基于 python 的平面四边形单元

本文处理的问题为：10*10 的正方形，厚度为 0.025，左边加约束，右边加上均匀载荷 204pa。其中弹性模型 E=200000，泊松比 u=0.3，共划分了 50*50 共计 2500 个网格，为四边形单元，如图 1 所示。

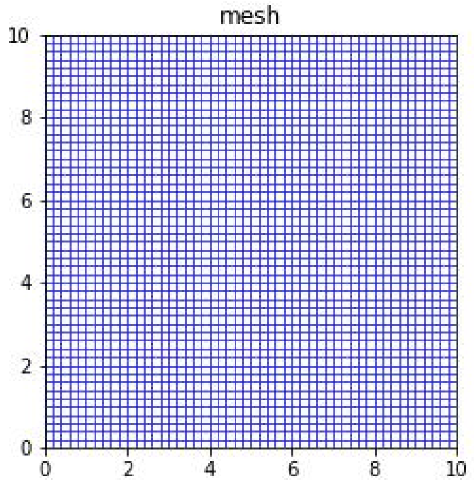
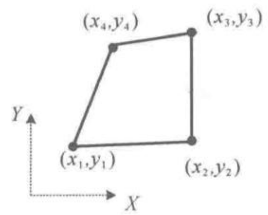


图 1. 网格划分图（2500 个四边形单元）

一．单元基本理论（平面四边形）



四边形单元如上图所示，共有四个节点，每个节点有两个自由度（Ux 和 Uy），一个单元有 8 个自由度，则一次四边形实体单元的单元刚度矩阵为 8*8 阶。该单元局部坐标系和整体坐标系已知，则整体坐标系中的刚度矩阵和局部坐标系中的刚度矩阵相同。假设四边形四个顶点坐标分别为（x1,y1），（x2,y2），（x3,y3），（x4,y4），需要注意的是节点顺序为逆时针。单元材料弹性模量为 E，厚度 t，泊松比 u,则一个单元的刚度矩阵表示为：

$$Ke = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} B^T DB|J|d\xi d\eta$$

其中矩阵 B 也称为应变矩阵，表示为：

$$B = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

Bi 表示为：

$$B_i=\begin{bmatrix} a\frac{\partial N_i}{\partial \xi}-b\frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & c\frac{\partial N_i}{\partial \eta}-d\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ c\frac{\partial N_i}{\partial \eta}-d\frac{\partial N_i}{\partial \xi} & a\frac{\partial N_i}{\partial \xi}-b\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

上式中的 Ni 为单元形函数，表示为：

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

系数 a,b,c,d 表示为：

$$a=\frac{1}{4}[y_1(\xi-1)+y_2(-1-\xi)+y_3(1+\xi)+y_4(1-\xi)]$$
$$b=\frac{1}{4}[y_1(\eta-1)+y_2(1-\eta)+y_3(1+\eta)+y_4(-1-\eta)]$$
$$c=\frac{1}{4}[x_1(\eta-1)+x_2(1-\eta)+x_3(1+\eta)+x_4(-1-\eta)]$$
$$d=\frac{1}{4}[x_1(\xi-1)+x_2(-1-\xi)+x_3(1+\xi)+x_4(1-\xi)]$$

J 为雅可比矩阵，其行列式表示为：

$$|J|=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1-\eta & \eta-\xi & \xi-1 \\ \eta-1 & 0 & \xi+1 & -\xi-\eta \\ \xi-\eta & -\xi-1 & 0 & \eta+1 \\ 1-\xi & \xi+\eta & -\eta-1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

矩阵 D 也称为本构矩阵或弹性矩阵，对于平面应力问题，其表达式为：

$$D=\frac{E}{1-u2}\begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-u}{2} \end{bmatrix}$$

