постоянного тока на основе закона Ома, неэффективны в расчетах цепей переменного тока. При расчете линейных электрических цепей на основе мгновенных значений токов и напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону, возникают большие сложности. Эффективный метод расчета цепей переменного тока основан на применении комплексных чисел.

Применение комплексного (символического) метода расчета позволяет исключить при расчетах одну из координат – частоту питающей сети. Это возможно в силу того, что все токи и падения напряжения в линейной электрической цепи изменяются с одной и той же частотой. Указанный метод позволяет избавиться от мгновенных синусоидальных значений токов и напряжений, что приводит к значительному упрощению расчетов.

В электротехнике принято обозначать мнимую единицу j: $j^2 = -1$; *аргумент комплексного числа, как правило, определяется в градусах.*

Комплексный метод расчета линейных электрических цепей синусоидального тока

1⁰. Осуществляется переход из множества мгновенных значений токов и падений напряжений во множество их комплексных значений (например, вместо мгновенного значения тока $i(t)$ рассматривают его комплексную амплитуду $\dot{I}_m$).

2⁰. В комплексной области осуществляется расчет электрической цепи с использованием векторов (комплексов) токов и напряжений любым из методов расчета цепей постоянного тока (подробно см., например, [9]).

3⁰. После нахождения комплексного тока (падения напряжения) осуществляется обратный переход, то есть находится закон изменения требуемого тока (напряжения). Последнее обычно не делают в силу того, что в найденном комплексном токе (падении напряжения) содержится полная информация о соответствующем законе изменения.

Преобразование мгновенных синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

Ток изменяется по синусоидальному закону $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$,

где I_m – амплитуда; $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний,

$\omega t+\varphi$ – фаза колебаний; φ – начальная фаза;

$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f$ – круговая частота; $f=\dfrac{1}{T}$ – частота (в гц).

Введем комплексную амплитуду тока

$$\dot{I}_m=I_m e^{j\varphi},\ j \text{ – мнимая единица, } j^2=-1.$$

Умножая комплексную амплитуду тока на оператор вращения $e^{j\omega t}$ и применяя формулу Эйлера, получим

$$\dot{I}_m e^{j\omega t}=I_m e^{j\varphi}e^{j\omega t}=I_m e^{j(\omega t+\varphi)}=I_m\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)\right).$$

Отсюда следует связь синусоидального тока $i(t)$ с комплексной амплитудой, а именно, ток равен мнимой части комплексной амплитуды, умноженной на оператор вращения:

$$i(t)=\mathrm{Im}\left(I_m e^{j\omega t}\right)=I_m\sin(\omega t+\varphi).$$

Аналогично, напряжение и ЭДС соответственно равны

$$u(t)=\mathrm{Im}\left(\dot{U}_m e^{j\omega t}\right),\qquad e(t)=\mathrm{Im}\left(\dot{E}_m e^{j\omega t}\right),$$

где $\dot{U}_m=U_m e^{j\varphi_u}$, $\dot{E}_m=E_m e^{j\varphi_e}$ – комплексные амплитуды напряжения и ЭДС соответственно.

В расчетах обычно используются векторы (комплексы) действующих токов, напряжений и ЭДС вместо их комплексных амплитуд. При отсутствии каких-то дополнительных условий имеют место следующие формулы:

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{I}_m\sqrt{2}}{2}=\frac{I_m\sqrt{2}}{2}e^{j\varphi}=Ie^{j\varphi},$$

$$\dot{U}_m=\frac{\dot{U}_m\sqrt{2}}{2}=\frac{U_m\sqrt{2}}{2}e^{j\varphi_u}=Ue^{j\varphi_u},$$

$$\dot{E}_m=\frac{\dot{E}_m\sqrt{2}}{2}=\frac{E_m\sqrt{2}}{2}e^{j\varphi_e}=Ee^{j\varphi_e},$$

где $\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{E}$ – векторы действующих значений;

I, U, E – действующие значения тока, напряжения и ЭДС;

φ, φ_u, φ_e – начальные фазы.

При переходе в комплексную область электрические схемы не изменяются, Законы Ома, Кирхгофа при этом записываются в других обозначениях сопротивлений, токов, напряжений, ЭДС. Схемы замещения идеальных элементов линейных электрических цепей можно найти в учебных пособиях по теоретическим основам электротехники.

Примечания.

1) При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа принято, что токи, вытекающие из узлов или сечений, положительны, а токи, втекающие в узлы или сечения — отрицательны.

2) При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа принято, что напряжения на ветвях положительные, если направление контура совпадает с направлением тока ветви. Если направление контура противоположно направлению тока ветви, то напряжение на ветви отрицательное.

