NPC问题分类

1.包装问题：SET-PACKING，INDEPENDENT SET
2.覆盖问题：SET-COVER， VERTEX-COVER
3.约束满足问题：SAT， 3-SAT
4.序列问题：HAMILTONIAN-CYCLE， TSP
5.分区问题：3D-MATCHING, 3-COLOR
6.数值问题：SUBSET-SUM， KNAPSACK

1

三种规约策略

1、简单等价规约　等价规约通常发生在两个互补的问题之间

若X $\le_p$ Y和Y $\le_p$ X，则X $\equiv_p$ Y 。

例1：最大独立集问题 $\equiv_p$ 最小顶点覆盖

- **独立集I**：G=<V,E>，设I⊆V，I中**任何点对之间无边**，即E中每条边**至多**有1个顶点在集合I中。

  Independent-Set={<G,k>: G有一个size≥k的独立集}

- **顶点覆盖C**：G=<V,E>，设C⊆V，E中每条边**至少**有1个顶点在集合C中。

  Vertex-Cover={<G,k>: G有一个size≤k的顶点覆盖}

两个集合互补：I是一个独立集当且仅当V-I是一个顶点覆盖集，即C=V-I。

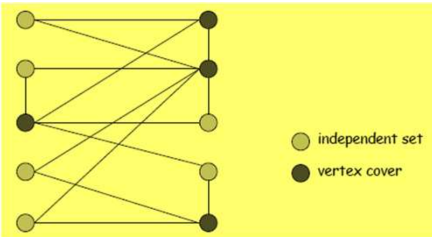
2

三种规约策略

1、简单等价规约（续）

若X $\le_p$ Y和Y $\le_p$ X，则X $\equiv_p$ Y 。

例1：最大独立集问题 $\equiv_p$ 最小顶点覆盖



3

三种规约

1、简单等价规约（续）

- Independent-Set $\le_p$ Vertex-Cover （式1）

令I为任意独立集，∀(u,v)∈E

∵ I是独立集，I中任何点对间无边，每边至多有1端点在I中

∴ u ∉ I 或 v ∉ I ⇒ u ∈ V - I 或 v ∈ V – I

即：u，v至少有1个顶点在 C=V-I 中 ⇒ 图G中任意edge关联的两个顶点至少有1个顶点在 C中

遍历E中所有边，检查其端点是否在I中，将不在I中的端点放入点集C中。此过程在多项式时间$O(n^3)$内完成

4

三种规约

1、简单等价规约（续）

- Vertex-Cover $\le_p$ Independent-Set （式2）

设C为任意的顶点覆盖集，令I=V-C，则I是独立集

Pf: 要证明顶点集合I中任意点对之间无边，即：∀ u,v ∈ I，(u,v) ∉ E(G)

反证：若 (u,v) 是E(G)中的1条边，因为C=V-I是顶点覆盖集，则(u,v)至少有1个端点在V-I中。即：

u ∈ V - I 或 v ∈ V – I ⇒ u ∉ I 或 v ∉ I

与 u ∈ I and v ∈ I 矛盾!

此过程亦可在多项式时间内完成

由式1和2可得：Vertex-Cover $\equiv_p$ Independent-Set

5

三种规约

$S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$，$k = 2$

$S_1 = \{3,7\}$　　$S_4 = \{2,4\}$

$S_2 = \{3,4,5,6\}$　　$S_5 = \{5\}$

$S_3 = \{1\}$　　$S_6 = \{1,2,6,7\}$

2、从特殊到一般

例2：Vertex-Cover $\le_p$ S

- 集合覆盖S′

非空集S 的一个覆盖S' 是S 的若干**非空**子集的集合，他们的并集等于S。即：

$S_i \subseteq S$, $S_i \ne \Phi$ ($1 \le i \le m$), 若$J \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$ 且 $\bigcup_{j\in J} S_j = S$，

则称 $\{S_j\}_{j\in J}$ 为S 的一个覆盖。注意：**子集的交未必为空**！

图例：最小集合覆盖

Set-Cover={ <S,k>, S有一个size≤k的集合覆盖 }

图中S′ = { S, S }是S的一个最小的集合覆盖

6

三种规约-从特殊到一般（续）

例2：Vertex-Cover $\leq_p$ Set-Cover（续）

Pf：设C={ <G,k> }是1个顶点覆盖集，我们构造1个集合覆盖，其大小与C相等。

令集合U为G中的边集合，即U=E(G)

