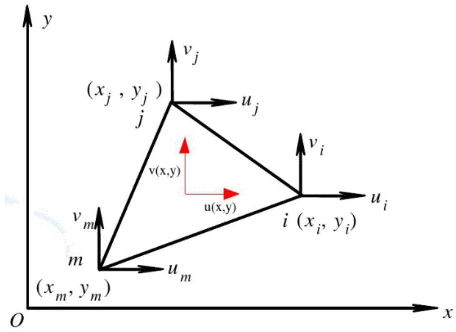
有限元报告—三角形单元

一.单元基本理论（平面三角形）



如上图所示，以平面逼近曲面的想法，设单元内任意一点的位移是 x，y 的线性函数，将 i，j，m 三个节点的水平位移分量和节点坐标分别带入，可以得到形函数为:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \alpha 1 \\ \alpha 2 \\ \alpha 3 \end{Bmatrix}$$

将矩阵 C 求逆，可将待定的中间参量α_i用节点的位移 ui 等表示出来，即：

$$|\mathrm{C}| = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A = ((\mathrm{x2} * \mathrm{y3} - \mathrm{x3} * \mathrm{y2}) + (\mathrm{y2} - \mathrm{y3}) * \mathrm{x1} + (\mathrm{x3} - \mathrm{x2}) * \mathrm{y1})$$

A 代表着三角形单元 ijm 的面积，只要 i，j，m 三点彼此不重合则 A 不等于 0；当 i，j，m 是逆时针排列时有线性代数可知：

$$C^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}$$

其中:

$a_i = x_i y_m - x_m y_i$

$b_i = y_j - y_m$

$c_i = x_m - x_j$

可以推导出：

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m$$

$$N_i(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}$$

$$N_j(x,y) = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A}$$

$$N_m(x,y) = \frac{a_m + b_m x + c_m y}{2A}$$

同理可以从三个节点的 y 方向位移 vi,vj,vm 同时得出单元内任意一点的 y 方向上的位移

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m$$

三个形函数 Ni,Nj,Nm 是完全一样的。

单元节点位移列阵为：

$$\delta^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

单元内任一一点的位移矢量可简写为：

$$u^e = N^e \delta^e = (N_i{}^e, N_j{}^e, N_m{}^e) \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}$$

用节点位移表示单元应变为：

$$\varepsilon^{\mathrm{e}} = [B_i{}^e, B_j{}^e, B_m{}^e] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = B^e \delta^e$$

其中：

$$B_l{}^e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_l & 0 \\ 0 & c_l \\ c_l & b_l \end{bmatrix}$$

用节点位移表示单元应力为：

$$\sigma^e = D\varepsilon^e = DB^e \delta^e$$

其中：

$$D=\frac{E}{1-u2}\begin{bmatrix}1 & u & 0\\ u & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-u}{2}\end{bmatrix}$$

综上分析可以得出三角形单元的<u>**单元刚度矩阵**</u>为：

$$Ke=tAB^{T}DB^{e}$$

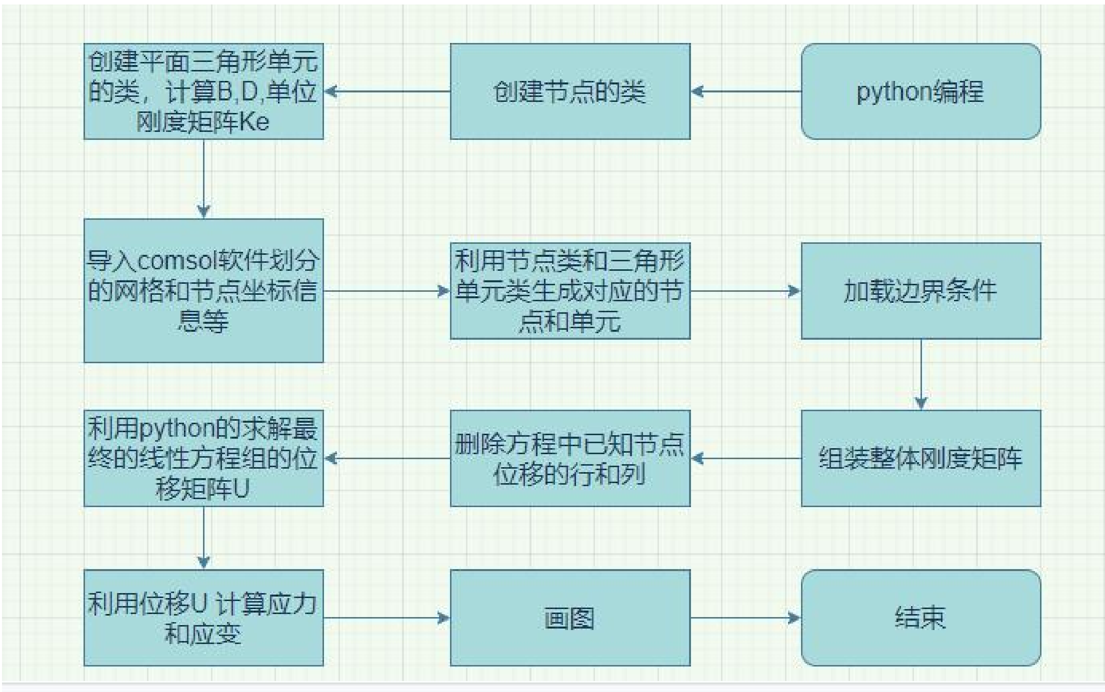
将外力 F 等到移动至节点，然后对整体进行刚度矩阵的组装，得到整体矩阵 K，结合上述分析可得：

