

## IV 高级设计与分析技术

- 动态规划
- 贪心法
- 平摊分析

1

## Chapter 15. 动态规划

### Dynamic Programming

2

思想，就像幽灵一样……在它自己解释自己之前，必须先告诉它些什么。

——查尔斯·狄更斯



3

Dynamic Programming作为一种使**多阶段决策过程最优**的通用方法，在20世纪50年代由美国数学家**理查德·贝尔曼**提出。

在应用数学中用来解决某类最优问题的重要工具，而且在计算机领域中被当做一种通用的算法设计技术来使用。



4

## Ch.15 动态规划

动态规划主要用于**优化问题求解**，即求出问题的**最优(最大/小)解**，当有多个最优解时一般是求一个即可。

### ■ 与分治法异同

- ◆ 相同点：都是通过combining子问题的解来解决整个问题的解
- ◆ 不同点 (Page 204 in our text book 第一段)
  - 1) **分治法**是将问题划分为**独立的子问题(互不相交)**，递归地求解子问题，然后**combine**

5

## Ch.15 动态规划

- 2) 当分解问题**非独立**时，即他们**共享子子问题**时，可采用**动态规划**

因为此时分治法将**重复地解这些共同的子子问题**，形成重复计算，而**动态规划对每一子子问题只做一次计算**，然后将答案存储在一表中(这就是programming含义，像节目单一样)，故可**避免重复计算 (critical issue: 一般方法是自底向上)**

回忆Fibonacci数递归式求解

6

## Ch.15 动态规划

### ■ 四个步骤 P204

- ❖ Step1: 描述最优解的结构特征
- ❖ Step2: 递归地定义一个最优解的**值**
- ❖ Step3: 自底向上计算一个最优解的**值**
- ❖ Step4: 从已计算的信息中构造一个最优解

Step1、2、3是基础

若要构造最优解，则step3中应维护附加info，如求最短路径

课本钢条切割问题自学

7

## 15.1 矩阵链乘 (Page 210)

- 给定n个矩阵的序列  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ ，需要计算其积  $A_1 A_2 \cdots A_n$
- 计算多个矩阵连乘积可用**括号**来决定计算次序，每一个括号内的矩阵相乘调用**标准的矩阵乘法**

### ■ Concept: 矩阵积的完全括号化

- ❖ 它是单个矩阵 递归定义
- ❖ 或是两个完全括号化的矩阵积被包括在一个括号里  
 $\rightarrow (A_1(A_2A_3))$  或  $((A_1A_2)(A_3A_4))$  **计算次序无二义性**

8

## 15.1 矩阵链乘

- 矩阵乘法满足**结合律**，故所有不同的完全括号化方案产生同样积

例:  $A_1 \sim A_4$  积有五种不同的**完全括号化**方式

$$\begin{aligned}
 &(A_1(A_2(A_3A_4))) \quad (A_1((A_2A_3)A_4)) \\
 &((A_1A_2)(A_3A_4)) \quad ((A_1(A_2A_3))A_4) \\
 &((A_1A_2)A_3)A_4
 \end{aligned}$$

**Note:**  
观察分裂点位置

9

## 15.1 矩阵链乘

- 不同的括号化方式产生不同的**计算成本**

两矩阵相乘  $A_{pq} \cdot B_{qr}$  的**标量乘法**次数为  $p \cdot q \cdot r$

例: 设  $A_1, A_2, A_3$  的维数分别为  $10 \times 100, 100 \times 5, 5 \times 50$

$$\begin{aligned}
 ((A_1A_2)A_3): \quad &A_1A_2 \rightarrow 10 \times 100 \times 5 = 5000 \\
 &(A_1A_2)A_3 \rightarrow 10 \times 5 \times 50 = 2500 \\
 &\text{Total: } 5000 + 2500 = 7500
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A_1(A_2A_3)): \quad &A_2A_3 \rightarrow 100 \times 5 \times 50 = 25000 \\
 &A_1(A_2A_3) \rightarrow 10 \times 100 \times 50 = 50000 \\
 &\text{Total: } 50000 + 25000 = 75000
 \end{aligned}$$

10

## 15.1 矩阵链乘

- 矩阵链乘实质上是一个**最优括号化**问题

- ❖ 给定  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ ,  $A_i$  的维数  $p_{i-1} \times p_i (1 \leq i \leq n)$ , 在  $A_1 A_2 \cdots A_n$  的积中插入括号使其**完全括号化**, 且使得**数量乘法次数最少**

- ❖ 计算括号数目

$P(n)$  表示  $n$  个矩阵序列中可选括号化方案的数量, 将该序列从  $k$  和  $k+1$  间划分为两子序列, 然后独立地将其括号化, 用穷举法产生的括号数:

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & n > 1 \end{cases}$$

11

## 15.1 矩阵链乘

其解是一个catalan数, 是指数阶:  $\Omega(4^n/n^{1.5})$ , 不如直接计算结果。

用**动态规划**可获得**多项式解**

- Step1: 最优的括号化结构 (即描述最优解的结构特征)

- ❖ 将  $A_i A_{i+1} \cdots A_j$  积简记为  $A_{i..j}$ , 其中  $1 \leq i \leq j \leq n$
- ❖ 设  $A_i A_{i+1} \cdots A_j$  的**最优括号化**是在  $A_k$  和  $A_{k+1}$  之间进行分裂 ( $i \leq k \leq j-1$ , 要求  $i < j$ )
- ❖ 对某个  $k$ , 先计算  $A_{i..k}$  和  $A_{k+1..j}$ , 然后将这两个积相乘产生积  $A_{i..j}$

12

## 15.1 矩阵链乘

**最优括号化的成本是：**

计算 $A_{1..k}$ 的成本+计算 $A_{k+1..j}$ 的成本+两个积相乘成本

关键：

$A_1 A_{i+1} \dots A_j$  的最优括号化亦要求前后缀子链 $A_{1..k}$ 和 $A_{k+1..j}$ 是最优括号化。可用反证法证明，若 $A_{1..k}$ 括号化不是最优，则可找到一个成本更小的方法将其括号化，代入到 $A_{1..j}$ 的最优括号化表示中，得到的计算成本比最优解小，矛盾！

13

## 15.1 矩阵链乘

■ Step2: 递归解 (递归地定义一个最优解的值)

怎样用子问题的最优解递归地定义原问题的最优解(一般是最优解的值)? 对矩阵链乘, 子问题的最优解的值是:

确定 $A_{1..j}$ 括号化的最小代价(即按最优括号化计算的的成本)。

设 $m[i,j]$ 是计算 $A_{i..j}$ 所需乘法的最小次数(最优解的值), 则 $A_{1..n}$ 的最小计算成本是 $m[1,n]$ 。

1) 若 $i=j$ ,  $m[i,i]=0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 链上只有一个 $A_i$ , 无需乘法

14

## 15.1 矩阵链乘

2) 若 $i < j$ , 由Step1中的最优解结构可知:

