Simulación computacional

PhD Jorge Rudas

INFOTEP
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Matrices de transformación homogéneas

- Para representar la posición y orientación de un sistema de referencia en el espacio 3D, se pueden utilizar matrices de transformación homogéneas

Matriz transformación homogénea 3D

Orientación *Traslación*

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_{3\times 3}} & \boxed{\mathbf{t}_{3\times 1}} \\ \boxed{\mathbf{0}_{1\times 3}} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Perspectiva *Escala*

$\mathbf{H} \in \mathcal{R}^{4\times 4}$

$^{V}\bar{\mathbf{p}} = {}^{V}\mathbf{H}_{B}\, {}^{B}\bar{\mathbf{p}}$

- **H** si solo existe traslación entre dos sistemas de referencia

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{t}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$$

- **H** si solo existe rotación respecto a un eje de referencia en un sistema de coordenadas

$$\mathbf{H}(x,\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(z,\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **H** para rotaciones y luego traslaciones

$$\mathbf{H}((x,\phi),\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & t_y \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}((y,\theta),\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}((z,\psi),\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & t_x \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **H** para traslación y luego rotación

$$\mathbf{H}(\mathbf{t},(x,\phi),) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & t_y\cos(\phi) - t_z\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & t_y\sin(\phi) + t_z\cos(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{t},(y,\theta)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & t_x\cos(\theta) + t_z\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & t_z\cos(\theta) - t_x\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{t},(z,\psi)) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & t_x\cos(\psi) - t_y\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & t_x\sin(\theta) + t_y\cos(\psi) \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composición de matrices de transformación homogeneas

- Debido a la capacidad de representar orientación y traslación respecto a diferentes sistemas de referencia, las matrices homogéneas pueden utilizarse para representar múltiples traslaciones y rotaciones.

$$H = H(z,\psi)H(y,\theta)H(x,\phi)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \sin(\psi)\cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\psi) + \sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta) + \cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = H(x,\phi)H(y,\theta)H(z,\psi)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & -\sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\phi) & -\sin(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta) + \cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ \sin(\phi)\sin(\psi) - \sin(\theta)\cos(\phi)\cos(\psi) & \sin(\phi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$