Teoremas e Funções

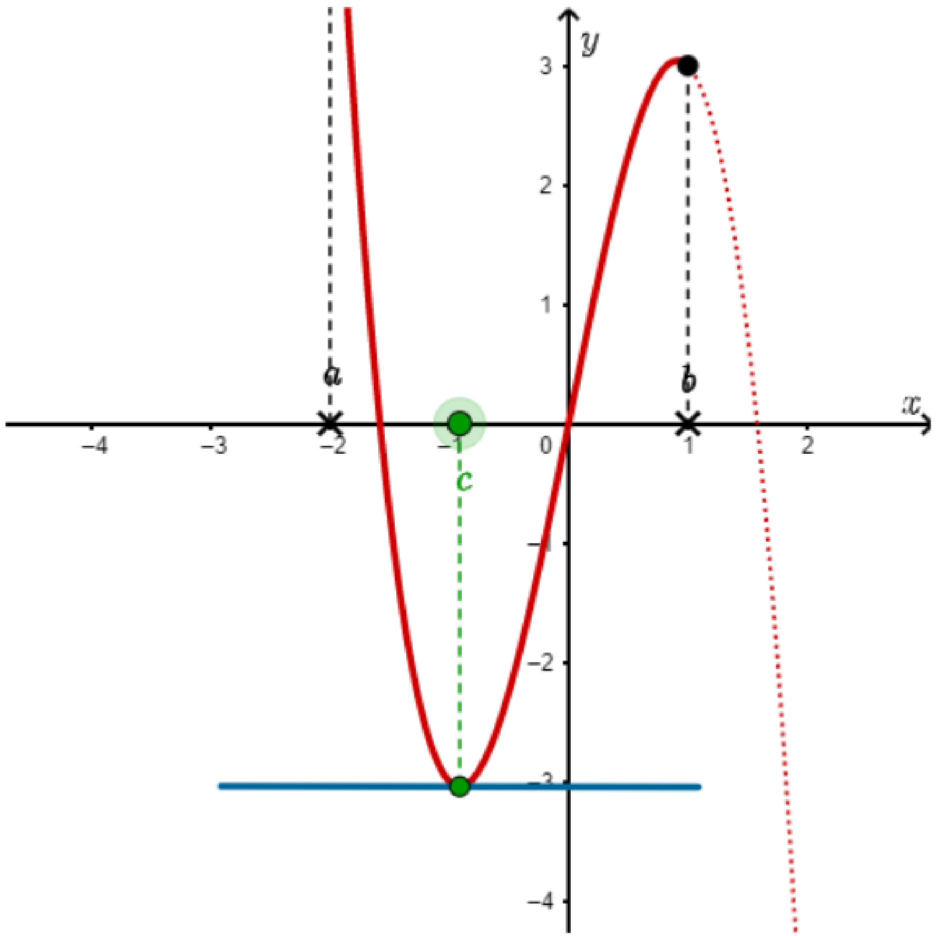
Nesta aula vamos entender mais sobre as aplicações de limites e derivados por meio do teorema de Rolle, do teorema do valor médio, das funções crescentes e das funções decrescentes.

Teorema de Rolle

O Teorema de Rolle é um dentre dois teoremas importantes no estudo do Cálculo. O teorema de Rolle é existencial, pois, considerando e respeitando determinadas condições, o teorema afirma a existência de um dado extremo. Porém, não afirma o caminho para encontrar esse dado extremo.

Michel Rolle, um estudioso francês das técnicas do Cálculo, analisando estas técnicas com mais detalhes e esclarecimentos, percebeu que alguns métodos utilizados nas técnicas dos Cálculos realmente faziam sentido. Com isso, publicou o Teorema de Rolle.

O Teorema de Rolle consiste em: considerando uma função f e f contínua em um intervalo fechado [a,b]. Considerando f uma função diferenciável no intervalo aberto]a,b[. Podemos dizer que para f(a) = f(b), existe no mínimo um valor c no intervalo aberto]a,b[de forma que f'(c) = 0.