Комплексное сопротивление

Приведем формулы для определения полных комплексных сопротивлений последовательного и параллельного соединения элементов.

Пусть Z_k – комплексное сопротивление k - ого элемента.

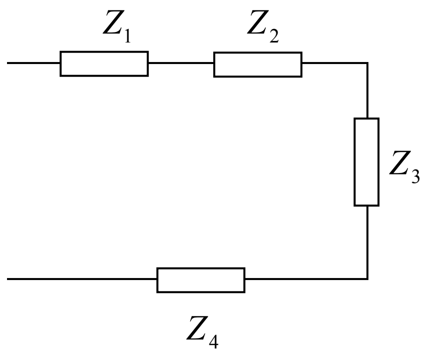


Рис. П. 1

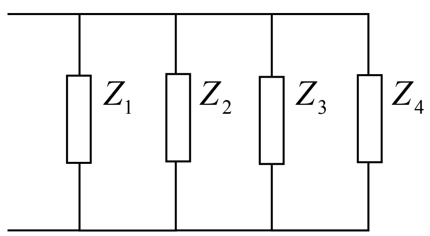


Рис. П. 2

Для цепочки последовательно соединенных элементов (рис. П. 1) полное комплексное сопротивление равно

$$Z = \sum_k Z_k .$$

При параллельном соединении элементов (рис. П. 2) полное комплексное сопротивление определяется следующим образом:

$$Z = \frac{1}{Y}, \ Y = \sum_k Y_k, \ Y_k = \frac{1}{Z_k}.$$

Здесь Y – полная комплексная проводимость, Y_k – проводимость каждой из параллельных ветвей ($k = 1, 2, 3, 4$).

***Пример* 1.** Расчет электрической цепи со смешанным соединением (рис. П. 3) при следующих данных:
$Z_1 = 5 + 8j, \ Z_2 = 20(1 + j), \ Z_3 = 20(1 + j), \ U = 220$ в.

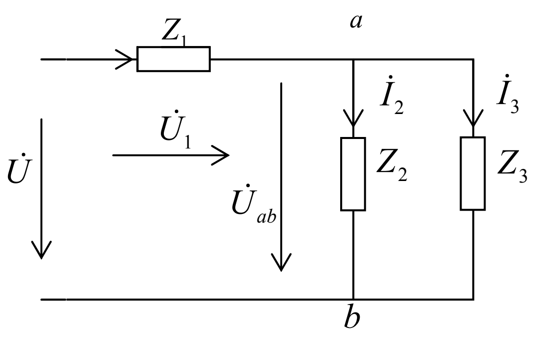


Рис. П. 3

Решение. Для сравнения трудоемкости вычислений приведем расчет цепи, используя комплексные числа в алгебраической и показательной формах, без подробных пояснений.

1) Сначала найдем эквивалентное сопротивление параллельного участка:

$$Z_{23}=\frac{1}{\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3}}=\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3},\quad Z_{23}=\frac{20(1+j)\cdot 20(1+j)}{20(1+j)+20(1+j)};$$

$$Z_{23}=\frac{400(1+j)^2}{40(1+j)};\quad Z_{23}=10(1+j)=10\cdot\sqrt{2}e^{j45^0}\approx 14{,}14e^{j45^0}\text{ Ом.}$$

2) Полное комплексное сопротивление цепи:

$$Z=Z_1+Z_{23},\quad Z=5+8j+10(1+j),$$

$$Z=15+18j\approx 23{,}43e^{j50{,}2^0}\text{ Ом.}$$

3) Соответствующие токи определим по закону Ома $\dot U=Z\dot I$, используя действия над комплексными числами в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.

а) $I_1=\dfrac{\dot U}{Z}$; $\dot I_1=\dfrac{220}{15+18j}=\dfrac{220(15-18j)}{549}$ или

$$\dot I_1=\frac{220}{\sqrt{549}e^{j50{,}2^0}}\approx 9{,}39e^{-j50{,}2^0}=6{,}011-7{,}213j\text{ А.}$$

б) $\dot U_{ab}=\dot I_1 Z_{23}$, $\dot I_2=\dfrac{\dot U_{ab}}{Z_2}$;

$$\dot U_{ab}=\frac{220(15-18j)}{549}\cdot 10(1+j)=\frac{2200(1-j)}{183}\approx 132{,}24-12{,}02j=132{,}79e^{-j50{,}2^0}\text{ В;}$$

$$\dot U_{ab}\approx 9{,}39e^{-j50{,}2^0}\cdot 14{,}14^{j45^0}=132{,}77e^{-j5{,}2^0}=132{,}225-12{,}020j\text{ В;}$$

$$\dot I_2=\frac{220(15-18j)10(1+j)}{549\cdot 20(1+j)}=\frac{110(15-18j)}{549}=3{,}0055-3{,}6066j=4{,}695e^{-j50{,}2^0}\text{ А;}$$

иначе

$$\dot I_2=\frac{132{,}77e^{-j5{,}2^0}}{20(1+j)}=\frac{132{,}77e^{-j5{,}2^0}}{20\sqrt{2}e^{j45^0}}=4{,}694e^{-j50{,}2^0}=3{,}005-3{,}606j;$$

$$\dot I_3=\frac{\dot U_{ab}}{Z_3}=\dot I_2,\quad\text{так как } Z_2=Z_3.$$

4) По закону Кирхгофа $\dot I_1=\dot I_2+\dot I_3$.