假定最优括号化的分裂点为 $k$  ( $i \leq k \leq j-1$ ), 则:

$$m[i, j] = m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j$$

其中 $m[i, k]$ : 子积 $A_{i..k}$ 的最小代价,

$p_{i-1}$ :  $A_i$ 的行,  $p_k$ :  $A_k$ 的列,  $p_j$ :  $A_j$ 的列

在不知道 $k$ 的取值的情况下, 可在 $j-i$ 个值中选取最优者, 所以 $A_{i..j}$ 的最小计算成本为:

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j\} & i < j \end{cases}$$

若要构造最优解, 定义 $S[i, j]$ 记录分裂点 $k$

15

## 15.1 矩阵链乘

$$\begin{aligned} & \bullet (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6) \\ & \quad m[1,3] \quad \quad \quad m[4,6] \\ & (A_1 \quad A_2 \quad A_3) \quad (A_4 \quad A_5 \quad A_6) \\ & \quad p_0 \times p_3 \quad \quad \quad p_3 \times p_6 \\ & \quad m[1,3] + m[4,6] + p_0 p_3 p_6 \end{aligned}$$

## 15.1 矩阵链乘

■ Step3: 计算最优解的值

若简单地用递归算法计算积 $A_{1..n}$ 的最小成本 $m[1,n]$ , 则算法时间仍为指数阶。但是, 满足  $1 \leq i \leq j \leq n$  的 $i$ 和 $j$ 总共只有

$$\binom{n}{2} + n = \Theta(n^2) // i < j \text{ 有 } \binom{n}{2} \text{ 个, } i = j \text{ 有 } n \text{ 个}$$

即子问题个数并非指数。递归算法在其递归树的不同分支上要重复计算每个子问题, 这是动态规划应用的另一特征(即重叠子问题), 故自底向上计算 $m$ 的值。

❖ 算法

17

## 15.1 矩阵链乘

Instead, use a dynamic program to fill in a table  $m[i, j]$ :

- Start by setting  $m[i, i] = 0$  for  $i = 1, \dots, n$ .
- Then compute  $m[1, 2], m[2, 3], \dots, m[n-1, n]$ .
- Then  $m[1, 3], m[2, 4], \dots, m[n-2, n], \dots$
- ... so on till we can compute  $m[1, n]$ .

	1	2	3	4	5	6	
1	0						1
2		0					2
3			0				3
4				0			4
5					0		5
6						0	6

The input a sequence  $p = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ , we use an auxiliary table 辅助表  $s[1..n, 1..n]$  that records which index of  $k$  achieved the optimal cost in computing  $m[i, j]$ .

18

## 15.1 矩阵链乘

### ■ 算法：按链长 $j-i+1$ 递增序计算 $m[i,j]$

输入：

$p = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ , 其中  $p_{i-1} \times p_i$  是  $A_i$  的维数

$m[1..n, 1..n]$  记录成本

$S[1..n, 1..n]$  记录相应分裂点  $k$

19

$MatrixChainOrder(p)\{$

$n \leftarrow \text{length}[p] - 1;$  //  $p$  是维度向量, 长度为  $n+1$

for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do {

$m[i, i] \leftarrow 0;$

}

for  $l \leftarrow 2$  to  $n$  do { //  $A_{i..j}$  链长  $l = j - i + 1$

// 第一次计算  $m[i, i+1]$ , 第二次计算  $m[i, i+2]$  等

for  $i \leftarrow 1$  to  $n - l + 1$  do {

//  $1 \leq i \leq n - l + 1, i + l - 1 \leq j \leq n$

$j \leftarrow i + l - 1;$  //  $A_{i..j}$  长度为  $l, j - i + 1 = l$

$m[i, j] \leftarrow \infty;$

20

for  $k \leftarrow i$  to  $j - 1$  do { // 分裂点  $k$

$q \leftarrow m[i, k] + m[k + 1, j] + p_{i-1} p_k p_j;$

if  $q < m[i, j]$  then {

$m[i, j] \leftarrow q;$

$S[i, j] \leftarrow k;$

} // endif

} // endfor  $k$

} // endfor  $i$

} // endfor  $l$

return  $m$  &  $S;$

}

21

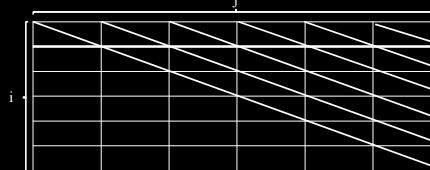
$l = 2$ : 先计算  $m[1, 2], m[2, 3], \dots, m[n-1, n]$

$l = 3$ : 先计算  $m[1, 3], m[2, 4], \dots, m[n-2, n]$

■ 例:  $A_{30 \times 35} A_{35 \times 15} A_{15 \times 5} A_{5 \times 10} A_{10 \times 20} A_{20 \times 25}$

$p = \langle 30, 35, 15, 5, 10, 20, 25 \rangle$

$\therefore i \leq j, \therefore m[i, j]$  是上三角阵



$T(n) = O(n^3)$ , 非指数。

$S(n) = \Theta(n^2)$

22

## 15.1 矩阵链乘

### ■ Step4: 构造一个最优解

$\therefore S[i, j] = k$  记录了  $A_{i..j}$  最优括号化分裂点为  $k$ ,

$\therefore$  设  $k_1 = S[1, n]$ , 则  $A_{1..n}$  的计算次序是  $A_{1..k_1} \cdot A_{k_1+1..n}$

而  $A_{1..k_1}$  的计算次序应为:  $A_{1..k_2} \cdot A_{k_2+1..k_1}, k_2 = S[1, k_1]$

$A_{k_1+1..n}$  的计算次序应为:

$$A_{k_1+1..k_3} \cdot A_{k_3+1..n}, k_3 = S[k_1 + 1, n]$$

一般地,  $A_{i..j}$  的分裂点为  $S[i, j] = k$

$$A_{i..j} \Rightarrow A_{i..k} \cdot A_{k+1..j}$$

23

$MatrixChainMultiply(A, S, i, j)\{$

// 求  $A_{i..n}$  需用参数  $1, n$

if  $j > i$  then {

$X \leftarrow MatrixChainMultiply(A, S, i, S[i, j]);$

// 求子积  $A_{i..k}$

$Y \leftarrow MatrixChainMultiply(A, S, S[i, j] + 1, j);$

// 求子积  $A_{k+1..j}$

return  $MatrixMultiply(X, Y);$

// 子积相乘, 通常乘法

} else return  $A_i;$  //  $i = j$

}

24

## Construct an Optimal Solution

```

PRINT-OPTIMAL-PARENS
PRINT-OPTIMAL-PARENS (s, i, j)
1  if i=j
2    then print "A",
3  else print "("
4      PRINT-OPTIMAL-PARENS (s, i, s[i, j])
5      PRINT-OPTIMAL-PARENS (s, s[i, j]+1, j)
6      print ")"

```

■ 由于动态规划大多数应用都是求解最优化问题，因此我们需要指出这类应用的一个一般性法则，理查德贝尔曼称其为“**最优化法则**” (Principle of optimality)

- ❖ 该法则认为最优化问题任一实例的最优解都是由其子实例最优解构成的。
- ❖ 最优化法则在大多数情况下成立，少数情况例外！

26

## 15.2 动态规划要素

■ 什么样的优化问题适合使用**动态规划**？

- ❖ 最优子结构 *分治, DP, Greedy*
- ❖ 重叠子问题 *DP is the best!*

利用重叠子问题特性可导出动态规划的变种方法：**memoization方法** (记忆，备忘录)

■ **Wiki explanation:** In computing, memoization (a.k.a, memoisation) is an optimization technique used primarily to speed up computer programs by storing the results of expensive function calls and returning the cached result when the same inputs occur again.

