**第一章 排列组合**

1. 在小于2000的数中，有多少个正整数含有数字2？

**解：**千位数为1或0，百位数为2的正整数个数为：2\*1\*10\*10；

千位数为1或0，百位数不为2，十位数为2的正整数个数为：2\*9\*1\*10；

千位数为1或0，百位数和十位数皆不为2，个位数为2的正整数个数为：2\*9\*9\*1；

故满足题意的整数个数为：2\*1\*10\*10+2\*9\*1\*10+2\*9\*9\*1＝542。

2 在所有7位01串中，同时含有“101”串和“11”串的有多少个？

**解：**

（1） 串中有6个1：1个0有5个位置可以插入：5种。

（2） 串中有5个1，除去0111110，个数为-1＝14。

（或：＝14）

（3）串中有4个1：分两种情况：①3个0单独插入，出去1010101，共-1种；②其中两个0一组，另外一个单独，则有 种。

（4）串中有3个1：串只能为\*\*1101\*\*或\*\*1011\*\*，故共4\*2种。

所以满足条件的串共48个。

4 设由1，2，3，4，5，6组成的各位数字互异的4位偶数共有n个，其和为m。求n和m。

**解：**由1，2，3，4，5，6组成的各位数字互异，且个位数字为2，4，6的偶数均有P(5,3)=60个，于是：n = 60\*3 = 180。

以a1,a2,a3,a4分别表示这180个偶数的个位、十位、百位、千位数字之和，则

m = a1+10a2+100a3+1000a4。

因为个位数字为2，4，6的偶数各有60个，故 a1 = (2+4+6)\*60=720。

因为千（百，十）位数字为1，3，5的偶数各有3\*P(4,2) = 36个，为2，4，6的偶数各有2\*P(4,2) = 24个，故

a2 = a3 = a4 = (1+3+5)\*36 + (2+4+6)\*24 = 612。

因此， m = 720 + 612\*(10 + 100 + 1000) = 680040。

5 从{1，2，…，7}中选出不同的5个数字组成的5位数中，1与2不相邻的数字有多少个？

**解：**1与2相邻：。故有1和2 但它们不相邻的方案数：

只有1或2：

没有1和2：P(5,5)

故总方案数：++ P(5,5)

6 安排5个人去3个学校参观，每个学校至少一人，共有多少种安排方案？

**解：方法一：**有两种方案：①有两个学校只要一个人去，剩下的那个去3人；②有两个学校去2人，剩下的去1人。故方案数为：（）\*P(3,3)＝150。

**方法二**：＝150。

8 有七种小球，每个小球内有1～7个星星。一次活动中，主办方随机发放礼品盒，每个盒里放两个这样的小球，那么共有多少种这样的礼品盒？

**解：**方法一、****

方法二、（7×7-7）/2+7＝28

方法三、一个球是一星球，另一个球可以是一～七星球，故有7种；

一个球是二星球，另一个球可以是二～七星球，故有6种；

…………

一个球是七星球，另一个球可以是七星球，故有1种。

因此，共7+6+…+1＝28种。

12 设S = {n1·a1, n2·a2,…,nk·ak}，其中n1 = 1，n2 + n3 +…+ nk = n，证明S的圆排列的个数等于： 

**证明：**S的全排列为：

因为要排成(n+1)圆，故圆排列数为/(n+1)= 

23 试证明：

（1）

**证明：**由二项式定理知： = (1+x) n

等式两边对x求2次导数得： = n(n-1) (1+x) n-2

令x=1，则： = n(n-1) 2 n-2

整理得：

（2）

**证明：**



得证。

30 证明：周长为2n，边长为整数的三角形的个数等于数n的3分拆数.

**证明：**设n的一个拆分n=x+y+z，则

2(x+y+z)=(x+y)+(x+z)+(y+z)＝2n

其中 (x+y)+(x+z)=2x+(y+z)>y+z

同理 (y+z)+(x+z)>(x+y)，(x+y)+(y+z)>(x+z)

因此(x+y)，(x+z)，(y+z)可以组成一个三角形，且周长为2n。

反之，设一个周长为2n的三角形，其三条边长a，b，c是整数，则

n=

设x=n-a，y=n-b，z=n-c。显然x，y，z都是正整数，而

x+y+z=n-a+n-b+n-c=3n-(a+b+c)=n

即构成n的一个拆分。

得证.