В алгебраической форме равенство, очевидно, выполнено:

$$\frac{220(15-18j)}{549}=\frac{110(15-18j)}{549}+\frac{110(15-18j)}{549}.$$

Если рассматривать результирующие токи, вычисленные с помощью показательной формы комплексных чисел, то видно, что разница между $\dot{I}_1 = 6{,}011 - 7{,}213j$ и $\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 2\dot{I}_2 = 6{,}01 - 7{,}212j$ незначительна.

Очевидно, что вычисления в алгебраической форме более громоздкие, чем в показательной, а в результатах получается незначительная разница из-за погрешности округления.

***Пример* 2.** Определить мгновенные значения токов в ветвях для схемы, приведенной на рис. П. 4. Параметры элементов схемы имеют следующие значения: $L = 1$ мГн, $C = 100$ мкФ, $r = 5$ Ом; $u_1 = 100\sin 5000t$, В, $u_2 = 100\cos 5000t$, В.

Решение. Определим индуктивное и емкостное сопротивления цепи:

$$x_L = \omega L = 5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом},$$

$$x_C = 1/\left(\omega C\right) = 1/\left(5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}\right) = 10/5 = 2 \text{ Ом}.$$

Комплексные сопротивления цепи имеют значения:

$$Z_l = j5 \text{ Ом}, Z_c = -j2 \text{ Ом}.$$

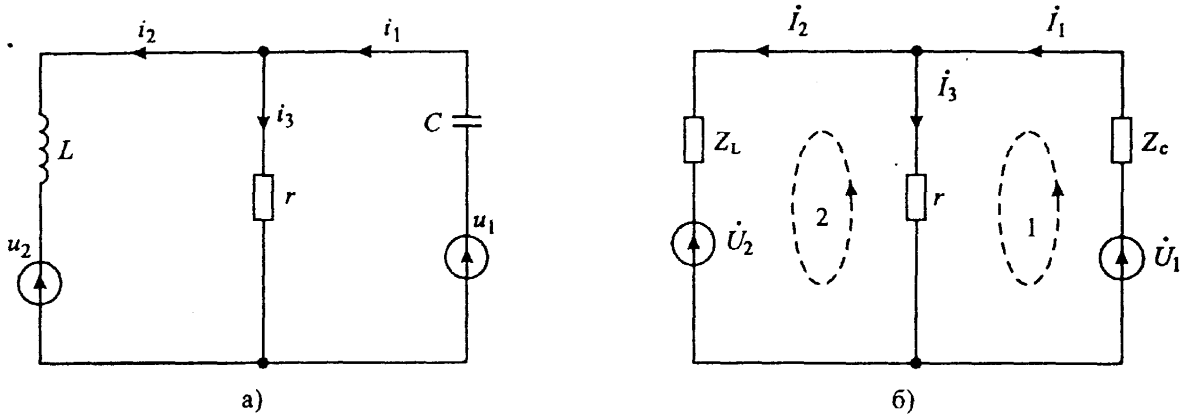


Рис. П. 4. Основная (а) и расчетная (б) схема цепи

Найдем комплексные значения напряжений источников:

$$\dot{U}_1 = 100 \text{В}, \quad \dot{U}_2 = 100e^{j90^0} = 100j \text{ в}.$$

Выберем направления токов в ветвях и составим уравнения Кирхгофа для контуров 1, 2, используя обозначения схемы, приведенной на рис. П. 4 (б):

$$\begin{cases} \dot{I}_1 Z_c + \dot{I}_3 r = \dot{U}_1, \\ \dot{I}_2 Z_L - \dot{I}_3 r = -\dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{I}_3. \end{cases}$$

После подстановки значения тока $\dot{I}_3$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(Z_c + r) - \dot{I}_2 r = \dot{U}_1, \\ -\dot{I}_1 r + \dot{I}_2(Z_l + r) = -\dot{U}_2. \end{cases}$$

После подстановки значений сопротивлений и комплексных напряжений запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1(5 - j2) - \dot{I}_2 = 100, \\ -\dot{I}_1 5 + \dot{I}_2(5 + j5) = -100j. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений можно найти методом Крамера (с помощью определителей)

