Acréscimos e Diferenciais

Nesta aula, vamos falar de algumas aplicações de limites e derivadas por meio da taxa de variação, taxas relacionadas, máximos e mínimos.

Taxa de Variação

A taxa de variação ou taxa média de variação de uma função y em relação a um ponto x pode ser considerada da seguinte forma.

Vamos supor que o valor de y depende de x. Se x tiver um deslocamento de x1 até x2, isto significa que y deve variar de y1 até y2.

Vamos considerar esse deslocamento como $\triangle x = x2 - x1$ e $\triangle y = y2 - y1$.

A taxa média de variação de y em relação à x no intervalo [x1, x2] é

$$\frac{\Delta x}{\Delta y'}$$

Neste caso, a taxa instantânea de variação em x = x1 é:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x2 \to x1} \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Considerando que y = f(x), então a derivada f'(a) é a taxa instantânea de variação de y em x = a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Perceba que a velocidade que é obtida pelo quociente da distância percorrida $\triangle s$ pelo tempo percorrido $\triangle s$ é a taxa de variação.

Além disso, sabendo que S(t) representa a posição de um objeto no tempo t, isto significa que a velocidade instantânea do objeto é S'(t).

Vamos exemplificar considerando a posição de um objeto que é dado pela função do movimento

$$S = f(t)\frac{1}{1+t'}$$

sabendo que t é medido em segundos e S é medido em metros. Com isso, vamos determinar a velocidade do objeto no instante t = 2 segundos.

Para resolver este problema, devemos calcular a derivada f'(t) de f(t):

Taxas Relacionadas

Quando estamos aplicando os conceitos de limites e derivadas em problemas que, normalmente, envolvem a física, podemos ter duas ou mais quantidades de dados variando ao mesmo tempo.

Neste caso, dizemos que estamos trabalhando e resolvendo problemas de taxas relacionadas. Estas taxas de variação podem estar relacionadas por uma única variável ou podem estar relacionadas entre si.

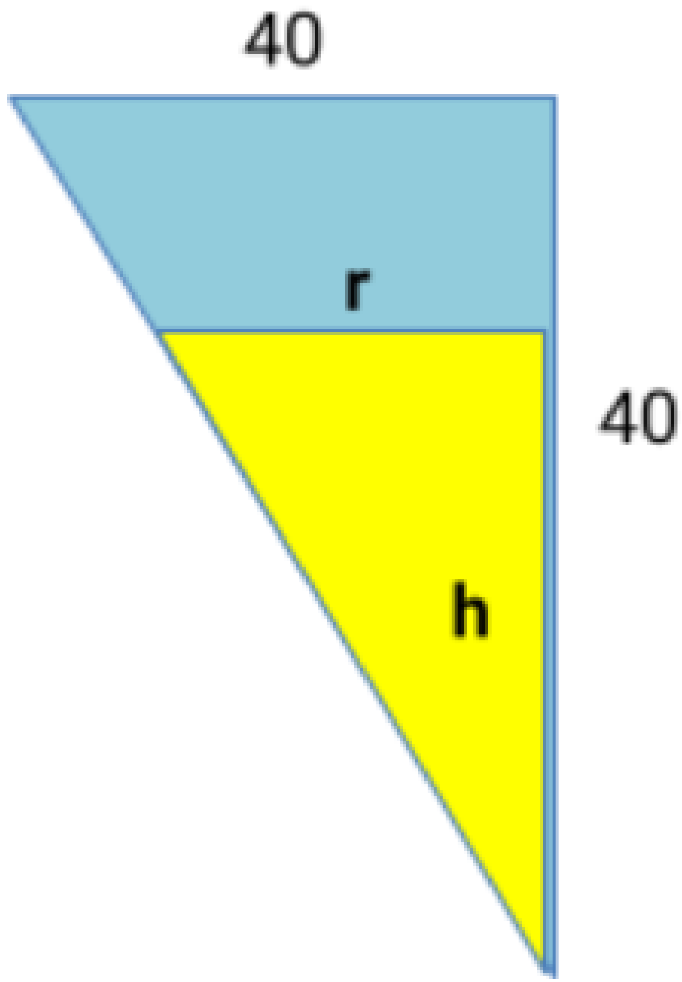
Uma aplicação das taxas relacionadas é o problema de escoamento de um reservatório que tem o formato de um cone invertido.