如果是独立四边形实体单元系统，则系统总体刚度矩阵为 8n*8n 阶，n 为系统节点数量，用 K 表示，U 代表整体坐标系中系统的节点位移列阵，F 表示整体

坐标系中力矩阵，均为 8n*1 阶，有：

$$K*U=F$$

求解处理过的方程组可得到整体坐标系中的节点位移，然后通过下士计算单元应力：

$$f_e=K_eU_e$$

二．程序架构（四边形单元）

本文基于 python 编写的有限元四边形单元程序，其程序构架如图 2 所示（从右边看起）：

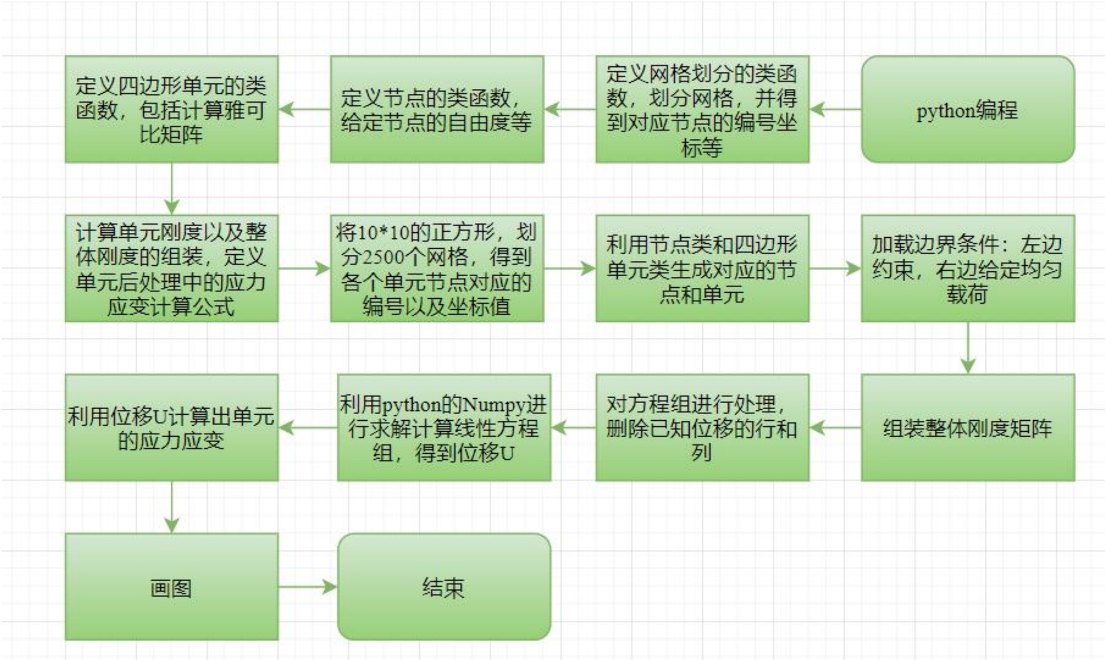


图 2 四边形单元程序架构图

三．程序结果对比（Feon)

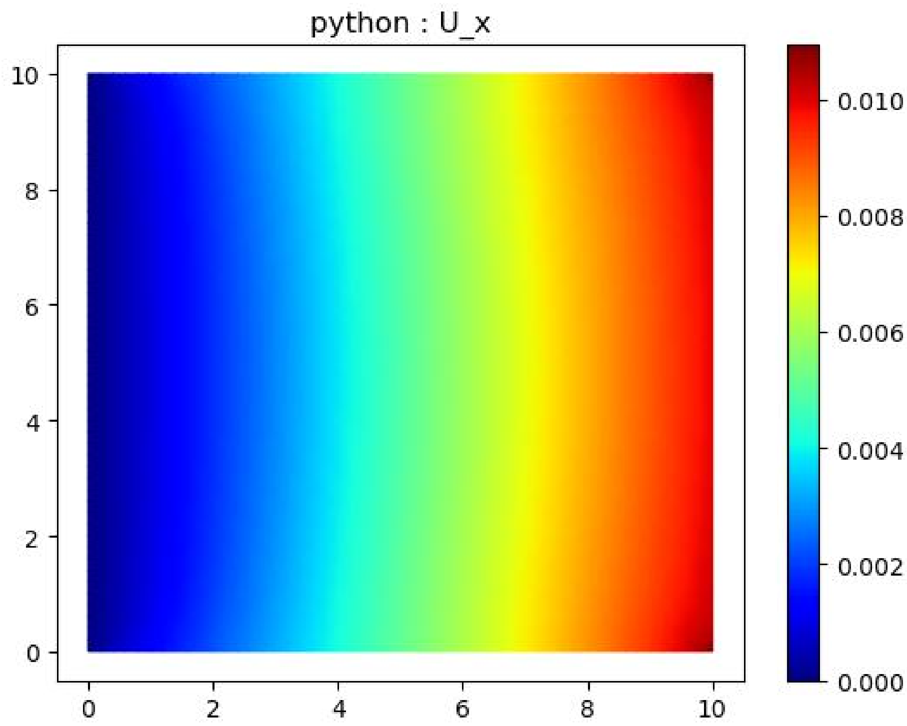
本文所使用的对比程序为 Feon。

Feon 是湖北工业大学土木建筑与环境学院教师裴尧尧基于 python 开发的一个开源免费的有限元计算框架。这是一个致力于有限元编程教学和有限元理论研究的框架。著有：《python 和有限元》

