第四章习题

P132

4.1 假设和是函数，证明：也是函数。

设

则

若，因f是函数，所以存在，使得

所以是一个函数。

P132

4.2 试证明



1)对任意,存在,使得f(x)=y,即当时，有y=f(x),故，即，所以。

反之，对任意，则，则存在使y=f(x)，即，使f(x)=y，故，所以。

综上可知，

2)对任意，存在，使得f(x)=y，即时有y=f(x)，故，即，所以

P132

4.3 假设并定义一个函数，对于，有

证明：如果是到的满射函数，则是入射的；其逆成立吗？

如果f是A到B的满映射，对每个b，至少存在一个，使得f(x)=b,故G的定义域为B。

对任意且,

因为，所以，因为f是函数，所以，故。

所以g是入射。

其逆不真。例如，，则

g是入射，但f不是满射。

P134

4.4 设是复合函数，证明：

1）如果是满射的，那么是满射的。

2）如果是入射的，那么是入射的。

3）如果是双射的，那么是满射的而是入射的。

设，则是X到Z的复合函数，且，

1)因为是满射，故对任意，必有，使得，即，所以存在使得y=g(x)，且f(y)=z，因此，由满射定义可得f是满射的。

2)因为是入射的，故对任意，若，则,即，因f是函数，所以，由入射定义可知，g是入射。

3)因为是双射的，故是满射和入射的，由1)2)可知，f是满射的，g是入射的。

P138

4.5 若和，且，证明



因为所以均存在双射，设，作，现证h是双射。

对任意，必有或，但，故有或中仅有一个式子成立。若，则因为f为双摄，必有唯一，使，若，则因g为双射，必有唯一，使g(x)=y。由，故。所以再h中，对任意，仅有唯一的，且时，，因此h是入射的。

对任意，则或，因，故或且仅有一式成立。若，因f是满射的，故必有，使得，若，因g是满射，故必有，使，由，故对任一，必有唯一，使。故h是满射的。综上可知，h是双射，故。

P139

4.6 若和，证明

A~C和B~D，因为均存在双射并令。

对任意，因，f和g是双射，故均存在唯一的，使得c=f(a),d=g(b),所以存在唯一的,使得，所以h为函数。若,，且，又因f和g是双射，则，所以h是入射的。

对任意，则,由于f和g是双射，则存在,使,，即存在，使得，因此h使满射。

综上可知：h使双射，成立。

P139

4.7 如果是不可数无穷集，是的可数子集，则

A是不可数无穷集，B是可数子集，则A-B为无穷集。若A-B为有限集，且B是可数子集，则A为可数子集，与题设矛盾，因此A-B为无限集，A-B必含有可数子集D，设M=A-B-D，则,因为B,D为可数集，所以，，因此有，即。

P139

4.8如果是任意无限集，是一个可数集，则

1.若A是可数无限集，则是可数集，故。

2.若A是不可数无线集，因为，所以是可数集，但为不可数无线集，由上题可知，又因，所以。

P140

4.9 证明 是等势的。

1.入射为，即,

入射为g(x)=x，即,

由cantor-Schroder-Bernstein定理知：

2.作入射为，

作入射为，故

3.作入射为f(x)=x

作入射为，故

4.作入射为f(x)=x

作入射为，故

综上可得：

P141

4.10 证明：若从到存在一个满射，则

设：为满射函数，构造函数。

则g为的入射，即