

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 11

Faktoryzacja QR

13 czerwca 2025

Przydatne funkcje

- Matlab: `qr`
- Python NumPy: `numpy.linalg.qr`

Zadanie 1 Faktoryzacja QR metodą Grama-Schmidta

1. Napisz funkcję dokonującą faktoryzacji QR macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ klasyczną metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta:

Dla $k = 1$:

$$\mathbf{u}_1 \leftarrow \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad (1)$$

Dla $k > 1$:

$$\mathbf{u}_k \leftarrow \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{u}_i \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_k \leftarrow \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|} \quad (3)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{a}_3 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

2. Przetestuj zaimplementowaną metodę porównując wyniki uzyskane z jej pomocą z wynikami zwracanymi przez funkcję biblioteczną. W testach wykorzystaj 4-5 macierzy losowych o różnym rozmiarze.
3. Wygeneruj 30-50 przykładowych macierzy 8×8 o różnym wskaźniku uwarunkowania (stosunek największej do najmniejszej wartości osobliwej). Wykorzystaj w tym celu SVD oraz biblioteczną funkcję realizującą dekompozycję QR (potrzebne będą dwie losowe macierze ortogonalne oraz diagonalna macierz odpowiednio szybko malejących wartości osobliwych).
4. Dla każdej z uzyskanych w ten sposób macierzy \mathbf{A}_i wyznacz faktoryzację QR korzystając z zaimplementowanej funkcji ($\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$). Przedstaw zależność $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i\|$ od $\mathbf{cond}(\mathbf{A}_i)$.
5. Zinterpretuj wyniki. Jaka jest przyczyna uzyskanych rozbieżności? Od czego zależy wielkość rozbieżności?

Zadanie 2 Rozwiązywanie układów równań metodą QR

Napisz funkcję rozwiązującą nadokreślony układ równań liniowych metodą QR. Następnie wykorzystaj ją do rozwiązania problemu aproksymacji średniokwadratowej dla zbioru punktów podanego tabeli poniżej. Przyjmij model postaci:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

. Przedstaw wizualizację uzyskanego wyniku (punkty oraz funkcja aproksymująca f).

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4