31 n个人出去野炊，其中r个人围一圈，另外n-r个人围一圈，问共有多少种不同的方案？

**解：**

32 把n个不同颜色的小球放入r个不同形状的盒子，恰好有1个空盒的放法有多少种？恰好有m（m<n）个空盒呢？

**解：**恰好有1个空盒的放法

恰好有m（m<n）个空盒：

33 一凸十边形内任意三条对角线不共点（即不相交于同一点），问这些对角线被它们的交点分成多少条线段？

**解：**该10边形的对角线条数为：，交点数为。

设第i条对角线上交点数为ni，则线段有ni+1条；即总数为：



每个交点由2条对角线相交而成，因而＝2\*210＝420

故总线段数为420+35＝455。

**第二章 容斥原理与鸽巢原理**

6 求集合{a·x, b·y, c·z}的m组合数（a,b,c全非无穷大）.

**解** 用上面的方法可以得出该集合的m组合数为：



10 求方程x1 + x2 + x3 + x4 = 18的非负整数解的个数，其中0≤x1≤5, 0≤x2≤6, 5≤x3≤9, 2≤x4≤10.

**解** 令y1= x1，y2=x2，y3=x3 -5，y4= x4-2。相当于求{5·y1 ,6·y2 ,4·y3 ,8·y4}的11组合数

11 一花店某时只有6枝红玫瑰，7枝粉玫瑰和8枝黄玫瑰。这时要从中选12枝做花篮，问有多少种选法？

**解** 相当于求S={6·a, 7·b,8·c }的12组合数的个数。

16 把20个相同的球放入5个不同的盒子，其中前2个盒子每个最多可以放6个球。问共有多少种不同的方法？

**解** 

21 证明：从1至2n的2n个自然数中任选n+1个，那么其中至少有一对数互质.

**证明** 首先证明：任何两个相邻的正整数是互质的。

用反证法：假设n与n+1有公因子q（q≥2），则有

n=qp1,n+1=qp2,p1,p2是整数。

因此qp1+1= qp2，即q (p2 – p1)=1。这与q≥2，p2 – p1是整数矛盾。

因此，任何两个相邻的正整数是互质的。

现把1,2,…,2n分成以下n组：

{1,2},{3,4},…,{2n-1,2n}，

从中任取n+1个不同的数。由鸽巢原理可知：至少有两个数取自同一组。它们是互质的。

得证。

22 证明：任意给定的52个整数中，至少存在两个数，它们的和或差可以被100整除.

**证明** 设52个整数a1,a2,…,a52被100整除的余数分别是r1,r2,…,r52。另外，可能的余数共100个：0，1，…，99，可分为51类{0}，{1,99}，{2,98}，…，{49,51}，{50}。因此ri(0<i<53)中至少有两个属于同一类，例如rj,rk。于是或者rj=rk，或者rj+rk=100。这就是说，它们的和或者差可被100整除。

**第三章 递推关系**

**解**： f(n)=f(n-1)+2

f(1)=2,f(2)=4

解得f(n)=2n.

**解**：设an-1an-2…a1是满足条件的n-1位三进制数序列，则它的个数可以用f(n-1)表示。

an可以有两种情况：

1. 不管上述序列中是否有2，因为an的位置在最左边，因此0

和1均可选；

1. 当上述序列中没有1时，2可选；

故满足条件的序列数为

f(n)=2f(n-1)+2n-1 n≥1,

f(1)=3

解得f(n)=2n-1(2+n).

3.

**解**：设h(n)表示2出现偶数次的序列的数目，g(n)表示有偶数个2奇数个3的序列的数目，由对称性它同时还可以表示奇数个2偶数个3的序列的数目。则有

h(n)=3h(n-1)+4n-1-h(n-1),h(1)=3 （1）

f(n)=h(n)-g(n),f(n)=2h(n-1)+2g(n-1) （2）

将（1）得到的h(n)=(2n+4n)/2代入（2），可得

f(n+1)= (2n+4n)/2-2f(n),

f(1)=2.

1. 求解下列递推关系
2. **解**：先求这个递推关系的通解，它的特征方程为x2-2x－2=0

解这个方程，得,.

所以，通解为.

代入初值来确定c1和c2，得，.

因此，.(3)

**解**：该递推关系的特征方程为x4+x3-3x2-5x-2=0,

解得特征根为x1=x2=x3=-1,x4=2.

所以通解为f(n)=c1(-1)n+c2n(-1)n+c3n2(-1)n+c42n.

代入初值，得.