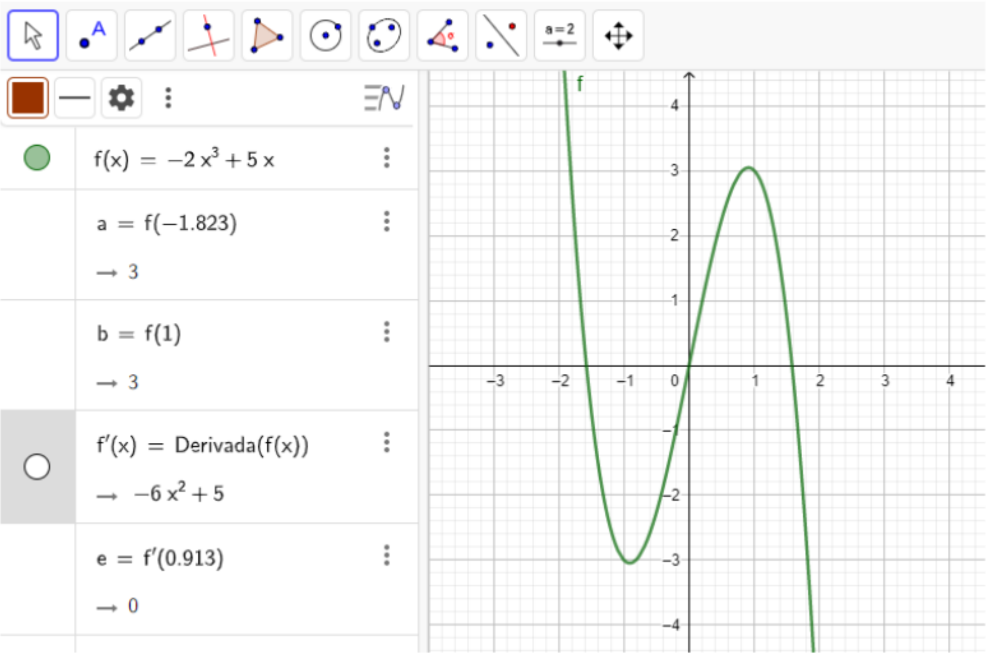
Vamos exemplificar para entender melhor o Teorema de Rolle. Vamos considerar a função $f(x) = -2x^3 + 5x$. Para esta função, vamos considerar um intervalo para os valores de

$a = -1.823$ e $b = 1$.

Veja que temos $f(a) = 3$ e $f(b) = 3$, $f(a) = f(b)$ como no Teorema de Rolle. Isso significa que existe um valor c, neste intervalo $]-1.823, 1[$, de forma que $f'(c) = 0$.

Se considerarmos $c = -0{,}913$, $f'(c) = 0$.

Observe como fica o gráfico, com todos estes valores.



Teorema do Valor Médio

O Teorema do Valor Médio é um dentre dois teoremas importantes no estudo do Cálculo. O teorema do Valor Médio é existencial, pois, considerando e respeitando determinadas condições, o teorema afirma a existência de um dado extremo. Porém, não afirma o caminho para encontrar esse dado extremo.

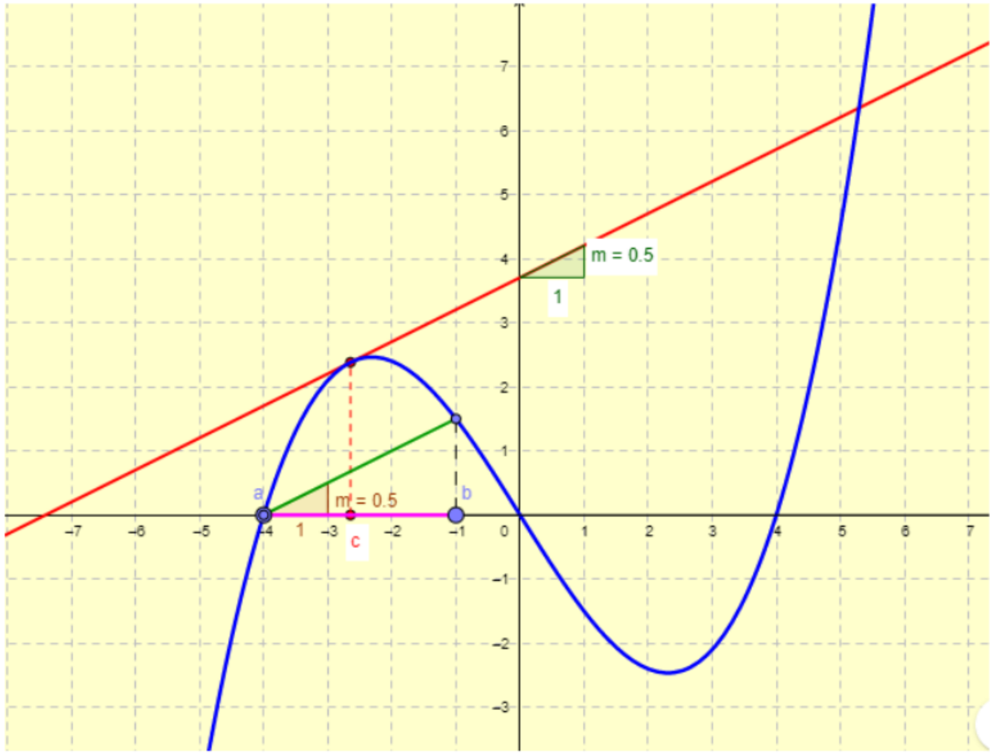
O Teorema do Valor Médio está relacionado com o Teorema de Rolle. O Teorema do Valor Médio tem esse nome porque em algum momento, por exemplo, um veículo que teve a velocidade média em determinado percurso medido em 50 quilômetros por hora, esteve em alguns momentos mais rápido ou mais lento do que a média de 50 quilômetros por hora.

