第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

★ 张量与空间及坐标变换密切相关。

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

★ 张量与空间及坐标变换密切相关。

★ 设Σ系中一点(x_1, x_2, x_3)，通过坐标系的转动，在Σ'系中坐标为(x'_1, x'_2, x'_3)，则:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \qquad , \qquad i = 1, 2, 3$$

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

- ★ 张量与空间及坐标变换密切相关。
- ★ 设Σ系中一点(x_1, x_2, x_3)，通过坐标系的转动，在Σ'系中坐标为(x'_1, x'_2, x'_3)，则：

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \qquad , \qquad i = 1, 2, 3$$

- ★ 其中$\alpha_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$为坐标转动角的方向余弦，由其构成的矩阵称为坐标变换系数矩阵。

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

★ 张量与空间及坐标变换密切相关。

★ 设Σ系中一点(x_1, x_2, x_3)，通过坐标系的转动，在Σ′系中坐标为(x_1', x_2', x_3')，则:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \qquad , \qquad i = 1, 2, 3$$

★ 其中$\alpha_{ij} = \boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j$为坐标转动角的方向余弦，由其构成的矩阵称为坐标变换系数矩阵。

【爱因斯坦求和约定】 在张量运算中，在算式的某项中出现重复下标，就意味着对这个指标求和，求和号$\sum$并不写出，该指标称之为**哑**指标。

第二节　张量初步

§ 2.1　坐标变换与爱因斯坦(Einstein)求和约定

★ 张量与空间及坐标变换密切相关。

★ 设Σ系中一点(x_1,x_2,x_3)，通过坐标系的转动，在Σ'系中坐标为(x'_1,x'_2,x'_3)，则:

$$x'_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}x_j \qquad , \qquad i=1,2,3$$

★ 其中$\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}_j$为坐标转动角的方向余弦，由其构成的矩阵称为坐标变换系数矩阵。

【爱因斯坦求和约定】 在张量运算中，在算式的某项中出现重复下标，就意味着对这个指标求和，求和号$\sum$并不写出，该指标称之为**哑**指标。

由此，上式即可简写成

$$x'_i=\alpha_{ij}x_j \qquad , \qquad i=1,2,3$$

★ 满足式(1)（距离保持不变）的线性变换称之为正交变换:

$$x_i'x_i' = x_ix_i = const \tag{1}$$

★ 满足式(1)（距离保持不变）的线性变换称之为正交变换:

$$x'_i x'_i = x_i x_i = const \tag{1}$$

★ 空间转动属于正交变换。其系数矩阵α_{ij}为一正交矩阵:

$$\tilde{\alpha}\alpha = \mathrm{I}$$

其中I为单位矩阵。

§ 2.2　张量的定义

§ 2.2　张量的定义

【定义】 如果某一物理量T，在三维笛卡儿坐标系下，由3^n个有序分量$T_{l\cdots m}$描述，并且经过由坐标系Σ到Σ'的变换α_{ij}后，满足如下关系：

$$T'_{i\cdots j} = \underbrace{\alpha_{il}\cdots\cdots\alpha_{jm}}_{n} T_{l\cdots m}$$

则称该量T为n阶张量。

§ 2.2 张量的定义

【定义】 如果某一物理量T，在三维笛卡儿坐标系下，由3^n个有序分量$T_{l\cdots m}$描述，并且经过由坐标系Σ到Σ'的变换α_{ij}后，满足如下关系：

$$T'_{i\cdots j} = \underbrace{\alpha_{il}\cdots\cdots\alpha_{jm}}_{n} T_{l\cdots m}$$

则称该量T为n阶张量。

★ 零阶张量：标量，坐标变换下不变，如质量、电荷、达朗贝尔算符等；

$$T' = T$$

§ 2.2 张量的定义

【定义】 如果某一物理量T，在三维笛卡儿坐标系下，由3^n个有序分量$T_{l\cdots m}$描述，并且经过由坐标系Σ到Σ'的变换α_{ij}后，满足如下关系：

$$T'_{i\cdots j} = \underbrace{\alpha_{il}\cdots\cdots\alpha_{jm}}_{n} T_{l\cdots m}$$

则称该量T为n阶张量。

★ 零阶张量：标量，坐标变换下不变，如质量、电荷、达朗贝尔算符等；

$$T' = T$$

★ 一阶张量：矢量，如速度、力、电场强度、∇算符等；

$$T'_i = \alpha_{ij} T_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

§ 2.2 张量的定义

【定义】 如果某一物理量T，在三维笛卡儿坐标系下，由3^n个有序分量$T_{l\cdots m}$描述，并且经过由坐标系Σ到Σ'的变换α_{ij}后，满足如下关系：

$$T'_{i\cdots j} = \underbrace{\alpha_{il}\cdots\cdots\alpha_{jm}}_{n} T_{l\cdots m}$$

则称该量T为n阶张量。

★ 零阶张量：标量，坐标变换下不变，如质量、电荷、达朗贝尔算符等;

$$T' = T$$

★ 一阶张量：矢量，如速度、力、电场强度、∇算符等;

$$T'_i = \alpha_{ij} T_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

★ 高阶张量：应用最多的是二阶张量

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;