因此，.(5)

**解**：f(1)=f(0)+1!

f(2)=2f(1)+2!=2f(0)+2\*2!=2!(f(0)+2)

f(3)=3f(2)+3!=6f(0)+3\*3!=3!(f(0)+3)

…

f(n)=n!(f(0)+n)=n!(n+1).

**12.**

**解**：设f(n)表示n位十进制正数中出现个5的数的个数，d=d1d2…dn-1表示n-1位十进制数，则若d含有偶数个5，则dn取5以外的任何一个数；若d含有奇数个5，则dn取5。另n-1位十进制的数共有9×10n-2个，故递推关系为

f(n)=9f(n-1)+ 9×10n-2-f(n-1)= 9×10n-2+8f(n-1)

f(1)=8.

求解这个方程组,得

,,.

因此,所求的递推关系为

.

**第四章 生成函数**

1 求下列数列的生成函数：

（1）{0,1,16,81,…,*n*4,…}

**解**：G{k4}=

（2）

**解**：=

（3）{1,0,2,0,3,0,4,0,……}

**解**：A(x)=1+2x2+3x4+4x6+…=.

（4）{1,*k*,*k*2,*k*3,…}

**解**：A(x)=1+kx+k2x2+k3x3+…=.

2 求下列和式：

（1）14+24+…+*n*4

**解**：由上面第一题可知，{n4}生成函数为

A(x)==，

此处ak=k4.令bn=14+24+…+*n*4，则bn=，由性质3即得数列{bn}的生成函数为 B(x)= ==.

比较等式两边xn的系数，便得

14+24+…+*n*4=bn=



（2）1·2+2·3+…+*n*(*n*+1)

**解**：{ *n*(*n*+1)}的生成函数为A(x)= =，此处ak= *n*(*n*+1).

令bn=1·2+2·3+…+*n*(*n*+1)，则bn=.由性质3即得数列{bn}的生成函数为B(x)= ===.

比较等式两边xn的系数，便得

1·2+2·3+…+*n*(*n*+1)= bn=.

4 设序列{}的生成函数为：,但,,

……,,……,求序列{}的生成函数.

**解**：由,,……,,得，所以A(x)= .由此得B(x)=(1-x)A(x)= ，亦即序列{}的生成函数。

6 有红,黄,蓝,白球各两个,绿,紫,黑球各3个,从中取出10个球,试问有多少种不同的取法？

**解**：Mr=My=Mb=Mw={0,1,2}，Mg=Mp=Mh={0,1,2,3}，所以该取法的个数为

(1+x+x2)4(1+x+x2+x3)3中x10的系数，为678.

7 口袋中有白球5个,红球3个,黑球2个,每次从中取5个,问有多少种取法？

**解**：Mw={0,1,2,3,4,5}，Mr={0,1,2,3}，Mb={0,1,2}，所以从中取5个的取法个

数为(1+x+x2)(1+x+x2+x3) (1+x+x2+x3+x4+x5)中x5的系数，为12。

8 求1,3,5,7,9这5个数字组成的n位数个数,要求其中3和7出现的次数位偶数,其它数字出现的次数无限制.

**解**：M1=M5 =M9={0,1,2,3,…}，M3 =M7={0,2,4,…}

该排列的生成函数为

=(ex+e-x)2e3x=(e5x+e3x+ex)

=

所以an=.

9 用3个1,2个2,5个3这十个数字能构成多少个偶的四位数？

**解**：因要组成偶的四位数，所以个位必为2，然后确定其它三位的排列即可.

M1={0,1,2,3}，M2 ={0,1}，M3={0,1,2,3,4,5}，故生成函数为

.

其中的系数为20，即可以组成20个偶的四位数。

12 把正整数8写成三个非负整数之和，要求n1≤3,n2≤3,n3≤6.问有多少种不同的方案？

**解**：由题意可知，M1=M2 ={0,1,2,3}，M3={0,1,2,3,…,6}，则生成函数为

(1+x+x2+x3)2(1+x+x2+x3+…+x6)

= ·=(1-2x4-x7+x8+2x11-x15) ·

符合题意的方案数为x8的系数，为=13.

18 设有砝码重为1g的3个,重为2g的4个,重为4g的2个,问能称出多少种重量？各有多少种方案？

**解**：由题意知，M1={0,1,2,3}，M2={0,1,2,3,4}，M4={0,1,2}，故生成函数为

(1+x+x2+x3)(1 +x2+x4+x6+x8)(1+x4+x8)

=1+x+2x2+2x3+3x4+3x5+4x6+4x7+5x8+5x9+5x10+5x11+4x12+4x13+3x14+3x15+2x16+2x17+x18+x19

故共能称出20种重量，指数即为重量类型，系数为方案数.