Observando a figura que representa o reservatório, é possível verificar que o volume, a altura e o raio são grandezas que estão relacionadas por uma função. Ou seja, esses dados vão depender um do outro e estão relacionados pela fórmula para calcular o próprio volume.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Vamos exemplificar a aplicação das taxas relacionadas por meio de um problema prático. Vamos supor um recipiente de cereais de um restaurante que oferece café da manhã. Esse recipiente tem o formato de um cone invertido com o raio do topo medindo 40 cm e sua altura 60 cm. Este recipiente reduz sua quantidade do vasão a uma taxa constante de 120cm^3/h. Determine a taxa de variação da altura do cereal quando ela está com 25cm.

Para resolver este problema, podemos relacionar o raio com a altura e usar semelhança de triângulos para o entendimento da resolução do problema.



Aplicando a semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{40}{r} = \frac{60}{h}$$

$$r = \frac{2h}{3}$$

Vamos substituir o valor do raio na equação do volume:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \left(\frac{2h}{3}\right)^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot \left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

$$V = \frac{4\pi h^3}{27}$$

Derivando a função do volume em relação ao tempo, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi h^2}{9} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Agora, vamos pegar as informações do problema e substituir nesta fórmula da derivada da função volume:

$$120 = \frac{4\pi 25^2}{9} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 120 - \frac{4\pi 25^2}{9}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{54}{125\pi} \text{ cm/h}$$

Máximos

O maior objetivo do aprendizado dos limites e das derivadas é a otimização. Aqui vamos aplicar a otimização fazendo o uso das derivadas.

Para se determinar o valor de máximo de algum resultado, primeiro precisamos encontrar a função que direciona para encontrar a solução do problema. Depois que a função for determinada, a derivada é calculada para se obter uma função que dependa somente de uma variável.

A função derivada determina cada ponto da função do seu problema. Quando você iguala a função derivada a zero, significa que você está determinando o ponto de máximo ou o ponto de mínimo da função do seu problema.

Resolvendo a função derivada igualada a zero, você está obtendo o ponto de máximo ou de mínimo necessários para a otimização do seu recurso.

Vamos exemplificar supondo que você precisa produzir uma trave de gol para um campo poliesportivo. Você precisa produzir essa trave com uma viga pronta de 18 metros de comprimento.

O que você precisa fazer é determinar as dimensões lateral esquerda, lateral direita e superior da trave de forma que a área formada pela trave tenha área máxima.

Podemos considerar x como o comprimento lateral da trave e y como o comprimento superior da trave. Como temos duas laterais e a parte superior, então a função do nosso problema pode ser escrita por:

$2x + y = 18$ ou $f(x) = y = 18–2x$

A área formada pela trave pode ser escrita por:

$$A(x) = x.y$$

$$A(x) = x \cdot (18 - 2x)$$

$$A\left(x\right) = 18x - 2x^2$$

Vamos agora, calcular a derivada da função A(x):

$$A^{'}\left(x\right) = \left(18x - 2x^2\right)^{'}$$

$$A^{'}\left(x\right) = 18 - 4x$$

Vamos igualar a função derivada A’(x) para encontrarmos o máximo dessa função.

$A^{'}(x) = 18 - 4x = 0$

$4x = 18$

$x = 9/2$

Vamos substituir este valor de x = 9/2 na função do problema, para determinarmos o comprimento superior da trave:

$y = 18 - 2x$

$y = 18 - 2(9/2)$

$y = 18 - 9$

$y = 9$

Dessa forma, conseguimos verificar que para obter o máximo de área que a trave pode ter, precisamos dividir a viga para ter 4,5 cm na lateral esquerda, 4,5 cm na lateral direita e 9 cm na parte superior da trave.

E, a área máxima será de A(x) = 9 . 9/2 = 81/2 = 40,5 cm^2 de área.