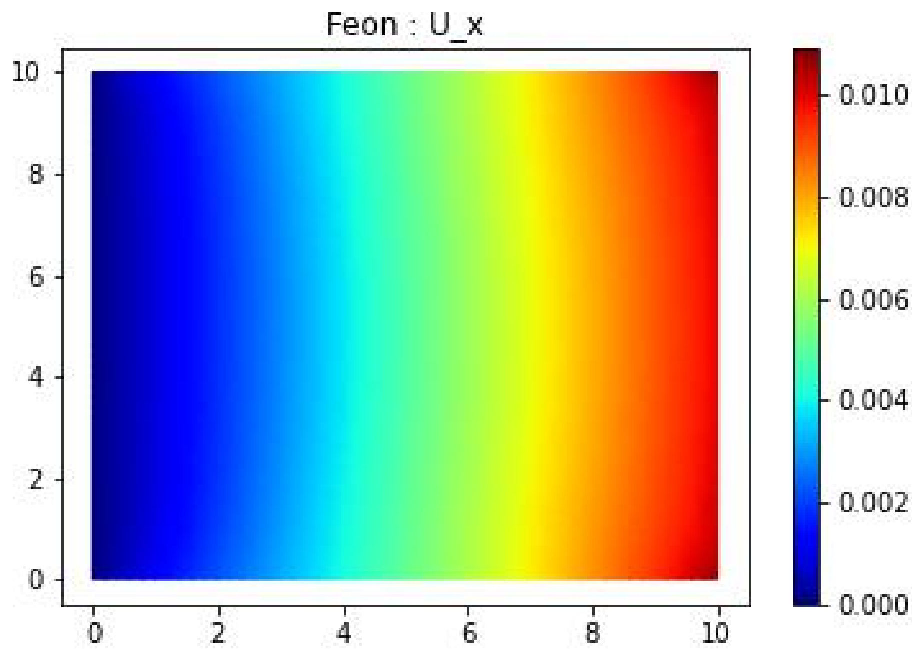
计算结果	Python 程序		Feon	
	最大值	最小值	最大值	最小值
x 轴方向上位移	0.010934359	0	0.010934359	0
y 轴方向上位移	0.002072748	-0.002072748	0.002072748	-0.002072748
x 轴方向上单元应力	316.4008122	191.0123743	316.4008122	191.0123743
y 轴方向上单元应力	58.83211337	-36.67803717	58.83211337	-36.67803717
xy 平面方向上剪切力	59.07063377	-59.07063377	59.07063377	-59.07063377
x 轴方向上单元应变	0.00157111	0.000871715	Feon 没有计算应变	
y 轴方向上单元应变	-8.69E-06	-0.000546067		
xy 平面方向上剪切应变	0.000767918	-0.000767918		