$$K*U=F$$

解开这个线性方程组，我们即可得出位移矩阵 U。

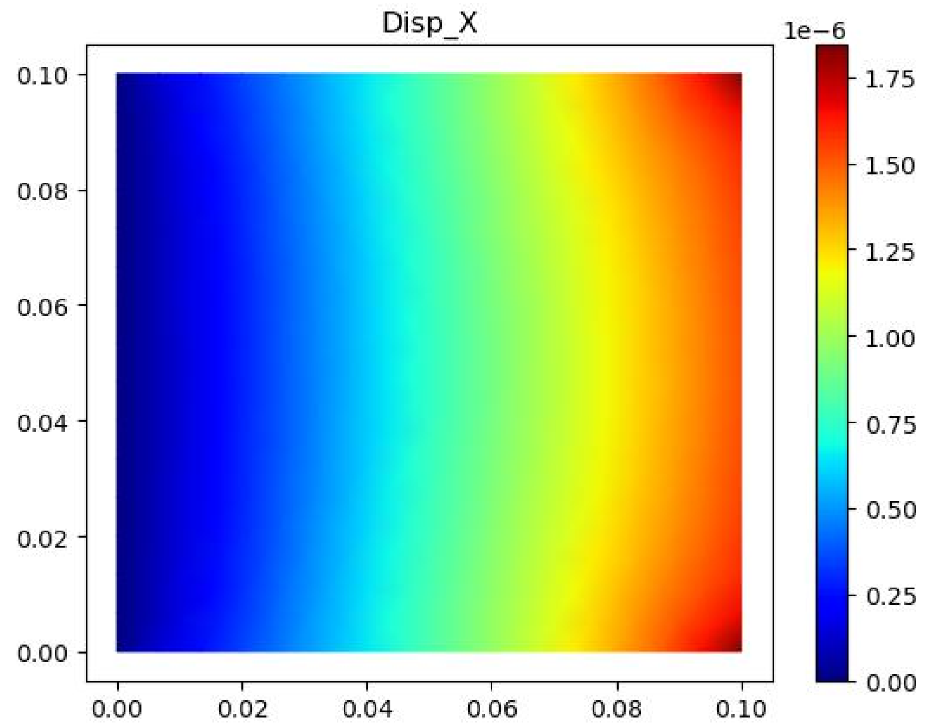
二. 程序架构

本文基于 <u>python 编写具体的三角形单元</u>，程序编写流程如下：（从右边开始）

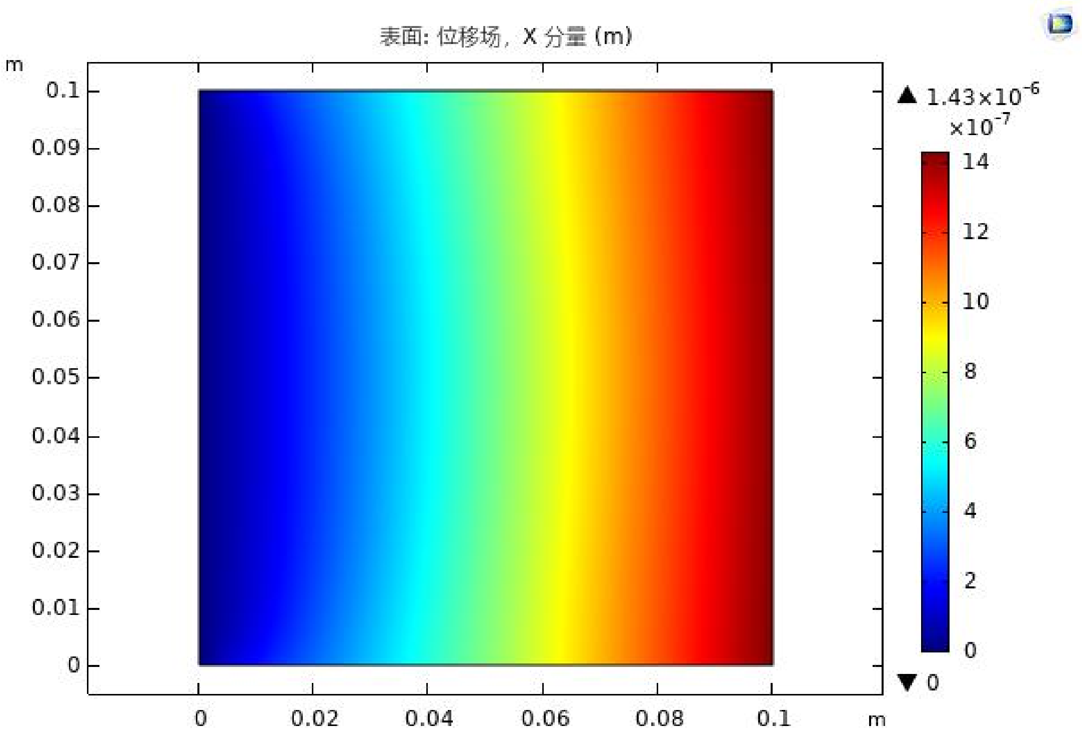


三. 程序结果对比（comsol)