27

## 15.2 动态规划要素

■ Optimal Substructure

- 细节
- 重叠子问题
- 重构最优解
- Memoization

28

## Optimal Substructure

■ 若一个问题存在最优解，其内部包含的所有子问题解也必须最优，则该问题呈现了“**最优子结构**”，具有此结构特征的问题**可能会**使用动态规划。

- ❖ 例如：矩阵  $A_1 A_{i+1} \dots A_j$  的最优括号化问题蕴含着两个子问题  $A_1 \dots A_k$  和  $A_{k+1} \dots A_j$  的解也必须是最优的
- ❖ 在动态规划中，可用子问题的最优解来构造原问题的最优解

29

## Optimal Substructure

■ 如何发现最优子结构呢(Principle)?

- ❖ 说明问题的解必须进行某种选择，这种选择导致一个或多个待解的子问题
- ❖ 对一给定问题，**假定**导致最优解的选择已给定，即无须关心如何做出选择，只须假定它已给出
- ❖ 给定选择后，决定由此产生哪些子问题，如何最好地描述子问题结构(空间)
- ❖ 证明用在问题最优解内的子问题的解也必须是最优的。方法是“**cut-and-paste**”技术和反证法。假定在最优解对应的子问题的解非最优，删去它换上最优解，得到原问题的解非最优，矛盾！

30

## Optimal Substructure

- 如何描述子问题空间(子问题结构,不同的子问题个数)  
尽可能使其简单,然后再考虑有没有必要扩展.例:

$$A_{1..n} \Rightarrow A_{1..k} \cdot A_{k+1..n} \Rightarrow (A_{1..k_1} \cdot A_{k_1+1..k}) (A_{k+1..k_2} \cdot A_{k_2+1..n})$$

由此可见,最合适的子问题空间描述为:  $A_i A_{i+1} \dots A_j$

- 最优子结构有关的两方面问题
    - 用在最优解中有多少个子问题 (i.e., 每次做出选择会产生多少个子问题)
    - 用在最优解中的子问题有多少种选择
- 例如, 矩阵链乘  $A_i A_{i+1} \dots A_j$   
——两个子问题,  $j-i$  种选择

31

## Optimal Substructure

- 动态规划算法的运行时间

- 子问题总数

- 对每个子问题涉及多少种选择

例如:

矩阵链乘共要解  $\Theta(n^2)$  个子问题:  $1 \leq i \leq j \leq n$

求解每个子问题至多有  $n-1$  种选择

最终的运行时间为  $\Theta(n^3)$

- 动态规划求解方式

- 自底向上

32

## 细节

当心不要随便假定最优子结构的应用

例如有向无权图中, 求最短/长路径的问题(指简单路径)

- 最短路径含有最优子结构

设从  $u$  到  $v$  的最短路径是  $P$ , 并设中间点为  $w$ , 则

$$u \xrightarrow{P} v \Rightarrow u \xrightarrow{P_1} w \xrightarrow{P_2} v$$

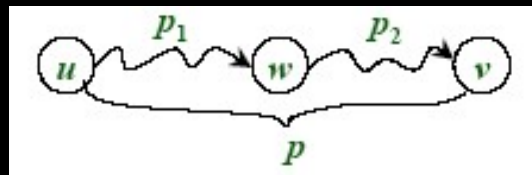
显然  $P_1$  和  $P_2$  也必须是最优(短)的。

33

## 细节

- Shortest path has optimal substructure

❖ **Proof.** If there's a shorter path from  $u$  to  $w$ , call it  $p'_1$ , then  $p'_1 p_2$  contains a shorter path than  $p_1 p_2$  from  $u$  to  $v$ , which contradicts the assumption.



34

## 细节

- 最长路径不具有最优子结构

设  $P$  是从  $u$  到  $v$  的最长路径,  $w$  是中间某点, 则

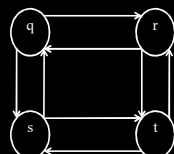
$$u \xrightarrow{P} v \Rightarrow u \xrightarrow{P_1} w \xrightarrow{P_2} v$$

但  $P_1$  不一定是从  $u$  到  $w$  的最长路径,  $P_2$  也不一定是从  $w$  到  $v$  的最长路径。 例:

考虑一条最长路径  $q \rightarrow r \rightarrow t$

但  $q$  到  $r$  的最长路径是:  $q \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow r$

$r$  到  $t$  的最长路径是:  $r \rightarrow q \rightarrow s \rightarrow t$



35

## 细节

- 为什么两问题有差别?

❖ 最长路径的子问题不是独立的。所谓独立指一个子问题的解不能影响另一个子问题的解。但第一个子问题中使用了  $s$  和  $t$ , 第二个子问题又使用了, 使得产生的路径不再是简单路径。

从另一个角度看一个子问题求解时使用的资源(顶点)不能在另一个子问题中再使用。

❖ 最短路径问题中, 两子问题没有共享资源, 可用反证法证明之。

举例: 如矩阵链乘  $A_{i..j} \Rightarrow A_{i..k} \cdot A_{k+1..j}$

显然两子链不相交, 没有资源共享, 是相互独立的两子问题

36



## 重叠子问题

当用递归算法解某问题时，重复访问(计算)同一子问题

### ■ 分治法与动态规划的比较

- ❖ 当递归每一步产生一个**新的**子问题时，适合使用分治法
- ❖ 当递归中较多出现**重叠子问题**时，适合使用动态规划，即对重叠子问题只求解一次，然后存储在表中，当需要使用时常数时间内查表。**若子问题规模是多项式阶的，动态规划特别有效。**

37

## 重叠子问题

■ 例：用自然递归算法求解 (算法见P219 算法导论)

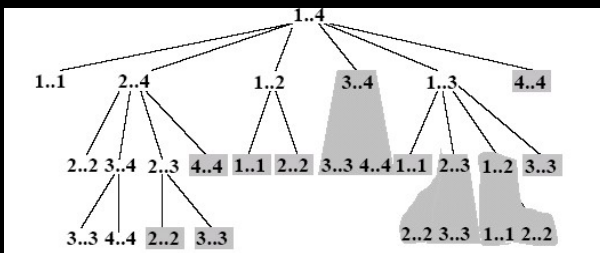
$$m[i, j] = \min_{i \leq k \leq j-1} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j\}$$

时  $A_{1..4}$  的递归树为：



38

## ■ Overlapping subproblems



## 重叠子问题

阴影部分是重叠子问题，递归算法须重复计算 (P219)。

递归式时间：

$$\begin{cases} T(1) \geq 1 \\ T(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 1) \end{cases} \Rightarrow T(n) \geq 2 \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n$$