从上表中可以看出，本文基于 python 所写有限元四边形单元程序，其计算得到的位移以及应力，可以达到与 Feon 开源代码包差不多的精度。

Python 程序与 Feon 包具体的对比云图如图 3—图 10 所示。

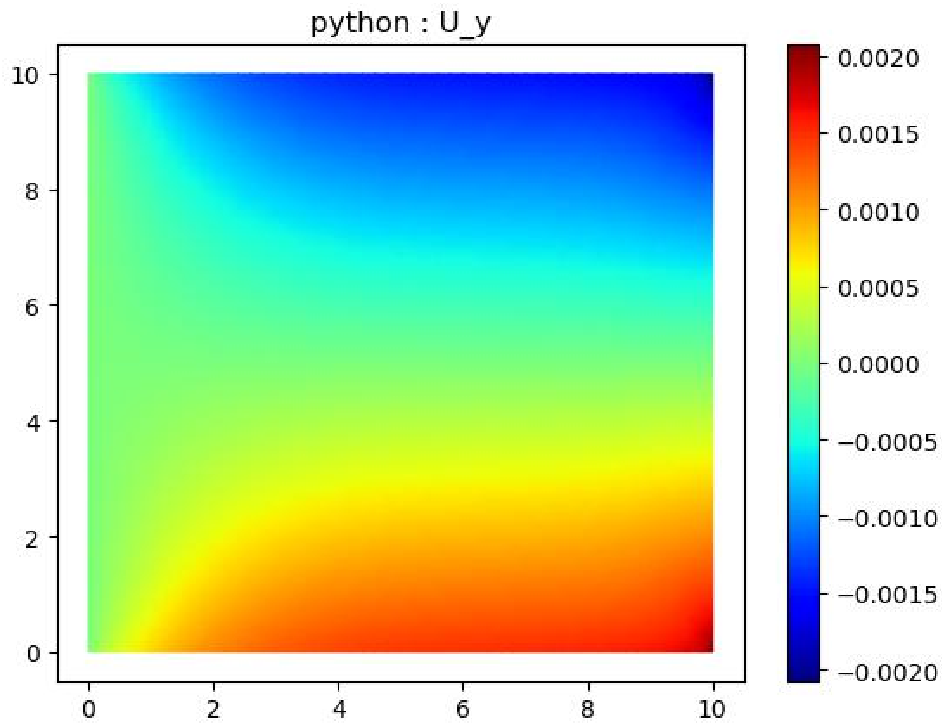


（a）python 程序 x 轴位移

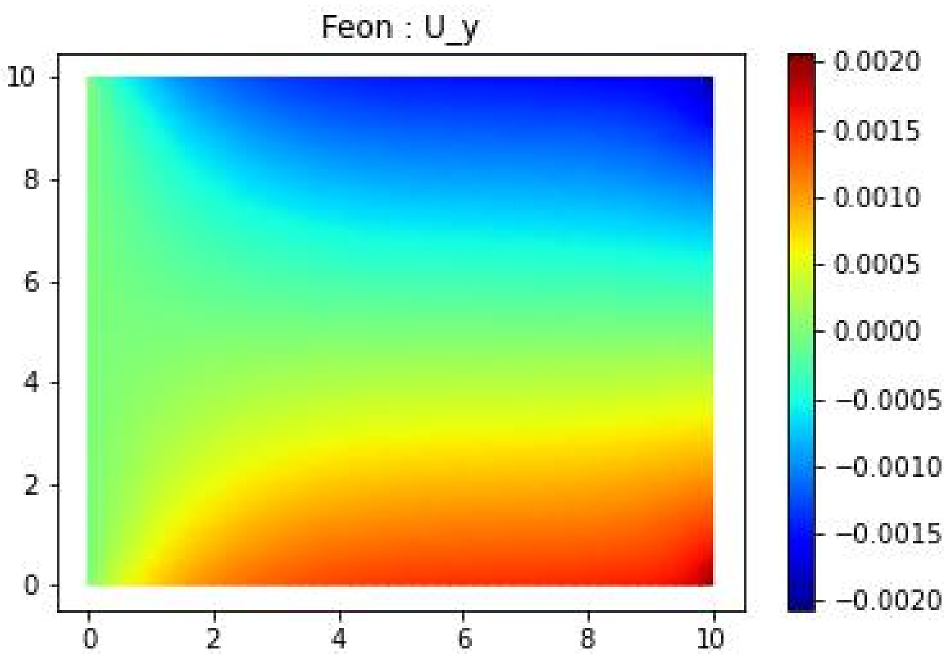


（b）Feon 架构的 x 轴位移