本文所使用的有限元分析软件为 comsol，将其结果与自己所编写的 **python 有限元平面三角形单元**实现对比，如下所示：

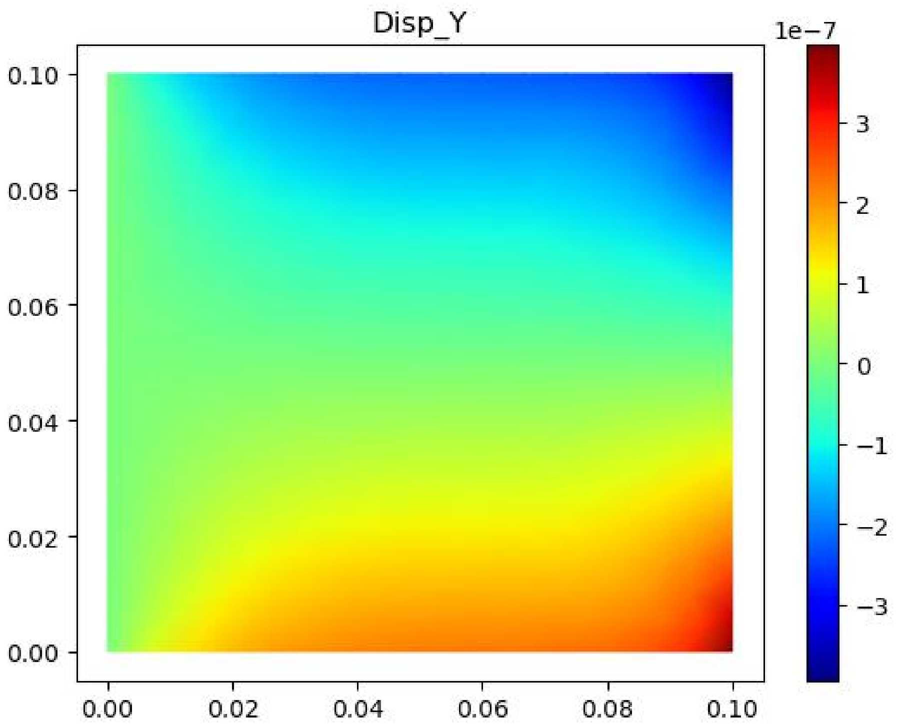


（a）python 程序 x 轴位移

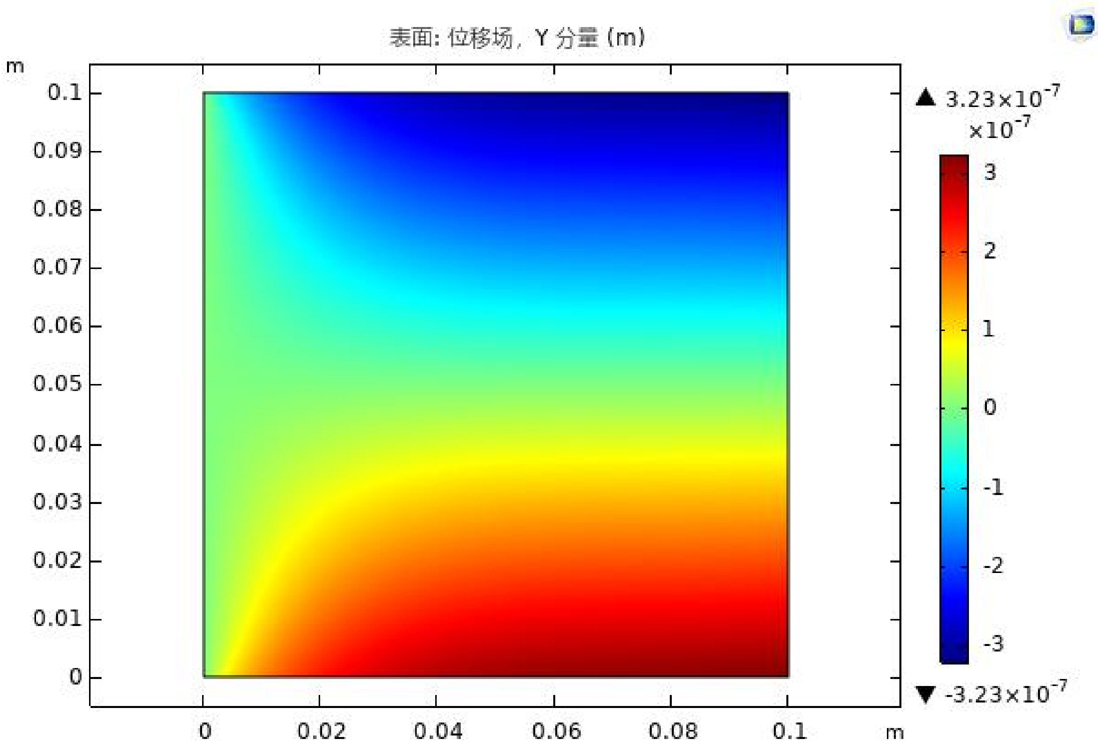


（b）comsol 软件 x 轴位移