用代入法可证为  $\Omega(2^n)$

请同学课下自行证明

■ **结论：**当自然递归算法是指数阶，但实际不同的子问题数目是多项式阶时，可用动态规划来获得高效算法

40

## 重构最优解

■ 用**附加表**保存中间选择结果能节省重构最优解的时间

41

## Memoization Version for DP

- 动态规划：分析是自顶向下，实现是自底向上
- 可采用**备忘(记忆)型版本**。它是动态规划的变种，效率和动态规划相似，但采用**自顶向下实现**，故是一个记忆型递归算法。
- 和动态规划类似，将子问题的解记录在一个表中，但填表的控制结构更像递归算法，其特点是：
  - ❖ 每个子问题的解对应一表项
  - ❖ 每个表目**初值唯一**，特殊值表示尚未填入
  - ❖ 在递归算法执行过程中第一次遇某子问题时，计算其解并填入表中，以后再遇此子问题时，将表中值简单地返回(不重复计算)，**截断递归**。
- **该方法的前提**
  - ❖ 原有可能的子问题参数集合是已知的
  - ❖ 可在表位置和子问题间建立某种关系

42

```

MemoizedMatrixChain(p){
    n ← length[p] - 1;
    for i = 1 to n do
        for j = i to n do
            m[i, j] ← ∞;
            // 表目初值, 上三角
    return LookupChain(p, 1, n);
}

```

43

```

LookupChain(p, i, j){
    if m[i, j] < ∞ then // 已计算过
        return m[i, j]; // 截断递归
    // 第一次遇到子问题 Ai..j 计算之
    if i = j then
        m[i, j] = 0;
    else
        for k ← i to j - 1 then {
            q ← LookupChain(p, i, k) +
                LookupChain(p, k + 1, j) + pi-1pkpj;
            if q < m[i, j] then m[i, j] ← q;
        }
    return m[i, j]; // 先计算, 后返回
}

```

44

### Memoized ver. of Recursive-Matrix-Chain

```

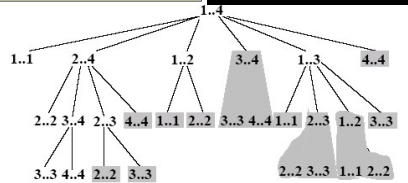
MEMOIZED-MATRIX-CHAIN(p)
1 n ← length[p] - 1
2 for i ← 1 to n
3   do for j ← i to n
4     do m[i, j] ← ∞
5 return LOOKUP-CHAIN(p, 1, n)

LOOKUP-CHAIN(p, i, j)
1 if m[i, j] < ∞
2   then return m[i, j]
3 if i = j
4   then m[i, j] ← 0
5 else for k ← i to j - 1
6   do q ← LOOKUP-CHAIN(p, i, k)
7     + LOOKUP-CHAIN(p, k + 1, j) + pi-1pkpj
8   if q < m[i, j]
9     then m[i, j] ← q
10 return m[i, j]

```

阴影子树表示查表获得而未通过递归方式计算的子问题

树的遍历方式?



### Top-Down Memoi. VS Bottom-Up DP

#### Bottom-up dynamic programming

- ❖ all subproblems must be solved
- ❖ regular pattern of table access can be exploited to reduce time or space (利用一些特定的表访问模式可以进一步降低算法的时间以及空间开销)

#### Top-down + memoization

- ❖ solve only subproblems that are definitely required
- ❖ recursion overhead

- Both methods solve the matrix-chain multiplication problem in  $O(n^3)$  and take advantage of the **overlapping-subproblems** property.

初始化 $\Theta(n^2)$ ,  $\Theta(n^2)$ 个表目每个仅计算一次, 但计算一个表目时需要 $O(n)$ 时间, 故总共 $\Theta(n^3)$

#### 小结

- 若所有子问题须至少解一次, 自底向上的动态规划时间常数因子较优(不需要递归开销, 维护表的开销较小)
- 若子问题空间有些不需要计算, 则备忘型递归具有只需计算需要的子问题的优点。
- Ex 15.3-3

47

矩阵链乘问题属于**突出阶段性的动态规划**实例, 每一个阶段都要在全面考虑各种情况下, 做出必要的决策 (e.g., 矩阵链乘在决定第一次分裂点时, 我们其实是考虑了所有j-i种可能)

下面的例子是另一类动态规划问题, 设计角度是从**递推**角度出发, 设计过程不太强调阶段性, 只需要找出大规模问题与小规模问题(子问题)之间的递推关系, 当然每一个子问题是一个比原问题简单的优化问题。

48



## Dynamic programming for LCS

### Longest Common Subsequence (LCS)

-- Given two sequences  $x[1..m]$  and  $y[1..n]$ , find a longest subsequence common to them both.

↑ not "the"

$x$ : A B C B D A B } BCBA  
 $y$ : B D C A B A } LCS( $x, y$ ) =

Functional notation, but not a function

## 15.3 最长公共子序列(LCS)

### ■ 子序列

B是A的子列，若B是A中删去某些元素(亦可不删)所得的序列。即B不一定是由A的连续元素构成的子列。

### ❖ 定义

给定序列  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$ ，序列  $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$  是X的一个子序列须满足：若X的索引中存在一个严格增的序列  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  使得对所有的  $j (1 \leq j \leq k)$ ，均有  $x_{i_j} = z_j$  成立。

50

## 15.3 最长公共子序列(LCS)

### ■ 两个序列的公共子序列(CS)

若Z是X的子列，又是Y的子列，则Z是序列X和Y的公共子序列

### ■ 最长公共子序列(LCS)

X和Y的公共子序列中长度最大者

### ■ 如何求解两个给定序列的LCS

- ❖ Step1: 刻画LCS结构特征
- ❖ Step2: 子问题的递归解
- ❖ Step3: 计算最优解
- ❖ Step4: 构造一个LCS

51

## 如何求两给定序列的LCS

### ■ Step1: 刻画LCS结构特征

#### ❖ 穷举无效

枚举X的所有子列，检查其是否亦为Y的子列，若  $|X|=m$ ，则子序列数为  $2^m - 1$

#### ❖ LCS问题有一个最优子结构特性(Th15.1 P223)

定义序列X的前  $i$  个元素构成的前缀：

$$X_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X_0 = \Phi$$

52

## 如何求两给定序列的LCS

### Th15.1(一个LCS的最优子结构)

设  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  和  $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  是序列， $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle$  是X和Y的任意一个LCS。

(1) 若  $x_m = y_n$ ,

#### Case 1

则  $z_k = x_m = y_n$  且  $Z_{k-1}$  是  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的一个LCS

(2) 若  $x_m \neq y_n$ ，且  $z_k \neq x_m$ ,

则Z是  $X_{m-1}$  和Y的一个LCS

#### Case 2

(3) 若  $x_m \neq y_n$ ，且  $z_k \neq y_n$ ,

则Z是X和  $Y_{n-1}$  的一个LCS

53

### pf(反证法):

(1) 若  $z_k \neq x_m$  (则  $z_k \neq y_n$ )，则将  $x_m$  加入Z尾，于是获得X和Y的长度为  $k+1$  的CS，与Z是X和Y的LCS矛盾！

#### 对应则

$\because z_k = x_m = y_n$

$\therefore$  前缀  $Z_{k-1}$  是  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的公共子序列(长度为  $k-1$ )

若  $Z_{k-1}$  不是  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的LCS,

则存在一个  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的公共子序列  $W$ ，其长度  $> k-1$

于是将  $z_k$  附加于  $W$ ，则产生的公共子序列长度  $> k$

这与Z是X和Y的LCS(长度为  $k$ ) 矛盾！对应且

54

(2) 若  $x_m \neq y_n$ , 且  $z_k \neq x_m$ ,

则  $Z$  是  $X_{m-1}$  和  $Y$  的一个  $LCS$

若  $z_k \neq x_m$ ,  $z_k$  必等于  $x_m$  之前的某个元素,

则  $Z$  是  $X_{m-1}$  和  $Y$  的一个  $CS$ , 现需证  $Z$  是一个  $LCS$

若  $Z$  不是  $X_{m-1}$  和  $Y$  的  $LCS$ , 则存在一长度  $>$  的子序列  $W$  它显然也是  $X$  和  $Y$  的  $CS$ , 这与  $Z$  是  $X$  和  $Y$  的  $LCS$  矛盾!