图 3. x 轴位移对比图

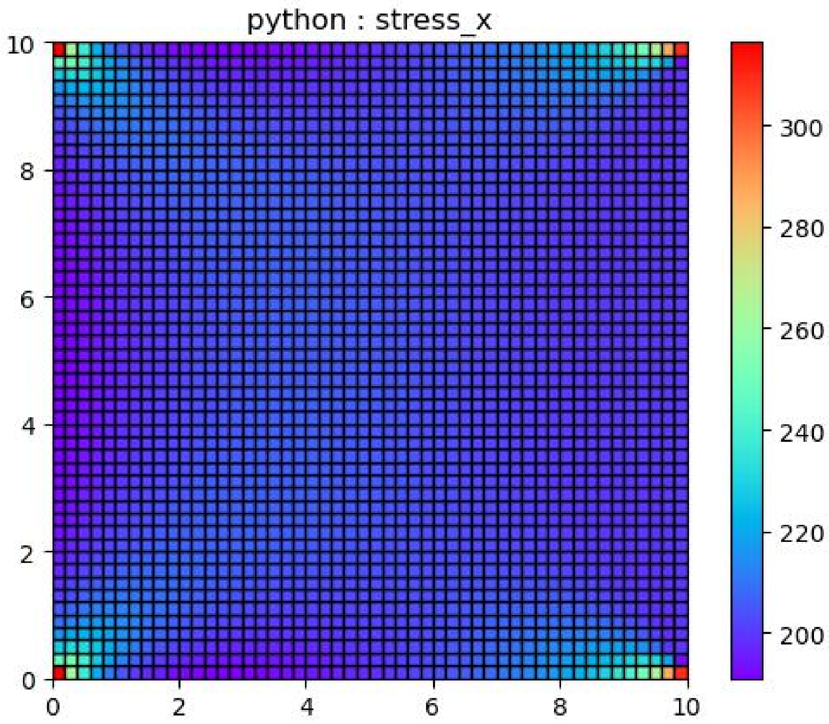


（a）python 程序 y 轴位移

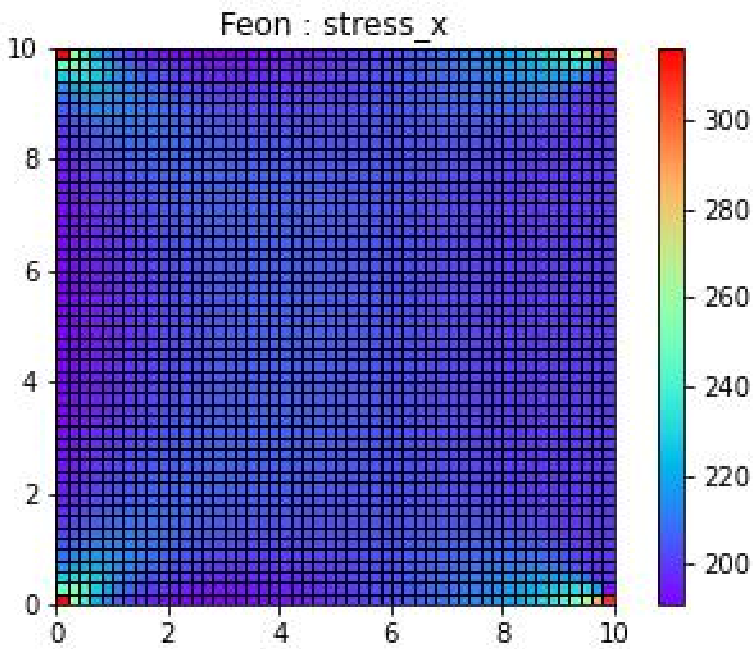


（b）Feon 架构的 y 轴位移

图 4. y 轴位移对比图

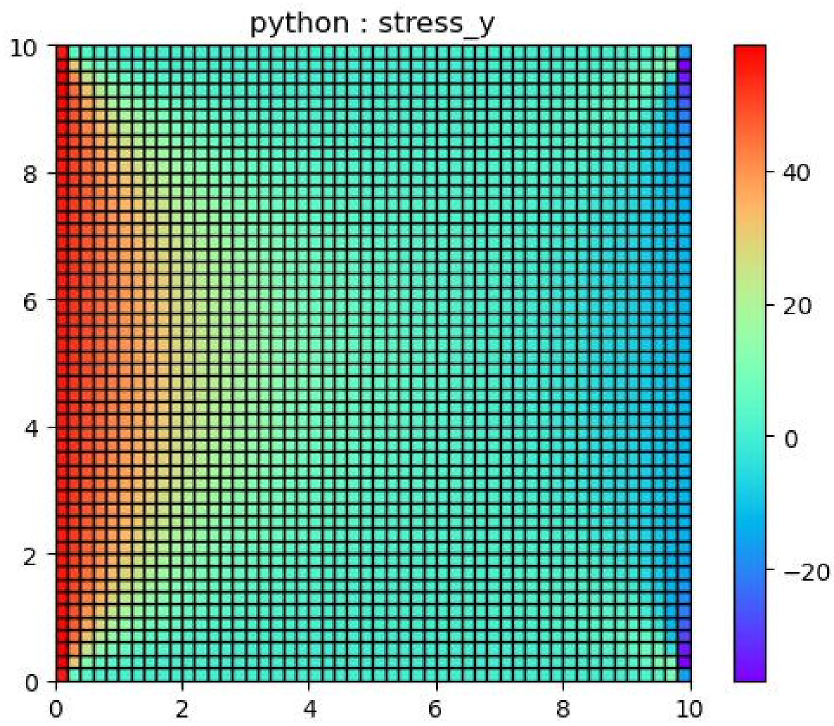


（a）python 程序 x 轴方向正应力