图 1. x 轴位移对比图

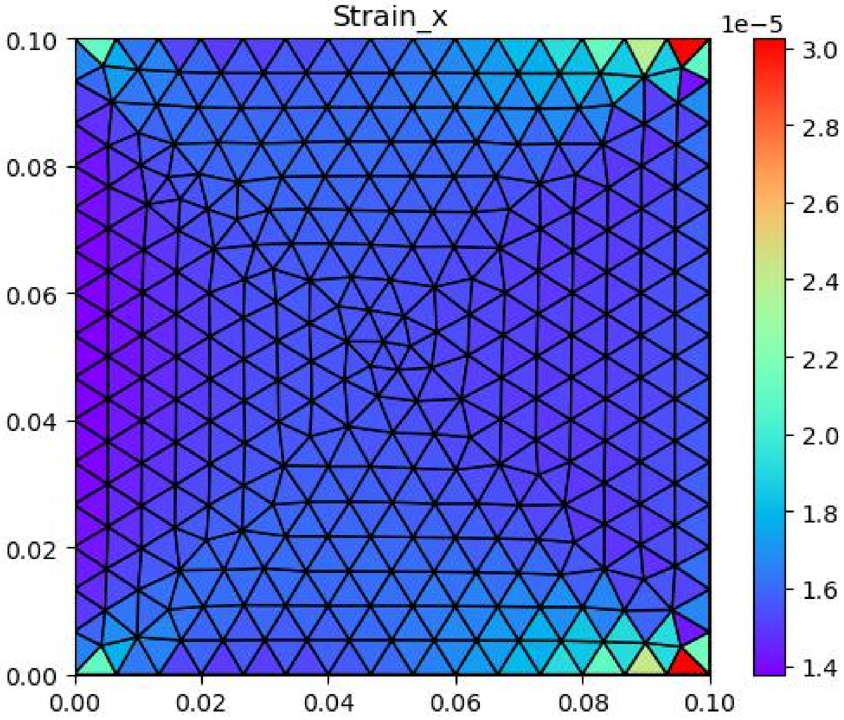


（a）python 程序 y 轴位移

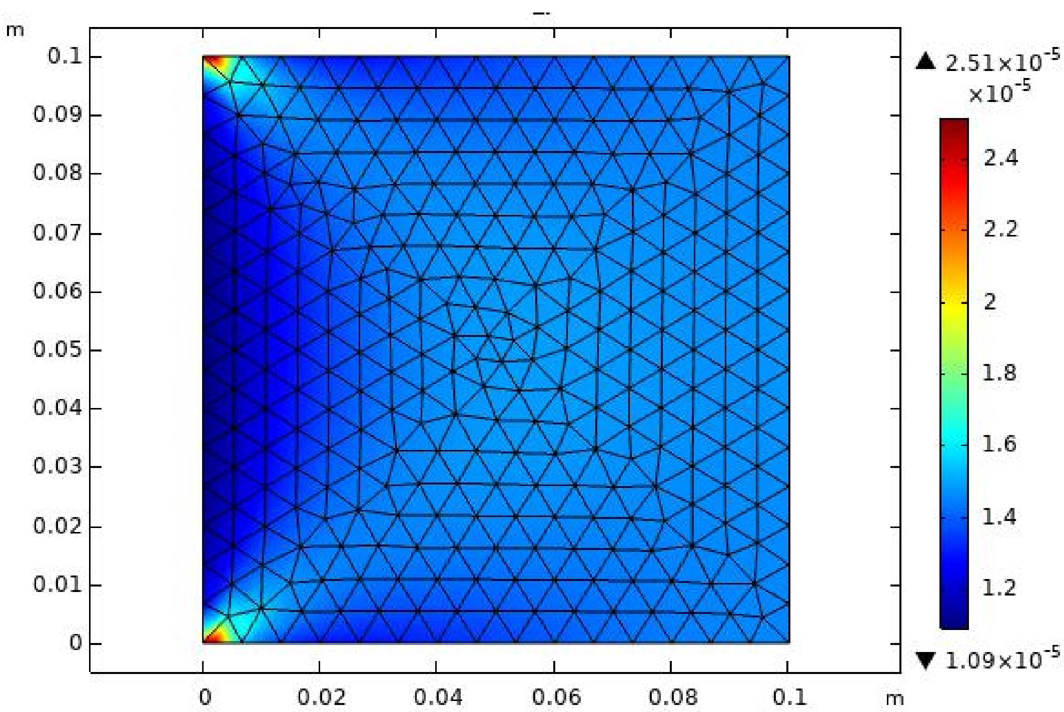


（b）comsol 软件 y 轴位移

图 2. y 轴位移对比图

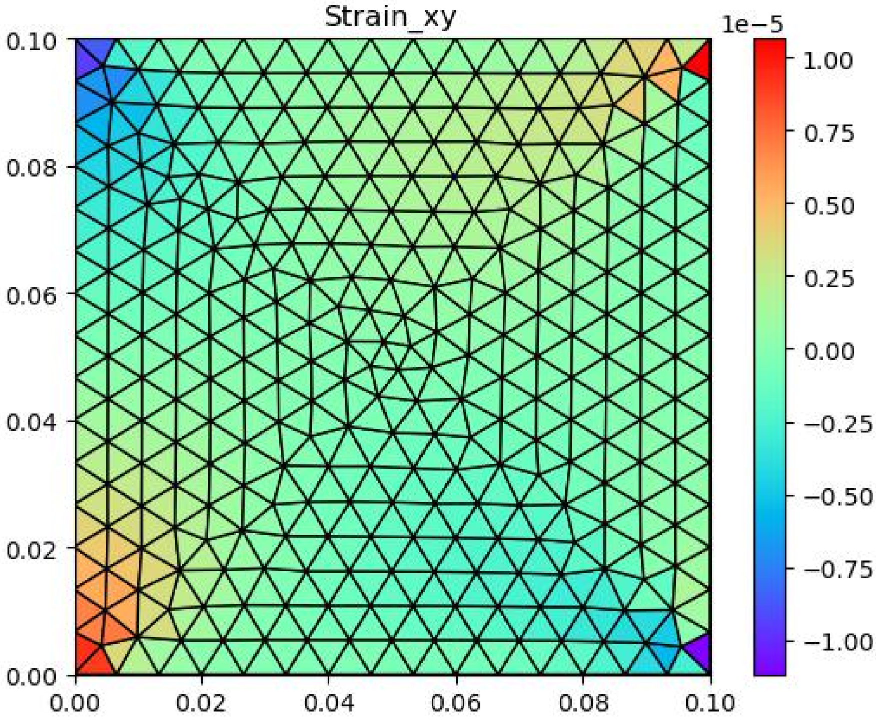