(3) 与 (2) 对称。

该定理表示:  $LCS$  问题有“最优子结构”性质: **两个序列的一个  $LCS$  包含了两个序列的前缀子序列的一个  $LCS$ 。**

蕴含的选择: 当  $x_m \neq y_n$  时, 我们事先并不知道  $Z$  的长度, 只能是在  $X_{m-1}$  和  $Y$  的  $LCS$  以及在  $X$  和  $Y_{n-1}$  的  $LCS$  中取最大者。

### Dynamic-programming hallmark(特点)#1

#### *Optimal substructure*

*An optimal solution to a problem (instance) contains optimal solutions to subproblems.*

$z = LCS(x, y)$ , then any **prefix** of  $z$  is an  $LCS$  of a **prefix** of  $x$  and a **prefix** of  $y$ .

56

### 如何求两给定序列的 $LCS$

#### Step2: 子问题的递归解

定理15.1 找  $X$  和  $Y$  的1个  $LCS$ , 可分解为1个(或2个)子问题:

(1) If  $x_m = y_n$  then 需解1个子问题: 找  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的1个  $LCS$

(2) If  $x_m \neq y_n$  then 需解2个子问题: 找  $X_{m-1}$  和  $Y$  的1个  $LCS$ , 找  $X$  和  $Y_{n-1}$  的1个  $LCS$ , 最长者为  $X$  和  $Y$  的  $LCS$

#### ❖ $LCS$ 里重叠子问题特性

找  $X$  和  $Y$  的1个  $LCS \Rightarrow$  找  $X_{m-1}$  &  $Y$  以及  $X$  &  $Y_{n-1}$  的  $LCS$ , 它们都包含子问题: 找  $X_{m-1}$  和  $Y_{n-1}$  的1个  $LCS$ , 还有许多其它共享子问题。

57

### 如何求两给定序列的 $LCS$

#### ❖ 用 $C$ 记录最优解的值

$C[i, j]$  定义为  $X_i$  和  $Y_j$  的一个  $LCS$  长度,  $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$

$$C[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0, X \text{ 和 } Y \text{ 有一个为空序列, 则 } LCS \text{ 长度为 } 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{if } i, j > 0, x_i = y_j \quad // \text{case 1} \\ \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\} & \text{if } i, j > 0, x_i \neq y_j \quad // \text{case 2} \end{cases}$$

至此, 可以给出直接递归版本的实现

为何引入第0行和第0列?

因为  $C[i, j]$  是当前行和前一元素构成, 或由当前列和前一元素构成, 故可起哨兵作用。

58

### Recursive algorithm for LCS

```

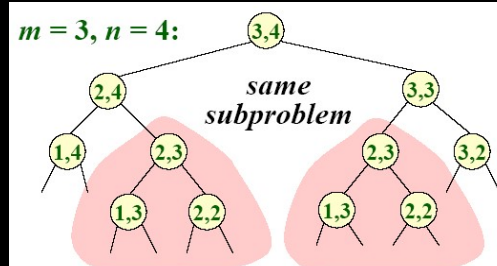
RECURSIVE for LCS
LCS(x, y, i, j)
1  if x[i] = y[j]
2    then c[i, j] ← LCS(x, y, i-1, j-1) + 1
3  else c[i, j] ← max{LCS(x, y, i-1, j),
4                    LCS(x, y, i, j-1)}

```

#### Worst-case?

$x[i] \neq y[j]$ , in which case the algorithm evaluates two subproblems, each with **only one** parameter decremented.

### Recursive Tree 平凡递归算法对应的递归树



**Height =  $m + n$**   $\rightarrow$  work potentially exponential, but we're solving subproblems already solved

## Dynamic-programming hallmark#2

**Overlapping subproblems**

*A recursive solution contains a  
“small” number of distinct  
subproblems repeated many times.*

The number of distinct LCS subproblems for two strings  $m$  and  $n$  is only  $mn$ .

## 如何求两给定序列的LCS

## ■ Step3: 计算最优解

❖ 由递归关系式易写自然递归算法(指数阶), 但子问题空间规模为 $O(mn)$ 。

❖ 输入:  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$   $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$

❖ 输出:  $C[0..m, 0..n]$ —计算次序行主序

$b[1..m, 1..n]$ —解矩阵 (空串无需表示出解)

$$b[i, j] = \begin{cases} \nwarrow & \text{if } C[i, j] \text{ 由 } C[i-1, j-1] \text{ 确定} \\ \uparrow & \text{if } C[i, j] \text{ 由 } C[i-1, j] \text{ 确定} \\ \leftarrow & \text{if } C[i, j] \text{ 由 } C[i, j-1] \text{ 确定} \end{cases}$$

❖ 故当构造解时, 从 $b[m, n]$ 出发, 上溯至 $i=0$ 或 $j=0$ 为止, 当 $b[i, j]$ 包含“ $\nwarrow$ ”时打印出 $x_i$ 即可。

```
LCS_length(X, Y) {
    m ← length[X];
    n ← length[Y];
    for i ← 1 to m do
        C[i, 0] ← 0; // 0th列
    for j ← 1 to n do
        C[0, j] ← 0; // 0th行
    for i ← 1 to m do
        // 依次考虑  $X_1, X_2, \dots, X_m$  的前缀子列
        for j ← 1 to n do
```

63

```
    if  $x_i = y_j$  then {
        C[i, j] ← C[i-1, j-1] + 1;
        b[i, j] ← “ $\nwarrow$ ”;
    } else //  $x_i \neq y_j$ 
        if C[i-1, j] ≥ C[i, j-1] then {
            C[i, j] ← C[i-1, j]; // 前一行,  $X_{i-1}$  和  $Y_j$  决定
            b[i, j] ← “ $\uparrow$ ”;
        } else {
            C[i, j] ← C[i, j-1]; // 前一列,  $X_i$  和  $Y_{j-1}$  决定
            b[i, j] ← “ $\leftarrow$ ”;
        }
    }
    return b & C;
} // 时间 $O(mn)$ , 空间 $O(mn)$ 
```