19 求方程x1+2x2+4x3=21的正整数解的个数.

**解**：由题目可以看出，x1为奇数，故生成函数为

(x+x3+x5+…)(x2+x4+x6+…)(x4+x8+x12+…)=(x7+2x9+x11)，

展开式中x21的系数为20，亦即该方程正整数解的个数。

**第五章 Pólya计数理论**

1 计算（123）（234）（5）（14）（23）,并指出它的共轭类.

**解：**题中出现了5个不同的元素：分别是：1，2，3，4，5。即|Sn|＝5。









（5）（12）（34）的置换的型为1122而Sn中属于1122型的元素个数为个其共轭类为

（5）（14）（23），（5）（13）（24），（1）（23）（45），（1）（24）（35），

（1）（25）（34），（2）（13）（45），（2）（14）（35），（2）（15）（34），

（3）（12）（45），（3）（14）（25），（3）（15）（24），（4）（12）（35），

（4）（13）（25），（4）（15）（24）

2 设*D*是*n*元集合,*G*是*D*上的置换群.对于*D*的子集*A*和*B*,如果存在,使得,则称*A*与*B*是等价的.求*G*的等价类的个数.

**解：**根据Burnside引理，其中c1(ai)表示在置换ai作用下保持不变的元素个数，则有

c1(σI)=n;

设在σ的作用下，A的元素在B中的个数为i，则

c2(σ)=n－2i；

若没有其他置换，则G诱出来的等价类个数为l=

5 对正立方体6个面用红、蓝、绿3种颜色进行着色,问有多少种不同的方案？又问3种颜色各出现2次的着色方案有多少种？

**解：**正立方体6个面的置换群G有24个元素，它们是：

* 1. 不动的置换，型为16，有一个；
  2. 绕相对两面中心轴旋转90°，270°的置换，型为1241，有6个；旋转180°的置换，型为1222，有3个；
  3. 绕相对两顶点连线旋转120°，240°的置换，型为32，有8个；
  4. 绕相对两边中点连线旋转180°的置换，型为23，有6个。

所以，该置换群的轮换指标为

PG（x1,x2,…,x6）=

等价类的个数为

*l*=PG(3,3,…,3)= =57

下面计算全部着色模式。这里，R={c1,c2,c3}，w(c1)=r，w(c2)=b，w(c3)=g，于是

F的全部模式表



其中，红色、蓝色、绿色各出现2次的方案数就是上述展开式中r2b2g2项的系数，即



6 有一个3×3的正方形棋盘,若用红蓝两色对这9个方格进行着色,要求两个位红色,其余为蓝色,问有多少种方案？

**解：** 其置换群为：

不动置换：型为 19，1个

沿中间格子及其对角线方向做旋转的置换：型为1323，4个

旋转90°和240°时的置换：型为1142 ， 2个

旋转180°时的置换 型为1124， 1个

P(x)=

我们设定x为红色，1为蓝色，即转化为求x2的系数

* 1. 对应于19，（1＋x）9中x2项系数为C(9,2)=36；
  2. 对应于1323，4(1＋x)3(1+x2)3中x2项系数为：

4[C(3,2)C(3,0)+C(3,0)C(3,1)]=24；

* 1. 对应于1142 2(1+x)(1+x4)2中x2项系数为0；
  2. 对应于1124 (1+x)(1+x2)4中x2项系数为C(4,1)=4；

故x2的系数为 

7 对正六角形的6个顶点用5种颜色进行着色.试问有多少种不同的方案,旋转使之重合作为相同处理.

**解：**对该正六角形的6的顶点的置换群有12个，它们分别是：

* + 1. 不动点置换，型为16，有1个；
    2. 旋转60°和300°的置换，型为61，有2个；旋转120°和240°的置换， 型为32，有2个； 旋转180°的置换型为23有1个；
    3. 绕对角连线旋转180°的置换 ，型为1222，有3个；
    4. 绕对边中点连线旋转180°的置换，型为23，有3个。

所以，该置换群的轮换指标为

PG（x1,x2,…,x6）=

下面计算全部着色模式。这里，R={c1,c2,c3,c4,c5}，不妨设w(c1)=r，w(c2)=b，w(c3)=g，w(c4)=p，w(c3)=y，于是

F的全部模式表



其中，用这5种颜色着色的方案数就是上述展开式中r2bgpy, rb2gpy, rbg2py,rbgp2y, rbgpy2项的系数之和，即