（a）python 程序 x 轴方向正应变

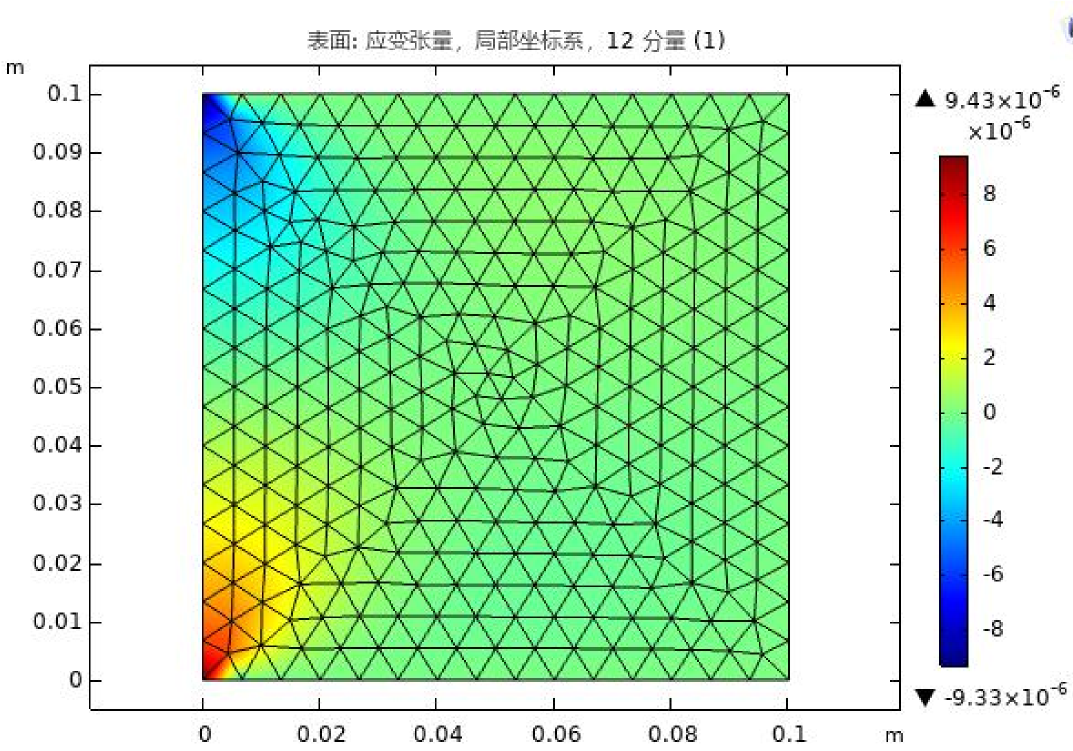


（b）comsol 软件 x 轴方向正应变

图 3. x 轴方向正应变对比图

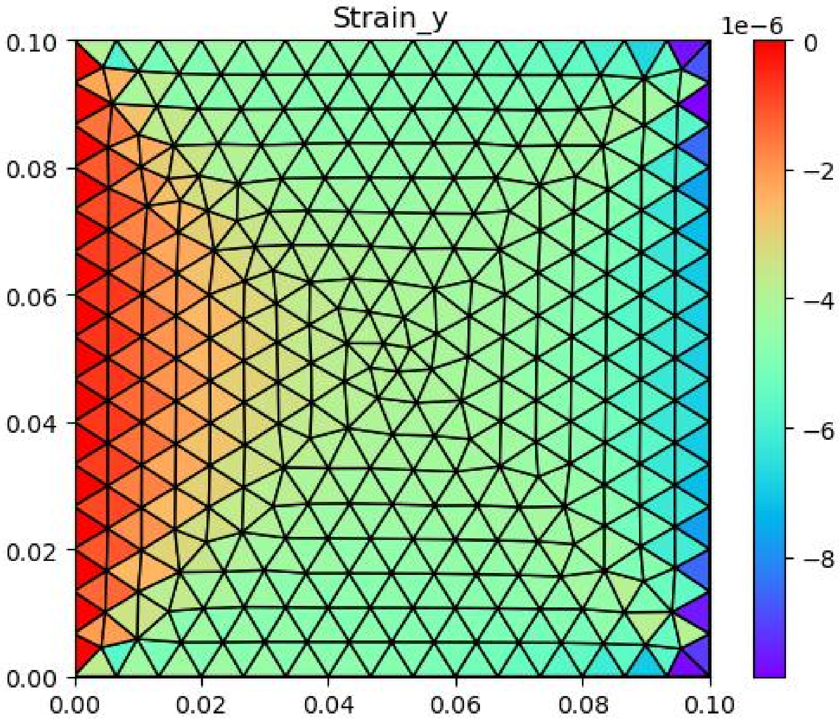


（a）python 程序 xy 方向切应变