Apenas para reflexão, as dimensões atuais de uma trave de um campo de futebol são de 7,43 metros de largura e 2,44 metros de altura, o que leva a ter uma área aproximada de 17,86 metros quadrados. Para aumentar as chances de os jogadores fazerem um gol, teríamos que ter a área máxima da trave desse gol. Se você aplicar os cálculos aprendidos sobre maximização e considerar uma viga de 12,2 metros, perceberá que poderá aumentar a área da trave para aproximadamente 18,605 metros quadrados. Isso significa um aumento de aproximadamente 4% para que o jogador aumente suas chances de se fazer um gol.

Mínimos

O maior objetivo do aprendizado dos limites e das derivadas é a otimização. Aqui vamos aplicar a otimização fazendo o uso das derivadas.

Para se determinar o valor de mínimo de algum resultado, primeiro precisamos encontrar a função que direciona para encontrar a solução do problema. Depois que a função for determinada, a derivada é calculada para se obter uma função que dependa somente de uma variável.

A função derivada determina cada ponto da função do seu problema. Quando você iguala a função derivada a zero, significa que você está determinando o ponto de máximo ou o ponto de mínimo da função do seu problema.

Resolvendo a função derivada igualada a zero, você está obtendo o ponto de máximo ou de mínimo necessários para a otimização do seu recurso.

Vamos exemplificar supondo que você está analisando a cultura de bactérias. Você sabe que o número de bactérias, no instante t, em uma cultura, pode ser representada por:

$$B\left(t\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot e^{-t/20}\right)$$

Para este problema, determine o mínimo de bactérias nesta cultura, no intervalo de tempo de 0 até 100, ou seja, 0 ≤ t ≤ 100.

Para este problema, verificamos que o domínio é fechado no intervalo [0, 100]. Desta forma, é fundamental observar os pontos críticos e os pontos extremos deste domínio.

$$B\left(t\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot e^{-t/20}\right)$$

$$B\left(t\right)=125000+5000\cdot\ t\cdot e^{-t/20}$$

Vamos determinar a derivada de B'(t) de B(t), aplicando a derivada do produto:

$$B\left(t\right)=125000+5000\cdot\ t\cdot e^{-t/20}$$

$$B\left(t\right)=5000\cdot e^{-t/20}-\frac{t\cdot e^{-t/20}}{20}$$

Agora, vamos igualar esta derivada a zero:

$$B^{'}(t) = 0$$

$$B^{'}(t) = 5000 \cdot \left(e - \frac{t}{20} - \frac{te - \frac{t}{20}}{20} \right) = 0$$

$$5000 \cdot e^{-\frac{t}{20}} \left(1 - \frac{t}{20}\right) = 0$$

$$\left(1 - \frac{t}{20}\right) = 0$$

$$\frac{t}{20} = 1$$

$$t = 20$$

Agora, precisamos calcular o número de bactérias nos extremo e no ponto crítico. E, desta forma, teremos a informação do ponto de mínimo dentro do intervalo adotado.

para o extremo t = 0, temos:

$$B\left(t\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot e^{-t/20}\right)$$

$$B\left(0\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot 0\cdot e^{-0/20}\right)$$

$$B(0)=125000$$

bactérias

para o extremo t = 100, temos:

$$B\left(t\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot e^{-t/20}\right)$$

$$B\left(0\right)=5000\cdot\left(25+100\cdot e^{-100/20}\right)$$

$$B(0)=128368,97$$

bactérias

para o ponto crítico t = 20, temos:

$$B\left(t\right)=5000\cdot\left(25+t\cdot e^{-t/20}\right)$$

$$B\left(0\right)=5000\cdot\left(20\cdot e^{-20/20}\right)$$

$$B(0)=161787,94$$

bactérias

Desta forma, podemos verificar que o número mínimo de bactérias é de 125000.

Atividade extra

Nome da atividade: Imaginar e aplicar no dia a dia.

Observe o seu dia a dia e escreva três situações em que você consegue imaginar-se utilizando os conceitos de Máximos e Mínimos.

Você pode relacionar com algum vídeo ou leitura que está tendo no momento, pois tudo é relacionável, apenas lembre-se de dizer qual é na resposta da atividade. Use a sua criatividade, pois é uma das soft skills mais exigidas atualmente no mercado de trabalho.

Referência Bibliográfica

- Flemming, D. M; Gonçalves, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.

- Fernandes, D. B. **Matemática Diferencial.** São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2014.

Ir para questão