第五章习题

P160

5.1设是一个代数系统，\*是上的一个二元运算，使得对于中的任意元素都有

证明：0是幺元且是独异点。

证明：

任给，所以，

即0是幺元；

任给，因为在实数集上，“”和“”是封闭的，所以，在R上封闭；

任给，

所以=，

即在R上是可结合的，所以是独异点。

综上，0是幺元且是独异点。

P161

5.2设是一个半群，而且对于中的元素，如果必有，试证明：

1）对于中的元素，有。

2）对于中的元素，有。

3）对于中的元素和，有。

证明：

1）因为是一个半群，所以满足结合律，,所以。

2）由（1）知，所以，所以。

3），所以。

P161

5.3如果是半群，且\*是可交换的，称为可交换半群。证明：如果中有元素

，使得，则。

证明：

因为是半群，且\*是可交换的，所以\*运算在S上满足结合律和交换律，所以.

P162

5.4设是群，对于任一，令，试证明

是的子群。

证明：

由题意可知：，运算在H中满足结合律。

对于任意，任意的，，所以，关于封闭。因为，所以。

对于任意的，由于，所以=，所以，即。

综上可知，是的子群。

P162

5.5设和都是群的子群，令

证明：是群的子群的充要条件是

5.5设和都是群的子群，令

证明：是群的子群的充要条件是

证明：

必要性：对于任意的，因为 是群，所以，即，所以；

对于任意的，令=，则,所以，故HK=KH。

充分性：对于任意的，，；又因为，所以必有,所以

综上可知，是群的子群。

P163

5.6设是群，且。证明：在中至少存在一个元素，

使得。其中是幺元。

证明：

因为是群，所以对于任意，均有，使得。因为互为逆元的两个不相等的元素是成对出现的，群中有唯一的幺元e,以它自身为逆元，，所以至少存在一个元素以自身为逆元，即必存在，，使得。

P163

5.7设是一个独异点，并且对于中的每一个元素都有，其中是幺元，

证明是一个阿贝尔群。

证明：

对于任意，。

对于任意，。即运算是可交换的。

所以是一个阿贝尔群。

P164

5.8设是一个群，证明：对任意都有和

，则是一个阿贝尔群。

证明：

对于任意元素，

因为，所以，即。

同理：可得，

由可得，

所以,

，

所以故得。

所以是一个阿贝尔群.

P165

5.9 证明：循环群的任意子群必定是循环群。

证明：

设是一个循环群，其生成元为a, 设是的子群。

若S={e}或S=G时，显然S是循环群。

当S且SG时，存在最小正整数m,使得，对于任意的，必有，，t>0,故。因为m是的最小正整数，所以只能有，即得，所以S中的任意元素都是的乘幂，因此是以为生成元的循环群。

P168

5.10 设，二元运算是映射的复合。

1）证明是一个群。

2) 若分别是中和的所有映射构成的集合，

证明和都是子群。

3）写出在中所有的左陪集。

证明:

1）

①对于任意的，设，，

，

因为，，且，

所以满足封闭性。

②对于任意的，有，

所以满足结合性。

③设，对于任意，设，则，所以，

所以是幺元。

④对于任意，设，于是存在，使得，，

所以，逆元存在。

综上可知，是一个群。

2）

①对于任意的，设，，有，

，即。

因此，是的子群。

②对于任意的，设，

于是，，

所以，因此也是的子群。

3）

①的左陪集应为：，对于任意，设，那么

所以，在中的所有左陪集为：。

②的左陪集应为：，对于任意，设，那么

所以，在中的所有左陪集为：。

P170

5.11设是群的子群，如果

证明是群的一个子群

证明：

显然，对于任意，有，。

由可得，

所以，即，

因此是群的一个子群。

P170

5.12 设和是在中的两个左陪集，证明：要么，要么。

证明：

对于和，具体有两种情况：

①

②若，则必存在和，使得，即，

对于任意，有，

故有

同理可证。

所以。

P171

5.13设是一个群，而，如果是从到的映射，使得对于每一个，

都有，试证明是一个从到上的自同构。

证明：

1）对于任意，若，则，即是入射。

2）对于任意，由封闭性得。令，

因为是群，所以有，所以对于任意都能找到一个，使得，

即是上的满射

所以是上的双射。

3）对于任意，有

所以，是从到的一个自同构。

P173

5.14 设和都是群到群的同态，证明是

的一个子群，其中，。

证明：

显然，对于任意，有，。

因为是同态映射，所以有，。

又因为，所以，即。

由此可得，

即，

因此，是的一个子群。

P174

5.15设为从群到群的同态映射，则为入射当且仅当。其中，是中的幺元。

证明：

1）必要性：

设是入射。因为，所以。

设存在，，使得，则与是入射相矛盾，

所以。

2）充分性：

设，对于任意，若，

因为是同态映射，则有，

即，则，

因此是入射。

P174

5.16 试证是有幺元的交换环，其中，运算分别定义为：对任意的。

证明：

（1）

先证明为阿贝尔群：

①对于任意，，满足封闭性；

②，满足交换性；

③对于任意，

所以，满足结合性；

④对于任意，存在，使得

所以1是中关于的幺元；

⑤对于任意，存在，使得，

所以，是的逆元；

综上所述，为阿贝尔群。

（2）

证明是半群：

①对于任意，，满足封闭性；

②对于任意，

所以，满足结合性；

所以是半群。

（3）

因为，满足交换性，

，，

所以0是关于运算的幺元，

因此是含幺元可交换半群。

（4）

对于任意，

即有

同理可得，

即运算关于运算是可分配的

因此是有幺元的交换环。

P176

5.17 设是一个环，证明：如果，

则，其中，

证明：

a+ba+ab+bb

P178

5.18设是一个代数系统，且对于任意的设，有

证明：二元运算对于是可分配的

证明：

对于任意，，

，

即证二元运算对于是可分配的。