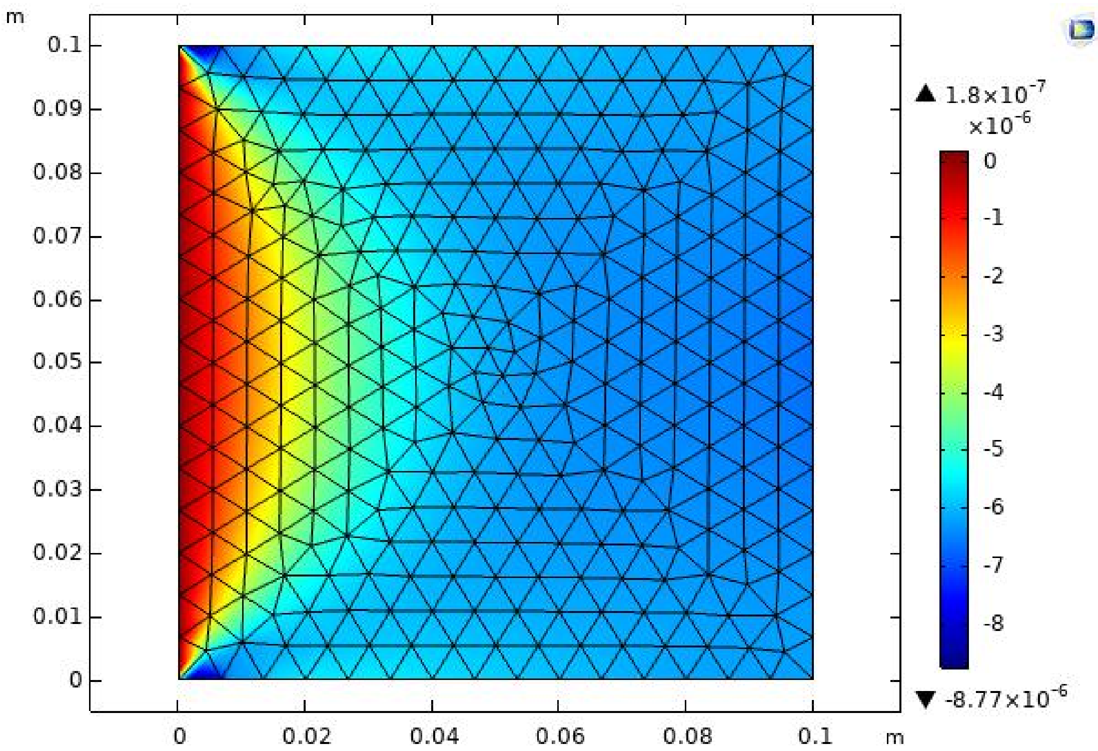


（b）comsol 软件 xy 方向切应变

图 4. xy 方向切应变对比图

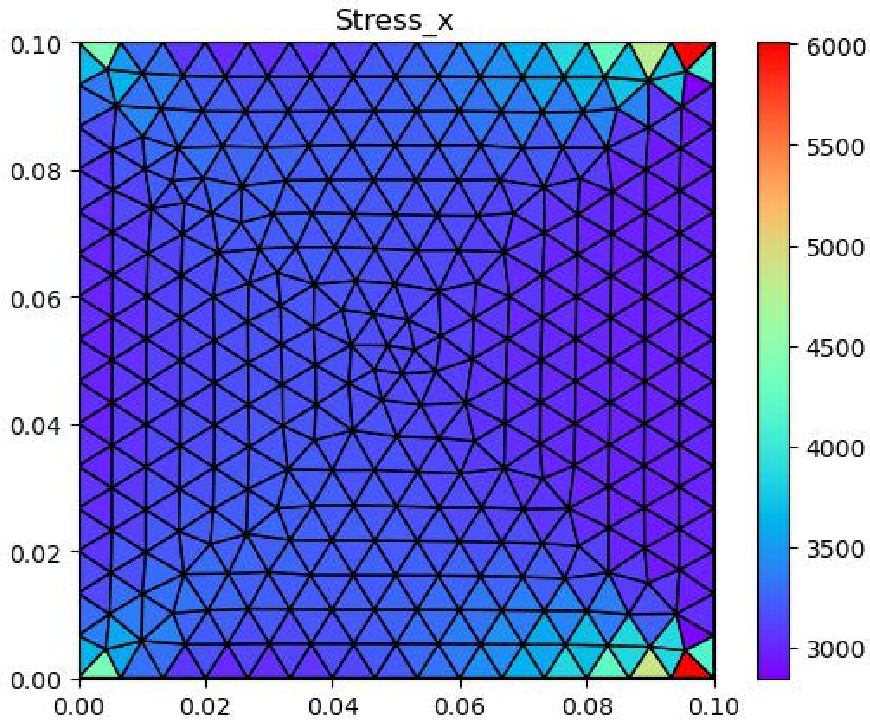


（a）python 程序 y 方向切应变

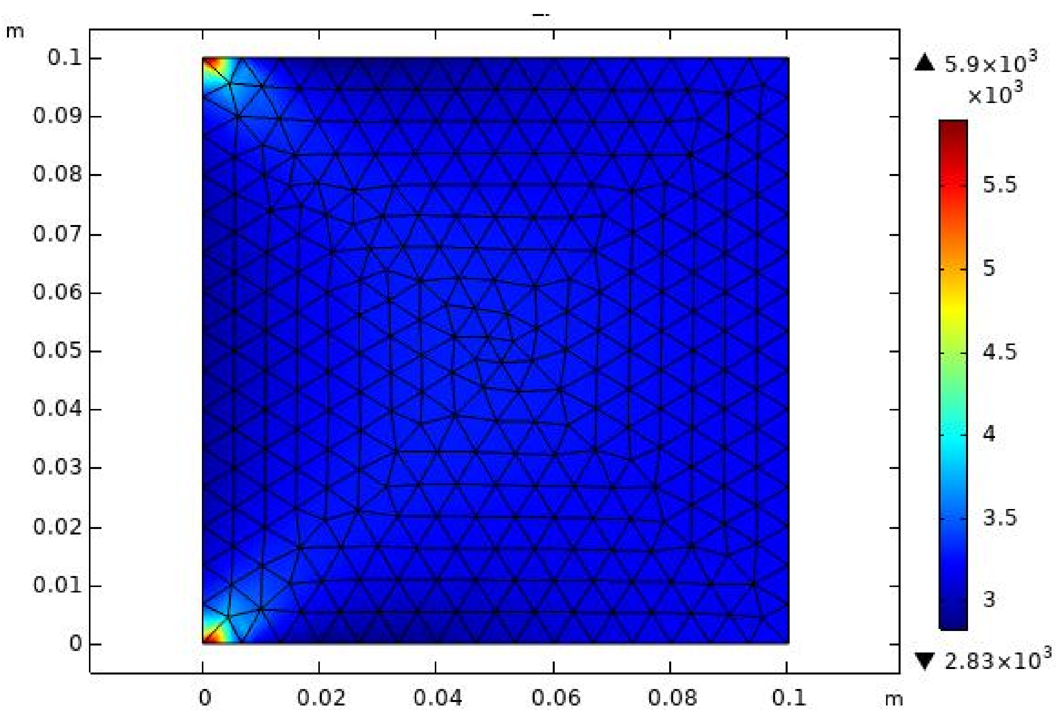


（b）comsol 软件 y 方向正应变