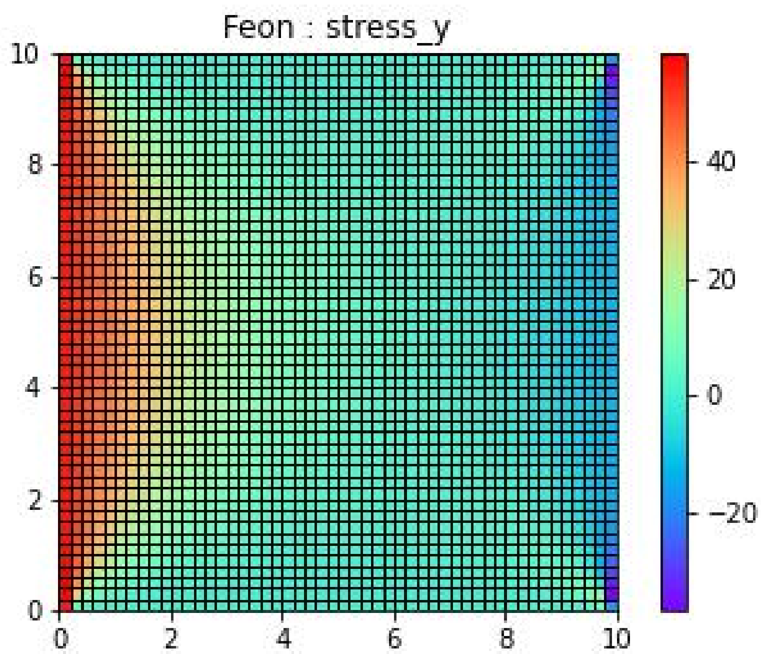


（b）Feon 架构的 x 轴方向正应力

图 5. x 轴方向正应力对比图

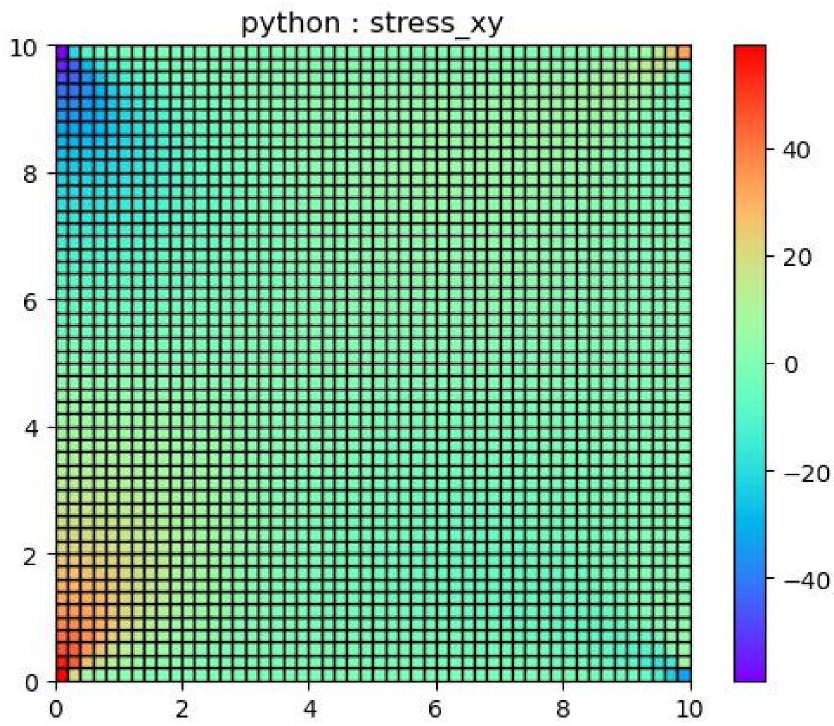


（a）python 程序 y 方向正应力

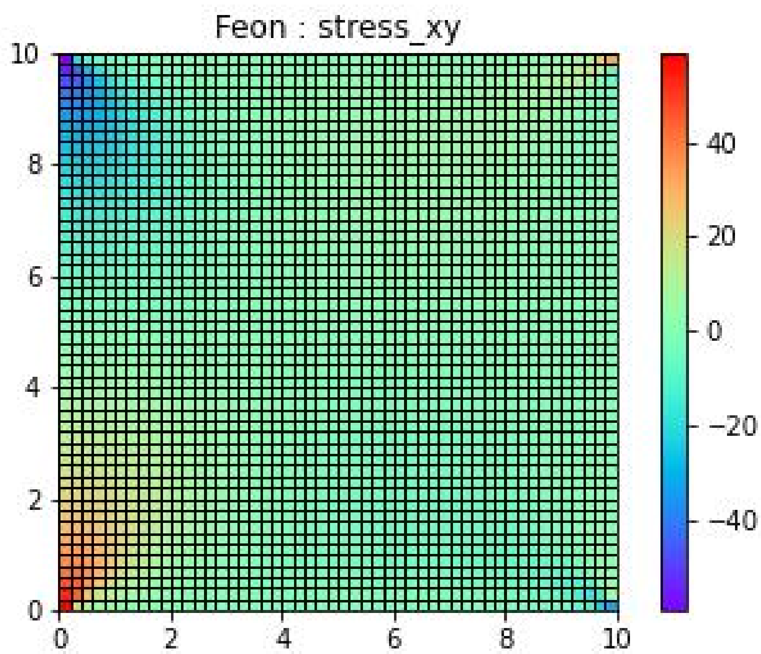


（b）Feon 架构的 y 方向正应力

图 6. y 方向正应力对比图

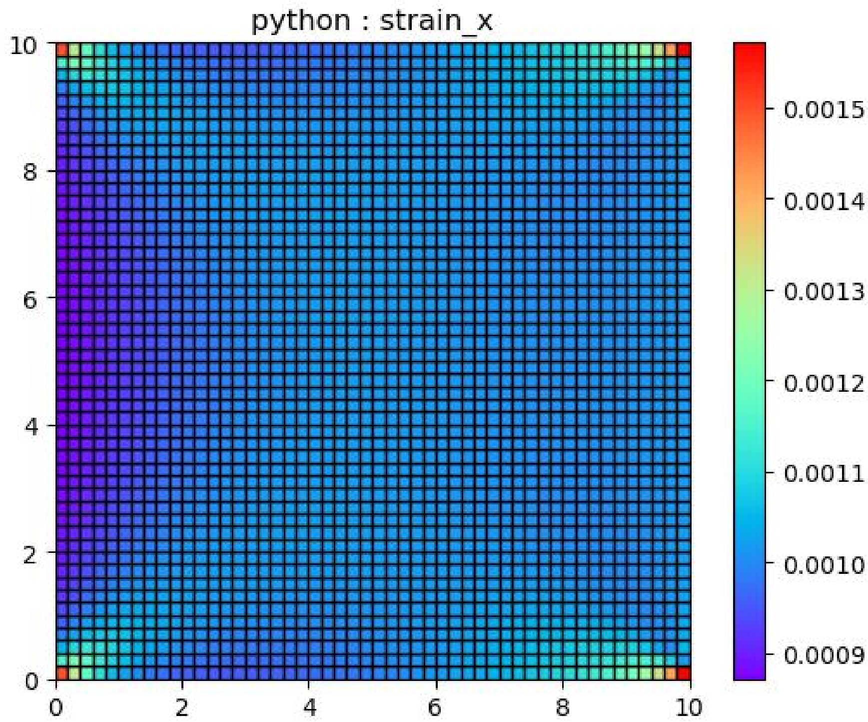