O que se deve observar é que, independente destes momentos mais rápidos ou mais lentos, comparados com o valor da velocidade média, o valor da velocidade média foi o mesmo que da velocidade escalar instantânea, em determinado momento.

Para o Teorema do Valor Médio, consideramos uma função f e f contínua em um intervalo fechado [a,b]. Considerando f uma função diferenciável no intervalo aberto]a,b[. Podemos dizer que existe um valor c pertencente ao intervalo]a,b[de forma que:

$f'(c) = [f(b) – f(a)] / (b – a)$, ou

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$



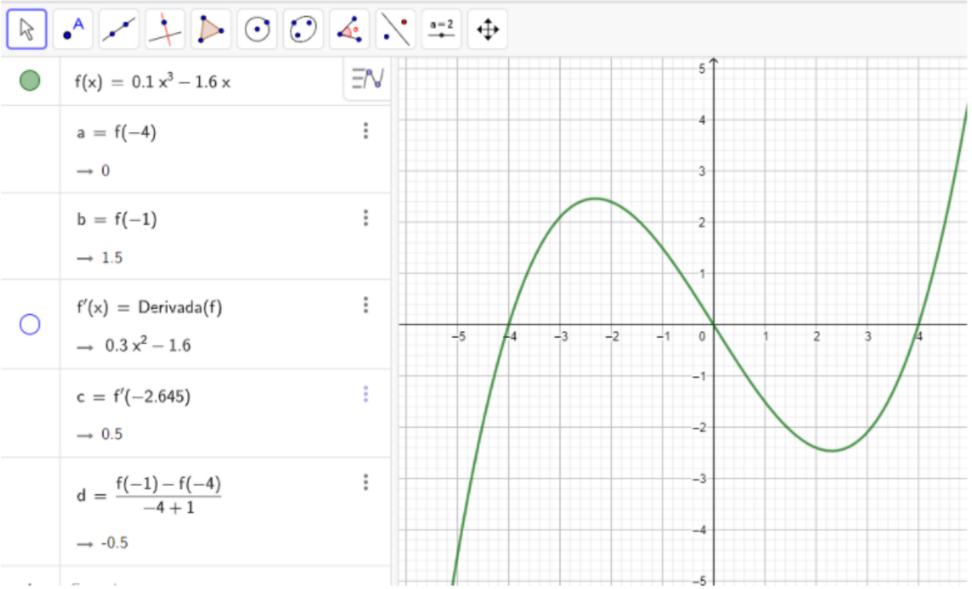
O teorema do valor médio diz que existe pelo menos um ponto em que esta relação acontece, ou seja, é importante ressaltar que pode haver mais de um ponto nas condições estabelecidas pelo teorema.

Vamos exemplificar para entender melhor o Teorema do Valor Médio. Vamos considerar a função $f(x) = 0.1x^3 - 1.6x$. Para esta função, vamos considerar um intervalo para os valores de $a = -4$ e $b = -1$.