★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分:

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;

★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分:

◆ 迹（标量）T_{ii} 自由度为1

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;

★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分:

- ◆ 迹（标量）T_{ii} 自由度为1
- ◆ 无迹对称张量$T_{ij} = T_{ji}$ 且$T_{ii} = 0$ 自由度为5

§ 2.3　二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等；

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示；

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果；

★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分：

- 迹（标量）T_{ii} 自由度为1
- 无迹对称张量$T_{ij} = T_{ji}$ 且$T_{ii} = 0$ 自由度为5
- 反对称张量$T_{ij} = -T_{ji}$ 自由度为3

§ 2.3　二阶张量

- ★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

- ★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;
- ★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;
- ★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分:
  - ◆ 迹（标量）T_{ii} 自由度为1
  - ◆ 无迹对称张量$T_{ij} = T_{ji}$ 且$T_{ii} = 0$ 自由度为5
  - ◆ 反对称张量$T_{ij} = -T_{ji}$ 自由度为3
- ★ 张量的对称性不随坐标变换改变;

§ 2.3 二阶张量

★ 二阶张量：如张力张量、电四极矩、转动惯量、介电张量等;

$$T'_{ij} = \alpha_{il}\alpha_{jm}T_{lm}$$

★ 二阶张量可以用一个矩阵来表示;

★ 张量的含义：T_{ij}分量：在j方向分量作用下的i方向的反应效果;

★ 张量的自由度：任何一个张量都可以分解为三个部分:

- ◆ 迹（标量）T_{ii} 自由度为1
- ◆ 无迹对称张量$T_{ij} = T_{ji}$ 且$T_{ii} = 0$ 自由度为5
- ◆ 反对称张量$T_{ij} = -T_{ji}$ 自由度为3

★ 张量的对称性不随坐标变换改变;

★ 两个矢量的并矢为二阶张量：$\boldsymbol{ab} = \overleftrightarrow{\mathscr{T}} \neq \boldsymbol{ba}$, $T_{ij} = a_i b_j$

§ 2.4 克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

§ 2.4 克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

★ 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

§ 2.4　克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

★ 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

★ 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$

§ 2.4 克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

★ 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

★ 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$

★ 转置不变性：$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$

§ 2.4　克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

★ 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

★ 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$

★ 转置不变性：$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$

★ 替换性：$\delta_{ij} v_j = v_i$

§ 2.4 克罗内克(Kronecker)符号δ_{ij}（替换符号）

★ 克罗内克符号δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 1 \qquad (i = j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

★ 对称性：$\delta_{ij} = \delta_{ji}$

★ 转置不变性：$\delta'_{ij} = \delta_{ij}$

★ 替换性：$\delta_{ij} v_j = v_i$

★ 单位张量：$\boldsymbol{v} \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \overleftrightarrow{\mathscr{I}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

§ 2.5 勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

§ 2.5 勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

★ 勒维–契维塔符号ε_{ijk}（三阶反对称张量）

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \qquad (ijk = 123, 231, 312)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \qquad (ijk = 213, 321, 132)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad (ijk = 112, 233, \cdots)$$

§ 2.5　勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

★ 勒维–契维塔符号ε_{ijk}（三阶反对称张量）

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \qquad (ijk = 123, 231, 312)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \qquad (ijk = 213, 321, 132)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad (ijk = 112, 233, \cdots)$$

★ 反对称性：$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

§ 2.5 勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

★ 勒维–契维塔符号ε_{ijk}（三阶反对称张量）

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \qquad (ijk = 123, 231, 312)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \qquad (ijk = 213, 321, 132)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad (ijk = 112, 233, \cdots)$$

★ 反对称性: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

★ 转置不变性: $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$

§ 2.5　勒维–契维塔(levi–civita)符号ε_{ijk}（排列符号）

★ 勒维–契维塔符号ε_{ijk}（三阶反对称张量）

$$\varepsilon_{ijk} = +1 \qquad (ijk = 123, 231, 312)$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \qquad (ijk = 213, 321, 132)$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \qquad (ijk = 112, 233, \cdots)$$

★ 反对称性: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

★ 转置不变性: $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$

★ 排列性: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad , \quad (\nabla \times \boldsymbol{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

§ 2.6　张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

§ 2.6　张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

§ 2.6　张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij}=B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij}+B_{ij}=C_{ij}$

★ 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=k\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\Leftrightarrow C_{ij}=kA_{ij}$

★ 张量的并乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}}\Leftrightarrow C_{ijlm}=A_{ij}B_{lm}$

§ 2.6　张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

★ 张量的并乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

一般而言：$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$！ $\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等: $A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法: $A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘: $\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

★ 张量的并乘: $\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

一般而言: $\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$! $\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加

★ 结合律与分配律:

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等: $A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法: $A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘: $\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

★ 张量的并乘: $\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

一般而言: $\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$! $\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加

★ 结合律与分配律:

$$(\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}})\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}})$$

§ 2.6 张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

★ 张量的并乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

一般而言：$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$！$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加