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 - 2j & -5 \\ -5 & 5 + 5j \end{vmatrix} = (5 - 2j)(5 + j5) - 25 = 10 + j15 \approx 18e^{j56^0},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -5 \\ -100j & 5 + 5j \end{vmatrix} = 500,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (5 - j2) & 100 \\ -5 & -100j \end{vmatrix} = 300 - j500 = 580e^{-j59^0}.$$

Подставляя значения определителей, найдем комплексные токи в ветвях схемы

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \dot{I}_1 = \frac{500}{18e^{j56^0}} \approx 27{,}8e^{-j56^0},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dot{I}_2 = \frac{580e^{-j59^0}}{18e^{j56^0}} \approx 32e^{-j115^0}.$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \approx 28{,}8e^{-j56^0} - 32e^{-j115^0} \approx 30e^{-j12^0}.$$

Используя комплексные значения токов ветвей, запишем их мгновенные значения

$$i_1 = 27{,}8\cos\left(5000t - 56^0\right) \text{ А},$$

$$i_2 = 32\cos\left(5000t - 115^0\right) \text{ А},$$

$$i_3 = 30\cos\left(5000t + 12^0\right) \text{ А}.$$

Векторная диаграмма токов в цепи на комплексной плоскости приведена на рис. П. 5.

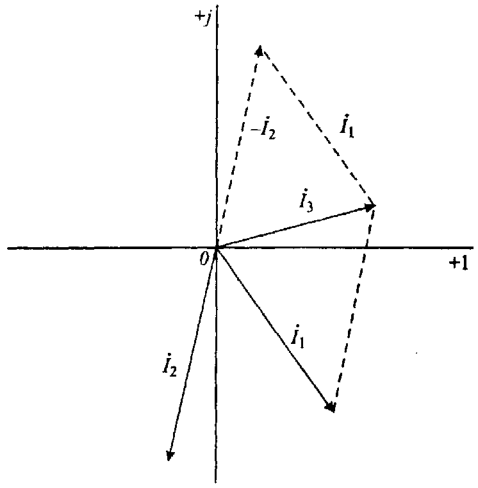


Рис. П. 5. Векторная диаграмма токов в цепи

***Пример* 2.** Составить уравнения Кирхгофа для цепи, приведенной на рисунке П. 6.
Запишем комплексные значения напряжений и токов в ветвях.

Решение. В схеме, изображенной на рис. П. 6, имеется 4 узла, для которых можно записать три независимых уравнения по первому закону Кирхгофа. Выберем для составления этих уравнений узлы 2, 3 и сечение S_{14}.

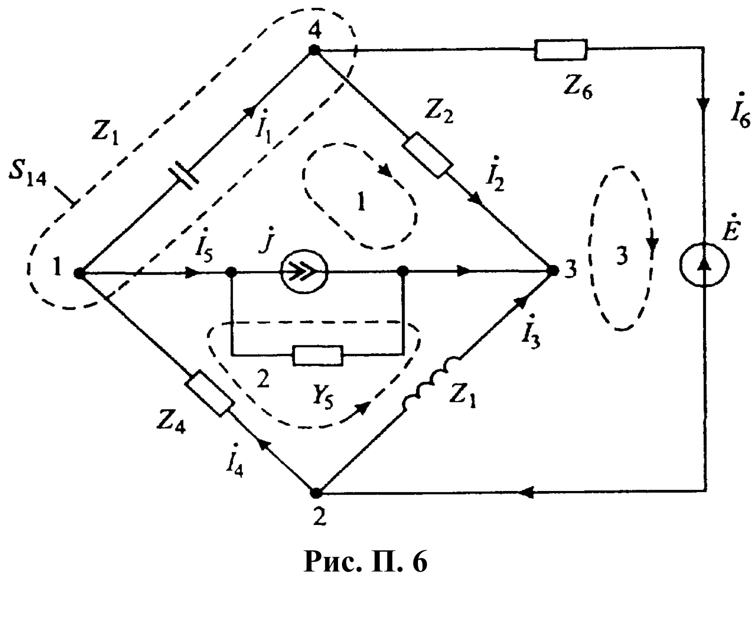


Рис. П. 6

Для выбранных узлов и сечения можно записать уравнения в комплексной форме:

1) уравнение для узла 2: $\dot I_3 + \dot I_4 - \dot I_6 = 0$;

2) уравнение для узла 3 : $-\dot I_2 - \dot I_3 - \dot I_5 = 0$;

3) уравнение для сечения S_{14} : $\dot I_2 + \dot I_5 + \dot I_6 - \dot I_4 = 0$.