Veja que temos $f(-4) = 0$ e $f(-1) = 1.5$, $f(a) = f(b)$ como no Teorema do Valor Médio. Isso significa que existe um valor c, neste intervalo]-1.823, 1[, de forma que $f'(c) = 0.5$.

Se considerarmos $c = -2{,}645$, $f'(c) = 0.5$, ou seja, $f'(c) = [f(-1) - f(-4)] / (-4 - (-1)) = 0.5$.

Observe como fica o gráfico, com todos estes valores.



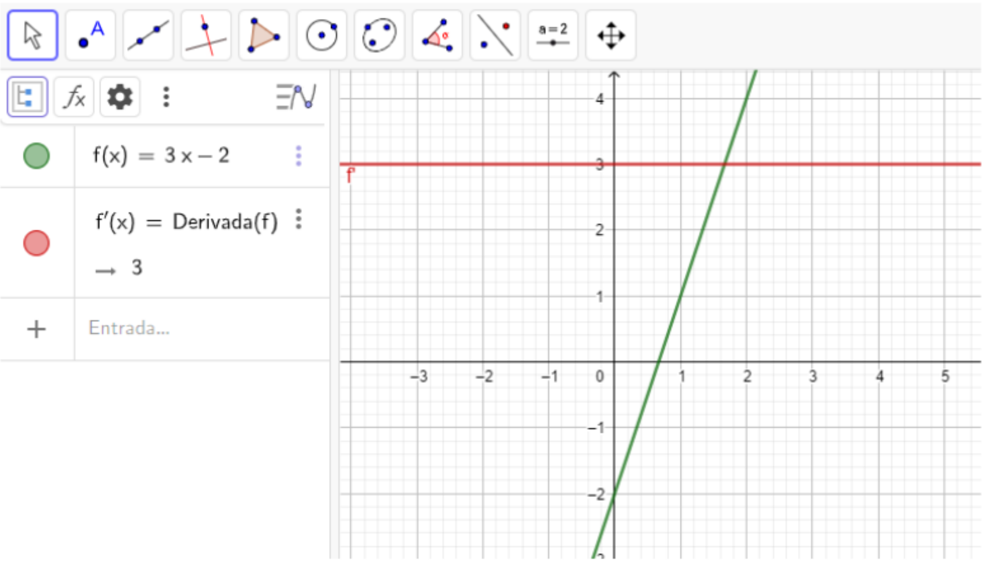
Funções Crescentes

O Teorema do Valor Médio é utilizado para demonstrar outros teoremas, um deles o teorema que permite determinar o intervalo de crescimento de uma função.

É possível obter o intervalo em que a função está em crescimento com a análise do sinal da derivada desta função.

O Teorema para determinar se uma função é crescente, considera uma função contínua f, em determinado intervalo fechado [a, b]. Se esta função f é derivável no intervalo aberto
]a, b[, então, considerando $x \in]a, b[$, tem-se que se a derivada $f'(x) > 0$, então, diz-se que a função f é crescente no intervalo]a, b[.

Observe que para a função $f(x) = 3x - 2$, a sua derivada é uma função constante em 3,
$f'(x) = 3$, neste caso, como $f'(x) > 0$, então a função f(x) é crescente.