★ 结合律与分配律：

$$(\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}})\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}})$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}}) = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$$

§ 2.6　张量的运算法则：加法与乘法

★ 张量相等：$A_{ij} = B_{ij}$

★ 张量加法：$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$

★ 标量与张量相乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = k\overleftrightarrow{\mathscr{A}} \Leftrightarrow C_{ij} = kA_{ij}$

★ 张量的并乘：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \Leftrightarrow C_{ijlm} = A_{ij}B_{lm}$

一般而言：$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} \neq \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$！$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$的阶数是$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$阶数相加

★ 结合律与分配律：

$$(\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}})\overleftrightarrow{\mathscr{C}} = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}})$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}(\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}}) = \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{A}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{C}}$$

$$(\overleftrightarrow{\mathscr{B}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}})\overleftrightarrow{\mathscr{A}} = \overleftrightarrow{\mathscr{B}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}} + \overleftrightarrow{\mathscr{C}}\,\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$$

§ 2.7　张量的运算法则：缩并与内积

§ 2.7 张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

§ 2.7 张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

§ 2.7 张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l} = \sum_j \sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l} \cdot \delta_{jk} = A_{i\cdots j\cdots k\cdots l} \cdot \delta_{jk}$$

★ 两个张量的内积（缩并）

§ 2.7　张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

★ 两个张量的内积（缩并）

◆ 两个张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$先并乘后各取一下标做缩并的运算称为内积，得到$m+n-2$阶张量。

§ 2.7 张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

★ 两个张量的内积（缩并）

◆ 两个张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$先并乘后各取一下标做缩并的运算称为内积，得到$m+n-2$阶张量。

◆ 若选取的下标是相邻的，可以记做：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$

$$C_{im}=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}=A_{il}B_{lm}$$

§ 2.7　张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

★ 两个张量的内积（缩并）

◆ 两个张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$先并乘后各取一下标做缩并的运算称为内积，得到$m+n-2$阶张量。

◆ 若选取的下标是相邻的，可以记做：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$

$$C_{im}=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}=A_{il}B_{lm}$$

◆ 若$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$是二阶张量，$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$是一阶张量，同样可以用矩阵乘法。

§ 2.7　张量的运算法则：缩并与内积

★ 缩并：阶数从n到$n-2$的运算，只有$n>2$缩并才有意义；

◆ n阶张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$对下标$(j\cdots k)$的缩并定义为：

$$B_{i\cdots l}=\sum_j\sum_k A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}=A_{i\cdots j\cdots k\cdots l}\cdot\delta_{jk}$$

★ 两个张量的内积（缩并）

◆ 两个张量$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$与$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$先并乘后各取一下标做缩并的运算称为内积，得到$m+n-2$阶张量。

◆ 若选取的下标是相邻的，可以记做：$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$

$$C_{im}=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}=A_{il}B_{lm}$$

◆ 若$\overleftrightarrow{\mathscr{A}}$是二阶张量，$\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$是一阶张量，同样可以用矩阵乘法。

★ 双重内积：两个张量先进行并乘，然后再两次缩并；$\overleftrightarrow{\mathscr{C}}=\overleftrightarrow{\mathscr{A}}:\overleftrightarrow{\mathscr{B}}$

$$C=A_{ij}B_{lm}\delta_{jl}\delta_{im}$$

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。

- ★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。
  - ◆ $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

§ 2.8　张量的运算法则：并矢

★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。

- $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

★ 并矢的内积运算

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。

- $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

★ 并矢的内积运算

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$$

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。

◆ $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

★ 并矢的内积运算

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

§ 2.8 张量的运算法则：并矢

★ 并矢按单位并矢的分解：单位矢量$\boldsymbol{e}_i$的并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$是二阶张量，称为单位并矢。

◆ $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$的矩阵表示除了$E_{12}$项等于1之外均为零；$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$就是二阶张量的九个基。

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

★ 并矢的内积运算

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{bc}$$

$$(\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{cd}) = (\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}$$

§ 2.9　并矢的微分运算

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$$

§ 2.9 并矢的微分运算

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E})=(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) \\ &= \boldsymbol{e}_x \frac{\partial E^2}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial E^2}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial E^2}{\partial z} = \nabla E^2\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) \\ &= \boldsymbol{e}_x \frac{\partial E^2}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial E^2}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial E^2}{\partial z} = \nabla E^2\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathscr{I}} E^2) = (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}})\,E^2 + (\nabla E^2) \cdot \overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \nabla E^2$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)\\ &= \boldsymbol{e}_x\frac{\partial E^2}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial E^2}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial E^2}{\partial z} = \nabla E^2\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) = (\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}})\,E^2 + (\nabla E^2)\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \nabla E^2$$

$$\oint dS\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \iiint dV\,\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{e}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2)\\ &= \boldsymbol{e}_x\frac{\partial E^2}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial E^2}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial E^2}{\partial z} = \nabla E^2\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathscr{I}}E^2) = (\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}})\,E^2 + (\nabla E^2)\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \nabla E^2$$

$$\oint dS\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \iiint dV\,\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$$

$$\oint d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}) = \iiint dV\,\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})$$