سلسلة تمارين حول الدوال الناطقة

1 I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x^2+2$.

1) ا) أدرس تغيرات الدالة g.

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلًا وحيدًا α في المجال $[-4;-3]$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $-\dfrac{n+1}{10}<\alpha<-\dfrac{n}{10}$.

د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) بيّن أنّ: $\alpha^3=-3\alpha^2-2$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+2x+1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) ا) عيّن نهاية الدالة f عند -1، ثم فسّر بيانيًا النتيجة.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) أحسب $f'(x)$، ثم بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن $f(\alpha)=\dfrac{-3}{\alpha+1}$ ثم استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4) ا) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=-2$ ثم إستنتج معادلة للمستقيم (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) مماسًا (T) موازيًا للمستقيم (Δ) عند نقطة يُطلب تعيين إحداثياها.

6) أكتب معادلة المماس (T).

7) أنشئ (C_f) ، (T) والمستقيمات المقاربة.

8) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة:

$(m+2)(x+1)^2-3x-1=0$ حلّين مختلفين في الإشارة.

2 I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x-4$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث $2\le\alpha\le2.25$.

3) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا:

$f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.

3) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

6) بيّن أن: $f(\alpha)=1+\dfrac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$.

7) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5\le\alpha'\le-1.25$.

8) أرسم (C_f) و (Δ).

9) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{\alpha'\}$ بـ: $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

- أدرس تغيرات الدالة k ثم أرسم منحناها البياني.

10) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة: $f(x)=|m-1|$.

3 I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-x^2+3x+1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .
2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلًا وحيدًا α في المجال $[-1;0]$.
3) أعط حصرًا لـ α سعته 10^{-2} .
4) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
5) بيّن أن : $\alpha^2=-3-\dfrac{4}{\alpha-1}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x^2+1}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
- ◁ أدرس تغيرات الدالة f .

2) بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha-\dfrac{2}{\alpha^2+1}$.
- ◁ استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$ باستعمال العدد α .

3) عيّن الأعداد a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:
$f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$.
   - ا) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .
   - ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=\dfrac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$
- ◁ بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتهما.

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .
- ◁ ماذا تستنتج بالنسبة للمماس (T) والمستقيم (Δ) ؟

6) أنشئ (C_f) ، (T) ، (Δ) و المستقيمات المقاربة.
7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $m(x^2+1)+2=0$.

4 I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x-4$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.
2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.
3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث $2<\alpha<2.5$.
4) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x+2}{x^2}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ا) تحقق بأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$: $f(x)=x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.
   - ب) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ثم فسّر النتائج هندسيًا.

2) ا) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.
   - ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
   - ج) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{6}{\alpha}+\dfrac{6}{\alpha^2}$ واستنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$

3) عيّن النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) فيها موازيًا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$ ثم أكتب معادلة لهذا المماس.

4) ا) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربا مائلا (Δ) يُطلب تعيينه.
   - ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).
   - ج) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

5) ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $\dfrac{-mx^2+3x+2}{x^2}=0$.