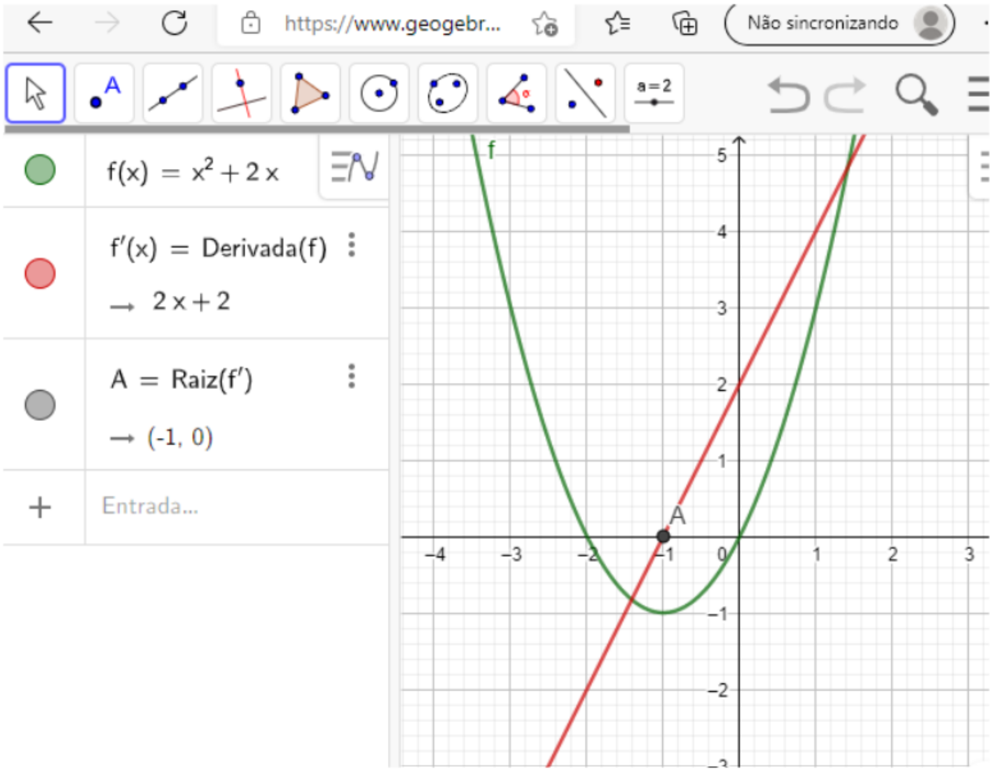
Vamos exemplificar por meio da função $f(x) = x^2 + 2x$. Vamos determinar o intervalo que que a função f(x) pode ser crescente ou decrescente.

Para isso, vamos determinar sua função derivada $f'(x) = 2x + 2x$.

Podemos verificar que $f'(x) > 0$, para todo $x > -1$, então, podemos verificar que a função f(x) é crescente no intervalo aberto $]-1, +\infty[$.

Podemos verificar que $f'(x) < 0$, para todo $x < -1$, então, podemos verificar que a função $f(x)$ é crescente no intervalo aberto $]-\infty, -1[$.

Observe estes resultados no gráfico.



Funções Decrescentes

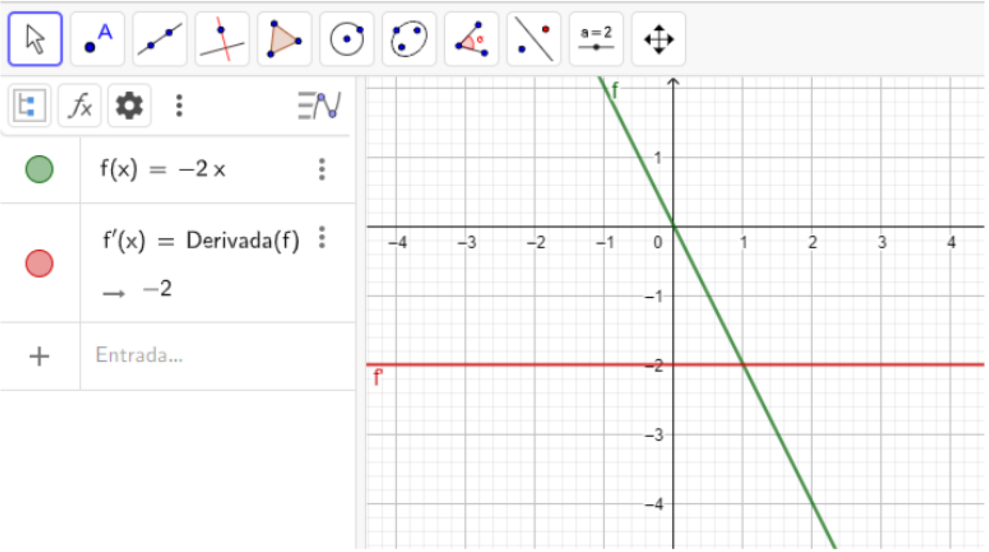
O Teorema do Valor Médio é utilizado para demonstrar outros teoremas, um deles o teorema que permite determinar o intervalo de decrescimento de uma função.

É possível obter o intervalo em que a função está em decrescimento com a análise do sinal da derivada desta função.