图 5. y 方向正应变对比图

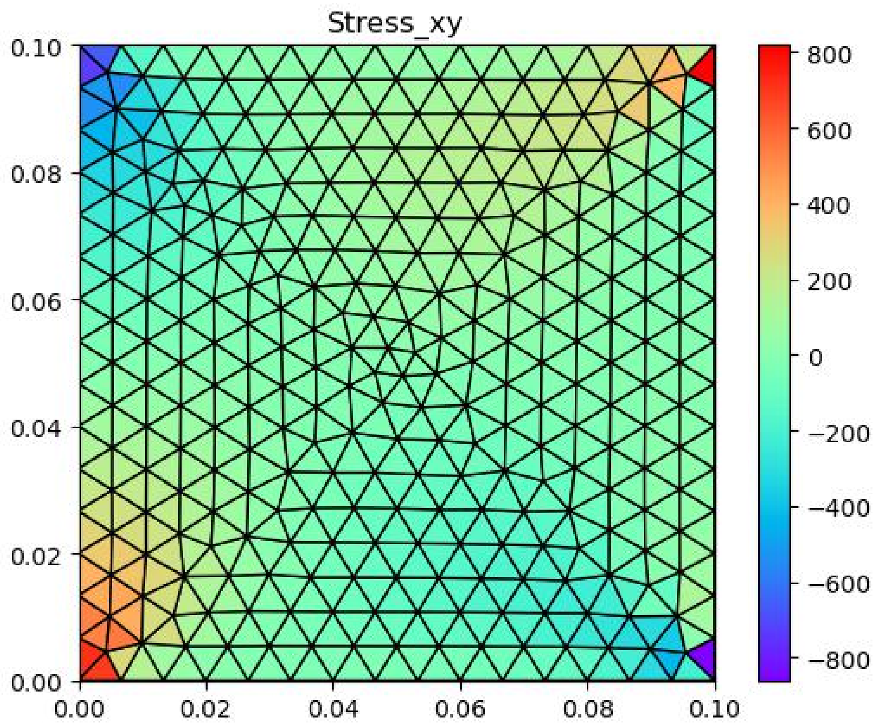


（a）python 程序 x 方向正应力

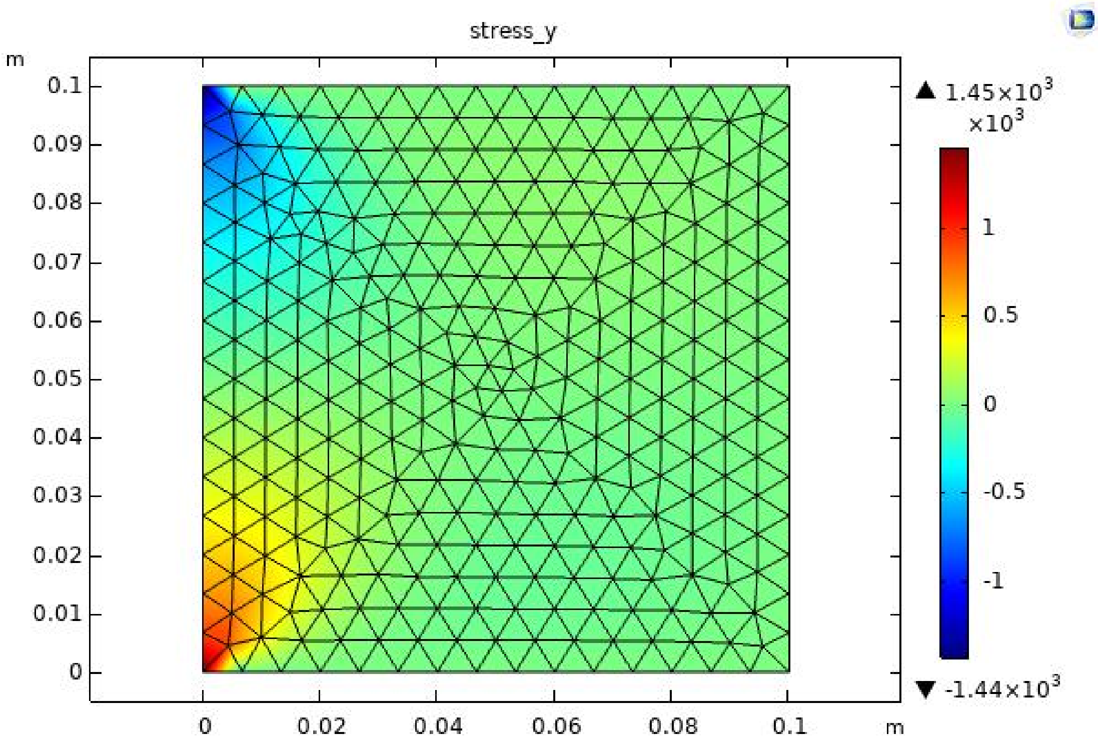


（b）comsol 软件 x 方向正应力

图 6. x 方向正应力对比图