64

## 如何求两给定序列的LCS

## ■ Step4: 构造一个LCS

从 $b[m, n]$ 开始据箭头回溯至 $i=0$ 或 $j=0$ 即可。

❖ 当 $b[i, j] = “\nwarrow”$  时, 有 $x_i = y_j$ , 打印之。

❖ 用循环则打印元素为逆序, 可用递归算法使之逆置

65

```
Print_LCS(b, X, i, j) {
    if i = 0 or j = 0 then return;
    if b[i, j] = “ $\nwarrow$ ” then { // case 1
        Print_LCS(b, X, i-1, j-1);
        Print x_i; // 相当于后序遍历
    } else // case 2
        if b[i, j] = “ $\uparrow$ ” then // 前1行
            Print_LCS(b, X, i-1, j);
        else
            Print_LCS(b, X, i, j-1);
}
```

66

## 如何求两给定序列的LCS

初始调用：

$\text{Print-LCS}(b, X, \text{length}[X], \text{length}[Y])$

时间 $O(m+n)$ 。因为 $i, j$ 每递归一次至少有其一要减1，直至其中一个为0。

67

## 15.3 最长公共子序列(LCS)

### 改进代码

时空常数因子改变，但时间渐近性能不变

#### ❖ 可省略b

$\because C[i, j]$ 来自于 $C[i-1, j-1]$ ,  $C[i-1, j]$ ,  $C[i, j-1]$

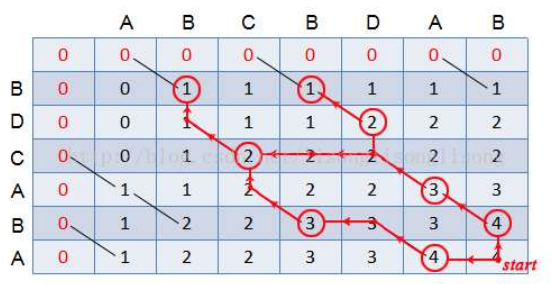
$\therefore$ 可在 $O(1)$ 判定是由谁计算产生的，故可在 $O(m+n)$ 重构LCS。

T不变，S减少

#### ❖ C只需要两行：当前行和上一行

➢ 可是这样不能构造出解，但空间由 $O(mn)$ 变为 $O(n)$

68



if  $C[i-1, j] \geq C[i, j-1]$  then {  
 $C[i, j] \leftarrow C[i-1, j]$ ; // 前一行,  $X_{i-1}$  和  $Y_j$  决定  
 $b[i, j] \leftarrow "\uparrow"$ ;

70

## 作业

### ■ Ex 15.4-3, 15.4-5

70

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

### ■ 三角剖分

### ■ 最优的三角剖分

### ■ 与矩阵链乘最优括号化问题一致

### ■ 求解最优三角剖分问题

71

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

### 1、三角剖分

#### 凸多边形的最佳三角剖分类似于矩阵链乘问题

#### ❖ 凸多边形

多边形：无交叉边

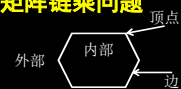
**凸多边形定义：**边界上或内部的任意两点连线上的点均在边界上或内部

#### ❖ 表示

顶点逆时针列表,  $P_n = \langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

有n条边  $\overline{v_0 v_1}, \overline{v_1 v_2}, \dots, \overline{v_{n-1} v_n}$ , 这里  $v_0 = v_n$

顶点号是顶点数模除结果



72

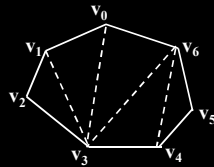
## 15.4 多边形的最佳三角剖分

❖ 弦(chord): 若 $v_i, v_j$ 是不相邻点, 则线段 $\overline{v_i v_j}$ 是一弦, 它将多边形划分为两个多边形:

$$\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle \text{ 和 } \langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_i \rangle$$

❖ 一个多边形的三角剖分

它是多边形的一个弦集 $T$ , 将多边形划分为若干个不相交的三角形

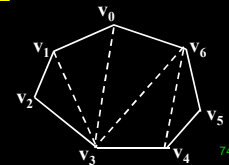


73

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

❖ 一些结论

- 在一个三角剖分中, 没有弦相交(端点除外)且弦集合 $T$ 最大: 每条不在 $T$ 中的弦和 $T$ 中的某弦相交
- 三角剖分产生的三角形的边只可能是剖分中的弦或多边形的边
- $n$ 个顶点的凸多边形的每个三角剖分有 $n-3$ 条弦, 划分所得的三角形个数为 $n-2$



74

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

## 2、最优的三角剖分

Def: 给定多边形及三角形的权值函数 $W$ , 找到权值之和最小的三角剖分。

❖ 三角形权值: 视具体问题而定, 例如:

$$W(\Delta v_i v_j v_k) = |v_i v_j| + |v_j v_k| + |v_k v_i|$$

$|v_i v_j|$  是 $v_i$  和 $v_j$  的欧氏距离

- ❖ 三角剖分的权: 各三角形权值之和
- ❖ 最优三角剖分: 权值之和最小的三角剖分

75

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

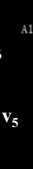
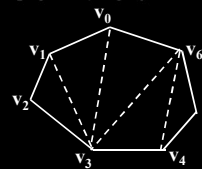
## 3、与括号化一致

通过树来解释三角剖分与表达式括号化的一致性

表达式的完全括号化  $\Leftrightarrow$  一棵丰满树(无度为1的节点)

语法分析树

$((A_1(A_2A_3))(A_4(A_5A_6))) \Leftrightarrow$

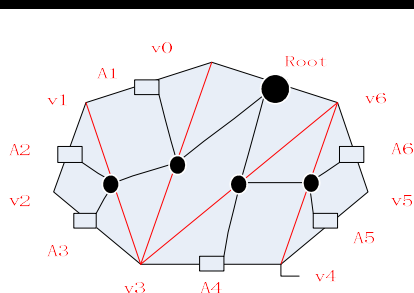


76

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

凸多边形 $P_{n+1} \Leftrightarrow$  语法分析树( $n$ 片叶子)

$\overline{v_0 v_n}$  表示根, 弦是内点, 其余边是叶子, 叶子 $\overline{v_{i-1} v_i}$  表示边



77

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

❖  $n$ 个矩阵的完全括号化 $\Leftrightarrow n$ 个叶子的parse tree  $\Leftrightarrow n+1$ 个顶点的多边形的三角剖分

- 矩阵 $A_{(p_{i-1} \times p_i)}$ 对应边 $\overline{v_{i-1} v_i}$
- 矩阵积 $A_{i+1..j}$ 对应弦 $\overline{v_i v_j} (i+1 < j)$

❖ 最优矩阵链乘可看作是最优三角剖分的特例

矩阵链乘 $\Rightarrow$  一个最优三角剖分问题

链积 $A_1 A_2 \dots A_n \Leftrightarrow (n+1)$ 顶点多边形 $P_{n+1} = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$

$A_i$ 维数 $p_{i-1} \times p_i \Leftrightarrow$  顶点 $v_{i-1} v_i$

78

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

❖ 最优矩阵链乘看作是最优三角剖分的特例(续)

定义三角剖分的权函数:  $W(\Delta v_i v_j v_k) = p_i p_j p_k$

该权函数下的  $P_{n+1}$  的最优三角剖分就给出了  $A_1 A_2 \dots A_n$  的一个最优括号化。但反之不然, 因为三角剖分问题的权函数更一般化, 但可对链乘算法稍作修改即可求最优的三角剖分。

79

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

### 4、求解最优三角剖分问题

■ 用  $v_0, v_1, \dots, v_n$  代替  $p_0, p_1, \dots, p_n$

■ 修改MatrixChainOrder为

$$q \leftarrow m[i, k] + m[k+1, j] + W(\Delta v_{i-1} v_k v_j)$$

$m[1, n]$  包含了  $P_{n+1}$  的一个最优三角剖分的权值, 为什么?