O Teorema para determinar se uma função é decrescente, considera uma função contínua f, em determinado intervalo fechado [a, b]. Se esta função f é derivável no intervalo aberto
]a, b[, então, considerando $x \in$]a, b[, tem-se que se a derivada $f'(x) < 0$, então, diz-se que a função f é decrescente no intervalo]a, b[.

Observe que para a função $f(x) = -2x$, a sua derivada é uma função constante em -2,

$f'(x) = -2$, neste caso, como $f'(x) < 0$, então a função $f(x)$ é decrescente.



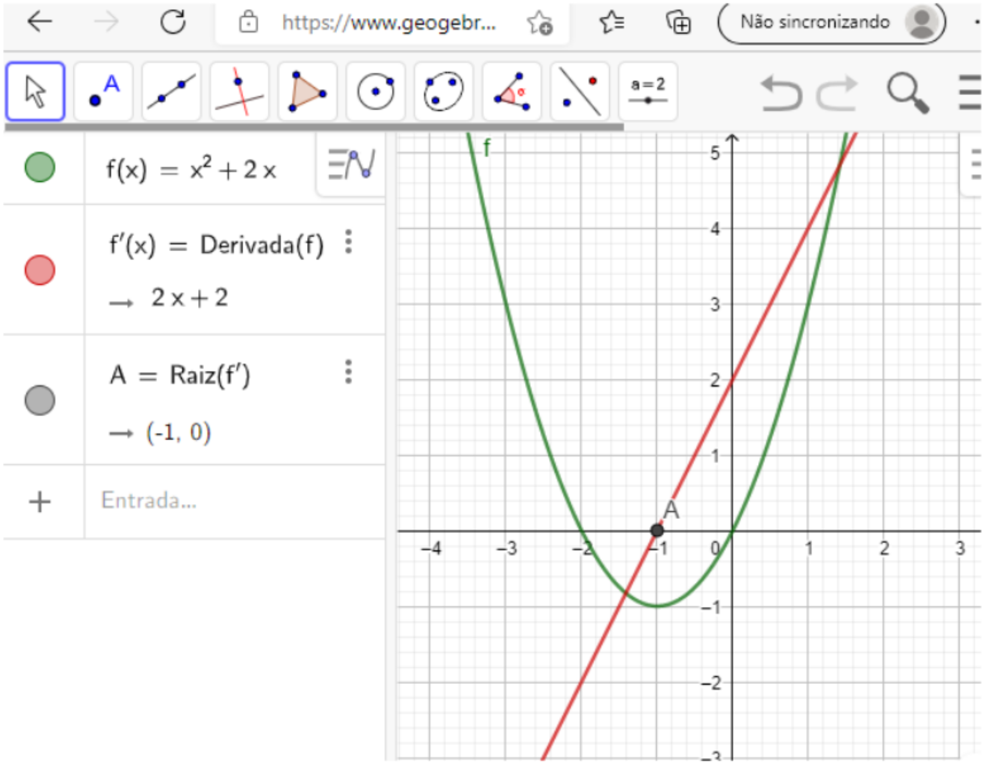
Vamos exemplificar por meio da função $f(x) = x^2 + 2x$. Vamos determinar o intervalo que que a função $f(x)$ pode ser crescente ou decrescente.

Para isso, vamos determinar sua função derivada $f'(x) = 2x + 2x$.

Podemos verificar que $f'(x) > 0$, para todo $x > -1$, então, podemos verificar que a função $f(x)$ é crescente no intervalo aberto $]-1, +\infty[$.

Podemos verificar que $f'(x) < 0$, para todo $x < -1$, então, podemos verificar que a função $f(x)$ é crescente no intervalo aberto $]-\infty, -1[$.

Observe estes resultados no gráfico.



Atividade extra

Nome da atividade: Imaginar e aplicar no dia a dia.

Observe o seu dia a dia e escreva três situações em que você consegue imaginar-se utilizando os conceitos do Teorema do Valor Médio.

Você pode relacionar com algum vídeo ou leitura que está tendo no momento, pois tudo é relacionável, apenas lembre-se de dizer qual é na resposta da atividade. Use a sua criatividade, pois é uma das soft skills mais exigidas atualmente no mercado de trabalho.

Referência Bibliográfica

- Flemming, D. M; Gonçalves, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.

- Fernandes, D. B. **Matemática Diferencial.** São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2014.

Ir para questão