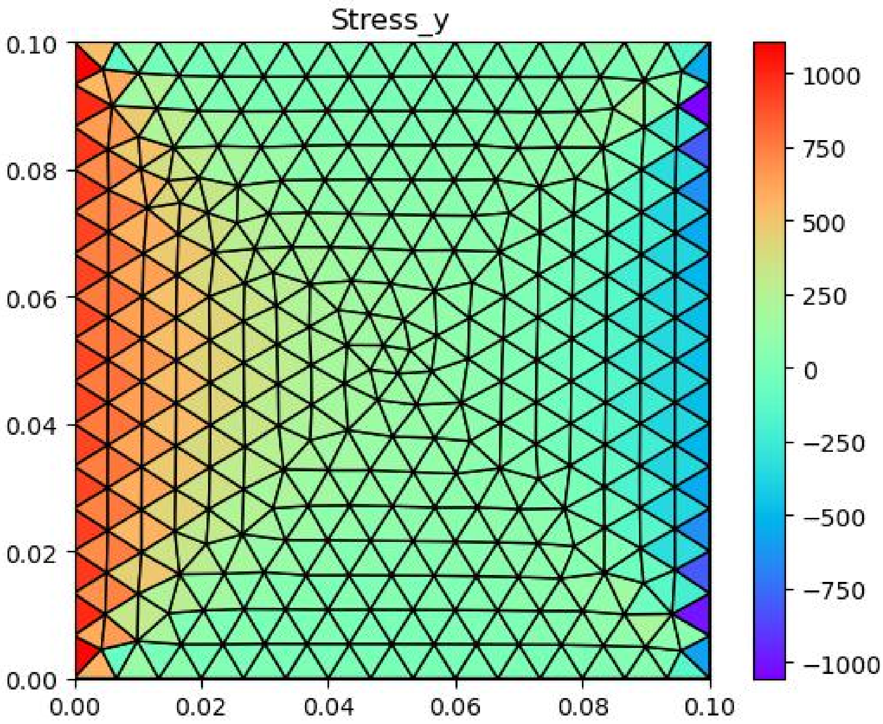


（a）python 程序 xy 方向切应力

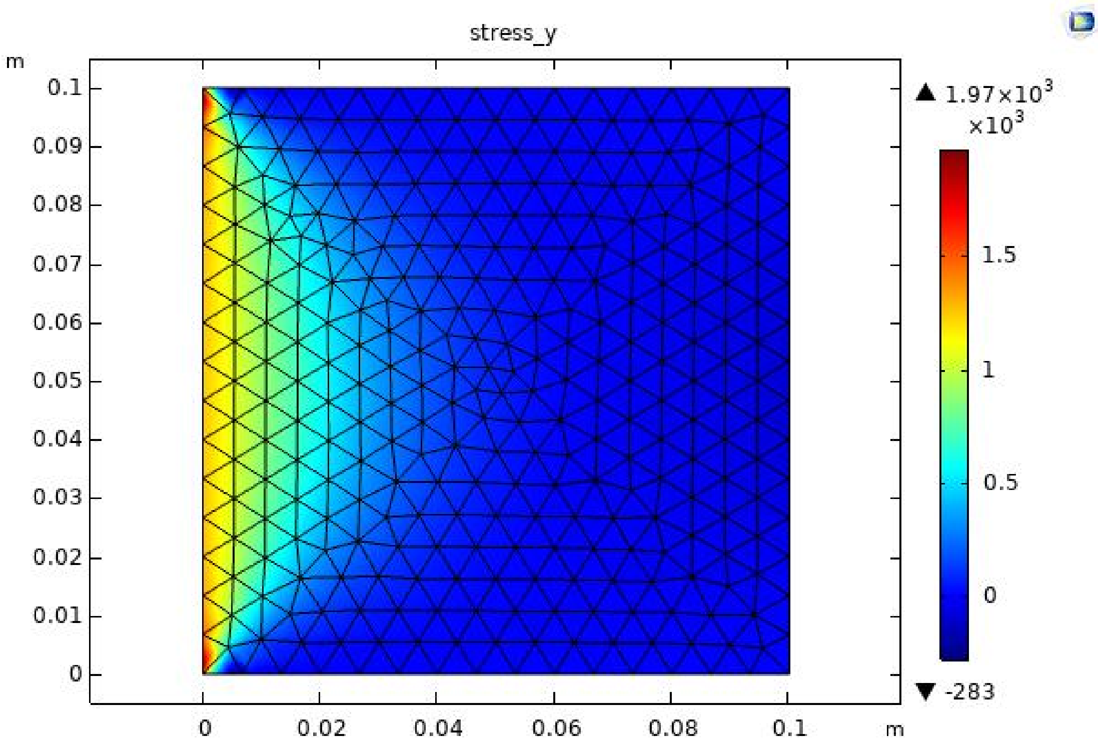


（b）comsol 软件 xy 方向切应力

图 7. xy 方向切应力对比图



（a）python 程序 y 方向正应力



（b）comsol 软件 y 方向正应力

图 8. y 方向正应力对比图