80

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

### (1) 一个最优三角剖分的子结构

设  $T$  是多边形  $P_{n+1} = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$  的一个最佳三角剖分, 它包括某个三角形  $\Delta v_0 v_k v_n$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ), 即  $T$  的权

$$W(\Delta v_0 v_k v_n) + W(\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle) + W(\langle v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle)$$

最优, 要求子多边形

$$\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \quad \text{和} \quad \langle v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$$

的三角剖分也是最优的。因为, 这两个子问题没有共享资源, 相互独立, 可用cut-and-paste证明。

81

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

### (2) 一个递归解

❖ 设  $t[i, j]$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) 是多边形  $\langle v_{i-1}, v_i, \dots, v_j \rangle$  的一个最优解的值(即最优三角剖分的权), 则多边形  $P_{n+1}$  的最优三角剖分的权为  $t[1, n]$ 。

❖  $t[i, j]$  的递归定义如下:

➢ 若  $i=j$ , 多边形退化为  $\langle v_{i-1}, v_i \rangle$ , 可定义权为 0. 即  $t[i, i] = 0, 1 \leq i \leq n$

➢ 若  $i < j$ , 则  $\langle v_{i-1}, v_i, \dots, v_j \rangle$  至少有 3 个顶点, 设最佳剖分点为  $k$  ( $i \leq k \leq j-1$ ), 则剖分结果:

$$\Delta v_{i-1} v_k v_j \quad \langle v_{i-1}, v_i, \dots, v_k \rangle \quad \langle v_k, v_{k+1}, \dots, v_j \rangle$$

82

## 15.4 多边形的最佳三角剖分

$$t[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k \leq j-1} \{t[i, k] + t[k+1, j] + W(\Delta v_{i-1} v_k v_j)\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

比较此式与矩阵链乘完全一致, 只是权函数不一样, 所以只需修改MatrixChainOrder算法中一条语句即可

时间为  $\Theta(n^3)$ , 空间为  $\Theta(n^2)$

83

## 15.5 0-1背包问题

■ 0-1背包问题

■ 算法改进

■ 一个例子

■ 算法改进

■ 一个例子

■ 算法复杂度分析

84



## 15.5 0-1背包问题

### 1、0-1背包问题

- 给定n种物品和一背包。物品i的重量是 $w_i$ ，其价值为 $v_i$ ，背包的容量为C。问应如何选择装入背包的物品，使得装入背包中物品的总价值最大？
- 0-1背包问题是一个特殊的整数规划问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq C \\ & x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

85

## 15.5 0-1背包问题

设所给0-1背包问题的子问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=i}^n v_k x_k \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=i}^n w_k x_k \leq j \\ & x_k \in \{0, 1\}, i \leq k \leq n \end{aligned}$$

的最优值为 $m(i, j)$ ，即 $m(i, j)$ 是背包容量为j，可选择物品为i, i+1, ..., n时0-1背包问题的最优值。由0-1背包问题的最优子结构性，可以建立计算 $m(i, j)$ 的递归式如下：

$$m(i, j) = \begin{cases} \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i) + v_i\} & j \geq w_i \\ m(i+1, j) & 0 \leq j < w_i \end{cases}$$

86

## 15.5 0-1背包问题

$$m(n, j) = \begin{cases} v_n & j \geq w_n \\ 0 & 0 \leq j < w_n \end{cases}$$

算法复杂度分析：

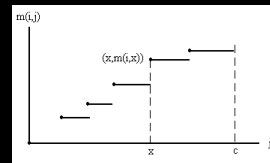
从 $m(i, j)$ 的递归式容易看出，算法需要 $O(nc)$ 计算时间。当背包容量c很大时，算法需要的计算时间较多。例如，当 $c > 2^n$ 时，算法需要 $\Omega(n2^n)$ 计算时间。

87

## 15.5 0-1背包问题

### 2、算法改进

由 $m(i, j)$ 的递归式容易证明，在一般情况下，对每一个确定的 $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )，函数 $m(i, j)$ 是关于变量j的阶梯状单调不减函数。跳跃点是这一类函数的描述特征。在一般情况下，函数 $m(i, j)$ 由其全部跳跃点唯一确定。如图所示。



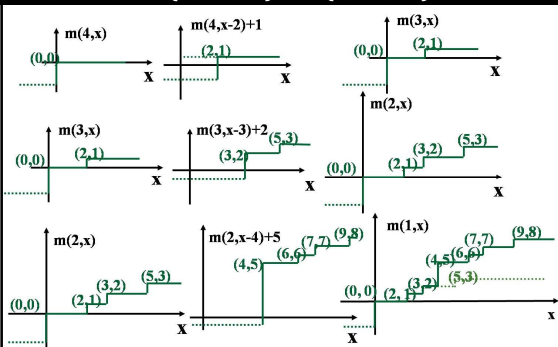
对每一个确定的 $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )，用一个表 $p[i]$ 存储函数 $m(i, j)$ 的全部跳跃点。表 $p[i]$ 可以计算 $m(i, j)$ 的递归式递归地由表 $p[i+1]$ 计算，初始时 $p[n+1] = \{(0, 0)\}$ 。

88

## 15.5 0-1背包问题

### 3、一个例子

$n=3, c=6, w=\{4, 3, 2\}, v=\{5, 2, 1\}$ 。



89

## 15.5 0-1背包问题

### 4、算法改进

■ 函数 $m(i, j)$ 是由函数 $m(i+1, j)$ 与函数 $m(i+1, j-w_i) + v_i$ 作max运算得到的。因此，函数 $m(i, j)$ 的全部跳跃点包含于函数 $m(i+1, j)$ 的跳跃点集 $p[i+1]$ 与函数 $m(i+1, j-w_i) + v_i$ 的跳跃点集 $q[i+1]$ 的并集中。易知， $(s, t) \in q[i+1]$ 当且仅当 $w_i \leq s \leq c$ 且 $(s-w_i, t-v_i) \in p[i+1]$ 。因此，容易由 $p[i+1]$ 确定跳跃点集 $q[i+1]$ 如下：  
 $q[i+1] = p[i+1] \oplus (w_i, v_i) = \{(j+w_i, m(i, j)+v_i) | (j, m(i, j)) \in p[i+1]\}$

■ 另一方面，设 $(a, b)$ 和 $(c, d)$ 是 $p[i+1] \cup q[i+1]$ 中的2个跳跃点，则当 $c \geq a$ 且 $d < b$ 时， $(c, d)$ 受控于 $(a, b)$ ，从而 $(c, d)$ 不是 $p[i]$ 中的跳跃点。除受控跳跃点外， $p[i+1] \cup q[i+1]$ 中的其它跳跃点均为 $p[i]$ 中的跳跃点。

