1.证明：对任意集合A，B，C，有：

证明：

得证

得证

2.证明：

证明：

设A={1}，B={1,2,3}，C={4,5,6}，则={1,2,3,4,5,6}，={1,2,3,4,5,6}，

又因为={1,2,3}，={1,4,5,6}，所以={2,3,4,5,6}，所以不一定成立。

3.证明：若,则。

证明：

。从而。

同理可证：

。从而。

故。

4.证明：若且,则.

证明：

1) 若,则。所以则，而，所以。所以。

2) 若,,则对任意，因，令。所以。

故，所以 。

同理可证：

所以

P106

5. 设R是集合X上的一个自反关系。求证：R是对称和传递的，当且仅当和在R之中则在R之中。

证明：

必要性：

设R是集合X上的自反关系，且是对称和传递的，

,因为R是对称的，所以,又因为R是传递的，所以。

充分性：

设R是集合x上的自反关系，且若必有，,R是自反的,所以,所以，R是对称的；

，R是对称的，所以，有，

R是传递的。

6.若S为集合X上的二元关系。求证：

a)S是传递的，当且仅当

b)S是自反的，当且仅当

c)S是反对称的，当且仅当

证明：

a)

设S是传递的，，必存在某个，使得，且，

又因为S是传递的，所以。即。

反之，设，对任意的，有，所以，所以S是传递的。

b)

设S是自反的，对任意，由S是自反的，可得，所以。

反之，令，对任意的， .所以，S是自反的。

c)

设S是反对称的，对任意的，则S，因为S是反对称的，故，所以即。

反之，若，设S，则有，即

,即.故，S是反对称的。

7设R,S,T为集合X上的关系，证明.

证明：

所以。

P112

8.设和是A上的关系且,求证：

证明：

a)

因为，故,即。

b)

因为,所以，由的定义，是包含的最小对称关系，所以。

c)

因为传递，所以，因为是包含的最小传递关系，所以。

9.设和是A上的关系。求证：

解：

a)

b)

c)

因为，所以

所以，

同理可得。

所以。

P114

10.设是集合A的划分，若,试证明：

是集合的划分.

证明：

因为是集合A的划分，所以

所以

当时，

当时，

所以是集合的划分.

P115

11.设正整数的序偶集合A，在A上定义的二元关系如下：

当且仅当.求证：R是一个等价关系。

证明：

1.,所以.R是自反的

2.,若,则有,即.

所以，R是对称的

3.,若且,则有.所以,即,所以.R是传递的。

综上所述，R是一个等价关系。

P115

12.设R是集合A上的对称和传递关系，求证：若对于A中的每一个元素a，在A中同时也存在一个b，使得在R中，则R是一个等价关系。

证明：

,必定存在一个,使得,因为R是对称的，所以,又由于R是传递的，所以,所以R是自反的，所以R是A上的等价关系。

P117

13. 设表示I上的模j等价关系， 表示I上的模k等价关系，

证明: 细分 ,当且仅当k是j的整数倍。

证明：

必要性。

细分，则。由题意，

令,则又，所以

所以，及k是j的整数倍。

充分性。

k是j的整数倍。 设。

由题意，

对于

所以

所以

P117

14.设R是X上的二元关系，试证明是X上的相容关系。

证明：

,所以.所以S是自反的。

若,则或.

若,则.所以

若,则.所以

S是对称的。

综上，是X上的相容关系。

P120

15.设R是A上的二元关系，如果R是传递的和反自反的，称R是拟序关系。

求证：

a)

若R是A上的拟序关系，则是偏序关系。

b) 若R是一偏序关系，则是一拟序关系。

1.所以r(R)在A上是自反的。

2.,若,则

当时,

当时,,若,则由R的传递性可以得到,

与R是反自反的相矛盾,所以,所以,r(R)是反对称的。

3.,若,则有.

①.此时,则

②.此时,所以,又,所以

③.此时.所以,又,所以

④,因为R是传递的,所以

综上，r(R)是传递的

综上，r(R)是在A上的偏序关系。

b)

1.,所以是反自反的。

2.,若,则.所以,又R是传递的,所以,即,所以是传递的。

综上，是拟序关系。