∀v∈C，构造U的子集 S_v= { e∈E(G)： 所有关联顶点v的边 e }

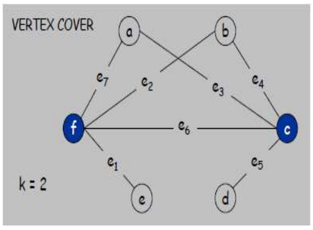
顶点覆盖C中有k个顶点，将每个顶点构造U的1个子集S_v，下面证明这k个构造的子集之并集等于G的边集U。

设：S={ S_v： ∀v∈C }，则 |S|=|C|=k

∀e∈E(G)，设e=(u,v)，由顶覆盖定义知，u∈C or v∈C，则：

若u∈C 则e ∈S_u，若v∈C 则e ∈S_v 即E中任一条边至少在S中的某个子集中，S中子集之并集=E(G)=U。S是U的size为

三种规约-从特殊到一般（续）



这里：U=E(G)={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , e_6, e_7 }, C={ c, f }

S_c={ e_3, e_4, e_5, e_6 }， S_f={ e_1, e_2, e_6, e_7 } S={ S_c, S_f }

U= S_c ∪ S_f，S是U的最小集合覆盖。即：C $\leq_p$ S

三种规约

3、通过编码（Encoding with gadgets）

■ 3-SAT：3-CNF的可满足性

- 字面量(literal) 布尔变量或其"非"：x_i，$\overline{x_i}$
- 子句(clause) 若干个字面量的析取：$C_j = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
- 合取范式(Conjunction Normal Form, CNF)

  所有子句的合取("与")的布尔公式
- 3合取范式(3-CNF)

  每个子句中恰有3个不同字面量的合取范式
- 3-SAT 3-CNF的可满足性问题是指3-CNF形式的布尔公式 Φ 是否存在一组变量的真值赋值，使得公式 Φ 的值为真。

三种规约

3、通过编码（Encoding with gadgets）

■ 3-SAT $\leq_p$ Independent-Set

设Φ=C_1◦C_2◦⋯◦C_k，构造G的独立集S

对Φ中每个子句C_i=z_{i1}Vz_{i2}Vz_{i3}，在G中创建3个顶点z_{i1},z_{i2},z_{i3}和3条边(z_{i1},z_{i2})，(z_{i2},z_{i3})，(z_{i3},z_{i1})的三角形，由此形成点集V_i和边集E_i。

若在2个不同子句中有 x_i和$\overline{x_i}$ ，则在这2点间连1条边，称其为冲突边，表示他们不可能同时赋值1，故对应的2点不可能同时入选S。

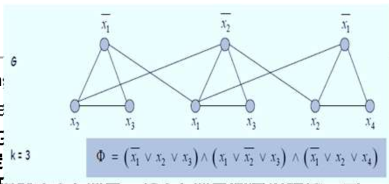
Φ可满足 ⇔ S是G的size为k的独立集（S由每个V_i选1点组成）

⇒设有1个Φ=1赋值,对每个C_i，若z_{ij}使得C_i=1，则S=S ∪ {z_{ij}}。

∵每个V_i中只选了1个顶点加入S，且冲突边的2个顶点中至多只有1个顶点被选入S，即：S中任意点对之间不可能有边。

 ∴S是独立集

三种规约



3、通过编码（Encodin

■ 3-SAT $\leq_p$ Indepe

⇐在如前构造的图G

三角形中， S一定

则会在某个三角形中

S是独立集矛盾!

∀i∈[1,k]，若在V_i中是选择z_{ij}加入S，则令z_{ij}=1，因此与V_i对应的子句C_i=1， 故有：Φ=C_1◦C_2◦⋯◦C_k =1

因此，存在一个真值赋值，使得Φ是可满足的。

图例：

G的独立集S={z_{12}(x_2), z_{21}(x_1), z_{33}(x_4) }

真值赋值 C1：x_2=ture，C2：x_1=ture，C3：x_4=ture ⇒ Φ=ture

P、NP及NPC类问题

■ NPC问题证明举例

例：证明顶点覆盖问题是NP完全的。

1）先证Vertex-Cover∈NP

假设已知一个图G= （V,E）和整数k，选顶点覆盖集V'作为G的证书。验证算法先验证|V'|=k，然后对每条边（u，v）∈E，检查是否有u ∈V'或v∈ V'？很容易在多项式时间内完成上述验证。

2） Independent-Set $\leq_p$ Vertex-Cover

见前面证明。因为NP完全问题Independent-Set可在多项式时间内规约到顶点覆盖问题 ，故顶点覆盖问题亦是NPC问题。

Ex.：给出与图的独立集问题相关的判定问题的形式化描述，并证明它是NP完全的（提示：根据团问题进行规约）。