■ 由此可见，在递归地由表 $p[i+1]$ 计算表 $p[i]$ 时，可先由 $p[i+1]$ 计算出 $q[i+1]$ ，然后合并表 $p[i+1]$ 和表 $q[i+1]$ ，并清除其中的受控跳跃点得到表 $p[i]$ 。

90

## 15.5 0-1背包问题

### 5、一个例子

$n=5$ ,  $c=10$ ,  $w=\{2, 2, 6, 5, 4\}$ ,  $v=\{6, 3, 5, 4, 6\}$ 。

初始时 $p[6]=\{(0,0)\}$ ,  $(w_5, v_5)=(4,6)$ 。因此,  $q[6]=p[6] \oplus (w_5, v_5)=\{(4,6)\}$ 。

$p[5]=\{(0,0), (4,6)\}$ 。

$q[5]=p[5] \oplus (w_4, v_4)=\{(5,4), (9,10)\}$ 。从跳跃点集 $p[5]$ 与 $q[5]$ 的并集 $p[5] \cup q[5]=\{(0,0), (4,6), (5,4), (9,10)\}$ 中看到跳跃点 $(5,4)$ 受控于跳跃点 $(4,6)$ 。将受控跳跃点 $(5,4)$ 清除后, 得到 $p[4]=\{(0,0), (4,6), (9,10)\}$

$q[4]=p[4] \oplus (6, 5)=\{(6, 5), (10, 11)\}$

$p[3]=\{(0, 0), (4, 6), (9, 10), (10, 11)\}$

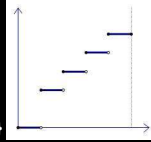
$q[3]=p[3] \oplus (2, 3)=\{(2, 3), (6, 9)\}$

$p[2]=\{(0, 0), (2, 3), (4, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11)\}$

$q[2]=p[2] \oplus (2, 6)=\{(2, 6), (4, 9), (6, 12), (8, 15)\}$

$p[1]=\{(0, 0), (2, 6), (4, 9), (6, 12), (8, 15)\}$

$p[1]$ 的最后一个跳跃点 $(8,15)$ 给出所求的最优值为 $m(1,c)=15$ 。



91

## 15.5 0-1背包问题

### 6、算法复杂度分析

■ 上述算法的主要计算量在于计算跳跃点集 $p[i]$  ( $1 \leq i \leq n$ )。由于 $q[i+1]=p[i+1] \oplus (w_i, v_i)$ , 故计算 $q[i+1]$ 需要 $O(|p[i+1]|)$ 计算时间。合并 $p[i+1]$ 和 $q[i+1]$ 并清除受控跳跃点也需要 $O(|p[i+1]|)$ 计算时间。从跳跃点集 $p[i]$ 的定义可以看出,  $p[i]$ 中的跳跃点相应于 $x_1, \dots, x_n$ 的0/1赋值。因此,  $p[i]$ 中跳跃点个数不超过 $2^{n-i+1}$ 。由此可见, 算法计算跳跃点集 $p[i]$ 所花费的计算时间为

$$O\left(\sum_{i=1}^n |p[i+1]| + 1\right) = O\left(\sum_{i=1}^n 2^{n-i+1}\right) = O(2^n)$$

■ 从而, 改进后算法的计算时间复杂度为 $O(2^n)$ 。当所给物品的重量 $w_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )是整数时,  $|p[i]| \leq c+1$ , ( $1 \leq i \leq n$ )。在这种情况下, 改进后算法的计算时间复杂度为 $O(\min\{nc, 2^n\})$ 。

92

## 15.5 最优二叉搜索树

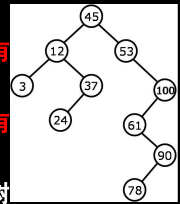
- 二叉搜索树
- 二叉搜索树的期望耗费
- 二叉搜索树的期望耗费示例
- 最优二叉搜索树

93

## 15.5 最优二叉搜索树

### 1、二叉搜索树

- (1)若它的左子树不空, 则左子树上所有节点的值均小于它的根节点的值;
- (2)若它的右子树不空, 则右子树上所有节点的值均大于它的根节点的值;
- (3)它的左、右子树也分别为二叉排序树



在随机的情况下, 二叉查找树的平均查找长度和 $\log n$ 是等数量级的

94

## 15.5 最优二叉搜索树

### 2、二叉搜索树的期望耗费

- 搜索成功与不成功的概率

$$\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=0}^n q_i = 1$$

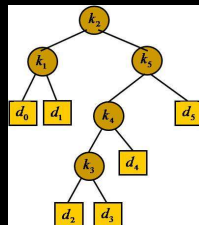
- 二叉搜索树的期望耗费

$E(\text{search cost in } T)$

$$= \sum_{i=1}^n (\text{depth}_T(k_i) + 1) \cdot p_i + \sum_{i=0}^n (\text{depth}_T(d_i) + 1) \cdot q_i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n \text{depth}_T(k_i) \cdot p_i + \sum_{i=0}^n \text{depth}_T(d_i) \cdot q_i$$

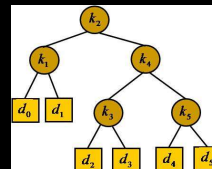
- 有 $n$ 个节点的二叉树的个数为:  $\Omega(4^n / n^{3/2})$
- 穷举搜索法的时间复杂度为指数级



95

## 15.5 最优二叉搜索树

### 3、二叉搜索树的期望耗费示例



node	depth	probability	contribution
$k_1$	1	0.15	0.30
$k_2$	0	0.10	0.10
$k_3$	2	0.05	0.15
$k_4$	1	0.10	0.20
$k_5$	2	0.20	0.60
$d_0$	2	0.05	0.15
$d_1$	2	0.10	0.30
$d_2$	3	0.05	0.20
$d_3$	3	0.05	0.20
$d_4$	3	0.05	0.20
$d_5$	3	0.10	0.40
Total			2.80

## 15.5 最优二叉搜索树

### 4、最优二叉搜索树

- 最优二叉搜索树  $T_{ij}$  的平均路长为  $p_{ij}$ ，则所求的最优值为  $p_{1,n}$ 。由最优二叉搜索树问题的最优子结构性可建立计算  $p_{ij}$  的递归式如下

$$w_{i,j} p_{i,j} = w_{i,j} + \min_{i \leq k \leq j} \{w_{i,k-1} p_{i,k-1} + w_{k+1,j} p_{k+1,j}\}$$

- 记  $w_{i,j} p_{i,j}$  为  $m(i,j)$ ，则  $m(1,n) = w_{1,n} p_{1,n} = p_{1,n}$  为所求的最优值。计算  $m(i,j)$  的递归式为

$$m(i,j) = w_{i,j} + \min_{i \leq k \leq j} \{m(i,k-1) + m(k+1,j)\}, \quad i \leq j$$

$$m(i,i-1) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

- 注意到,

$$\min_{i \leq k \leq j} \{m(i,k-1) + m(k+1,j)\} = \min_{i(l,j)-1 \leq k \leq (l+1,j)} \{m(i,k-1) + m(k+1,j)\}$$

- 可以得到  $O(n^2)$  的算法

97