（a）python 程序 xy 方向切应力



（b）Feon 架构的 xy 方向切应力

图 7. xy 平面方向剪切应力对比图

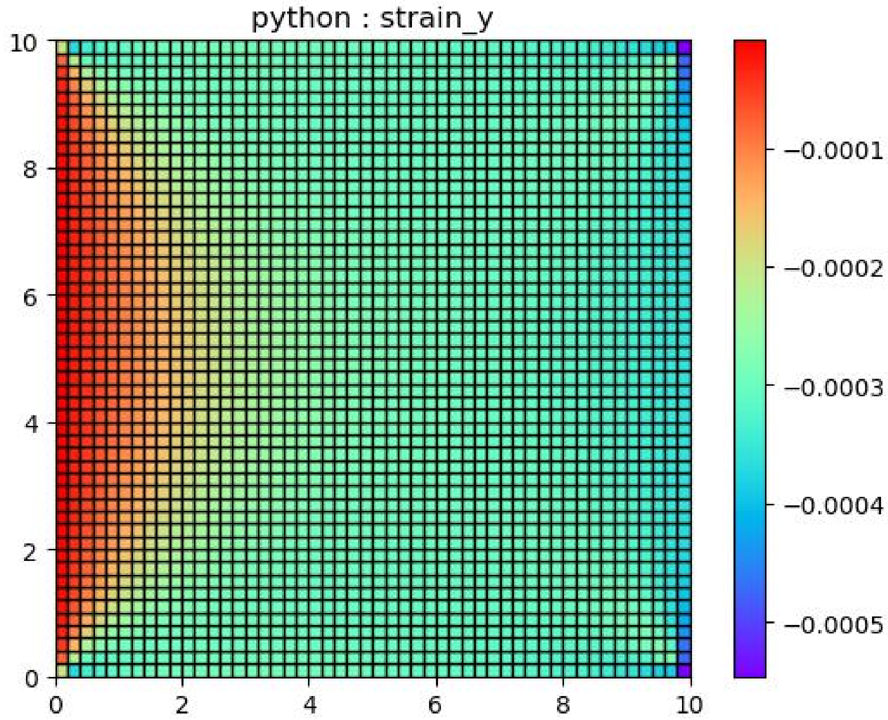


（a）python 程序 x 方向正应变

Feon 没有计算应变

（b）Feon 架构的 x 方向正应变

图 8. x 方向正应变对比图

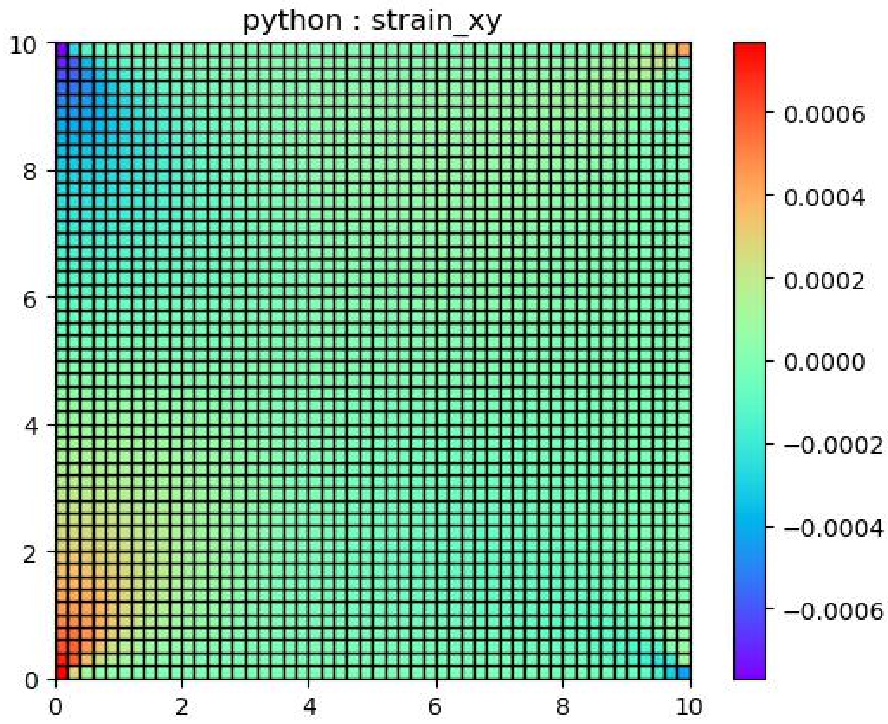


（a）python 程序 y 方向正应变

Feon 没有计算应变

（b）Feon 架构的 y 方向正应变

图 9. y 方向正应变对比图



（a）python 程序 xy 方向切应变

Feon 没有计算应变

（b）Feon xy 方向切应变

图 10. xy 方向切应变对比图

如上图所示，本文所设计的基于 python 的有限元四边形单元程序，可以较好的处理计算下 x 轴，y 轴位移，正应力、剪切应力，正应变、剪切应变等问题。