

**Estudante: Diógenes Wallis de França Silva**

**Primeira Lista de Exercícios - Capítulos 4, 5, 6**

**Responda os quesitos completamente e em detalhes.**

**1. Restauração e Filtros**

**a. Defina e explique como aplicar o operador Laplaciano com uma máscara 3x3 de quatro vizinhanças, em especial como tratar a borda da imagem. Para que serve este operador?**

**R.:**

O operador laplaciano é um operador linear, que do ponto de vista discreto, pode ser escrito como:

$$\nabla^2 f = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

A equação acima pode ser implementada utilizando-se uma máscara 3x3 de quatro vizinhanças:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

A máscara acima gera um resultado invariante a rotações de 90°. O processo de filtragem é o mesmo procedimento para filtros lineares de borrimento, sendo a única diferença os termos na máscara.

O operador laplaciano serve para aguçar as imagens. Por ser um operador diferencial, realça as descontinuidades de intensidade, ou seja, as bordas presentes na imagem, além de atenuar as regiões de variação mais suave.

[1]

**b. Qual é a diferença entre realce de imagem e restauração de imagem?**

**R.:**

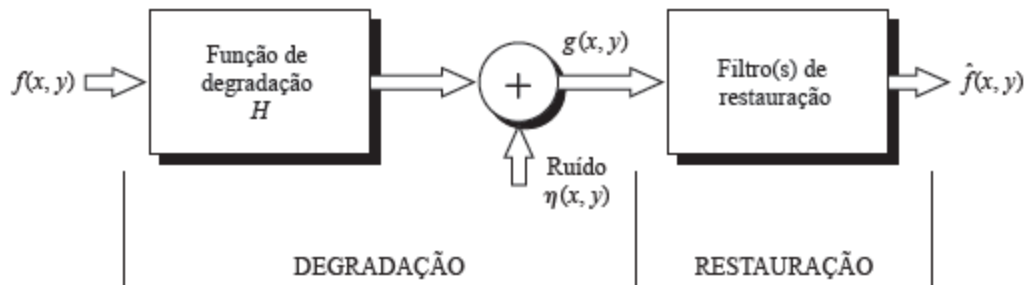
Tanto o realce quanto a restauração de imagem visam melhorar a imagem em algum determinado aspecto. O realce é predominantemente subjetivo, enquanto a restauração tem um cunho mais objetivo. O processo de restauração se dá baseado no entendimento da degradação da imagem, em que faz-se um processo inverso para recuperar a imagem original ou uma versão mais próxima possível da realidade. Diferentemente, o processo de realce consiste em utilizar regras heurísticas baseadas na interpretação visual para obter melhorias na imagem. O ajuste de contraste, por exemplo, é um caso de realce, uma vez que o valor necessário de contraste é definido pelo entendimento visual do sujeito, de acordo com o que este considera como agradável, sendo assim uma operação subjetiva. Já a restauração é aplicada no caso de a imagem estar borrada, por exemplo. Neste caso o processo de degradação é conhecido, fazendo necessário aplicar uma técnica que reverta esse processo, configurando um método objetivo.

[1]

**c. Descreva o modelo de degradação/restauração de imagem.**

**R.:**

Conforme pode ser visto na imagem abaixo, a degradação é considerada como uma função  $H$  que adicionada de um ruído, gera a imagem degradada  $g(x,y)$ . De posse de  $g(x,y)$  e também de informações a respeito do  $H$  e do ruído, elabora-se um filtro de restauração cujo objetivo é receber  $g(x,y)$  e gerar uma estimativa  $\hat{f}(x,y)$  que seja o mais próximo possível de  $f(x,y)$ . Geralmente quanto mais informações se tem a respeito de  $H$  e do ruído, mais próxima a estimativa obtida é da imagem original. O processo de restauração pode ser encarado principalmente como filtros de restauração, sendo cada filtro escolhido com base no que se sabe da degradação da imagem.



[1]

**d. Defina e explique os operadores de Sobel.**

**R.:**

O operador de Sobel, também chamado de filtro de Sobel, é utilizado em processamento de imagem para detecção de contornos. O processo de detecção de contornos é baseado no gradiente da imagem.

O filtro de Sobel é constituído por um par de kernels convolucionais de tamanho 3x3, conforme a figura a seguir:

-1	0	+1
-2	0	+2
-1	0	+1

**Gx**

+1	+2	+1
0	0	0
-1	-2	-1

**Gy**

Note que a diferença de um kernel para o outro é uma rotação de 90°. Os kernels são projetados para detectar os contornos verticais e horizontais em relação a imagem. Estes kernels também podem ser aplicados separadamente, detectando assim apenas os contornos em uma direção, seja ela vertical ou horizontal. Eles também podem ser utilizados para calcular o gradiente, tanto a magnitude quanto a direção, em um dado pixel da imagem. Sendo o módulo calculado como:

$$|G| = \sqrt{Gx^2 + Gy^2}$$

[1,2,3]

**e. Descreva e explique o funcionamento de um filtro (espacial ou de frequência) de: borramento, aguçamento e detecção de borda.**

**R.:**

No domínio da frequência, pode-se dizer que um filtro de borramento seria um filtro passa-baixa, uma vez que as componentes de alta frequência que contém as regiões de maior variação (bordas, por exemplo) seriam atenuadas e as regiões de menor variação são mantidas.

Sobre o filtro de aguçamento, um filtro passa-alta é capaz de realizar esta tarefa, uma vez que mantém as componentes de altas frequências (que contém as regiões da imagem com maior variação, como contornos, por exemplo) e atenua as baixas frequências que são variações mais suaves.

Para a detecção de borda, o filtro espacial utilizando derivadas de primeira ordem é uma opção. Seja uma função  $f(x,y)$  representando uma imagem, o gradiente pode ser definido através de  $g_x$  e  $g_y$ , que são as derivadas de  $f(x,y)$  em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Tanto  $g_x$  quanto  $g_y$  podem ser aproximados utilizando máscaras 3x3. Sendo assim, utilizando máscaras 3x3, conforme a figura 3.41 do livro, obtém-se os contornos da imagem.

[1]

## **2. Transformada de Fourier**

**a. Defina e explique o que é a transformada de Fourier, descreva em detalhes como ela pode ser utilizada em processamento de imagens, exemplificando algumas aplicações.**

**R.:**

A transformada de Fourier é uma ferramenta que transforma um sinal em uma representação construída por senos e cossenos. Também pode ser vista como uma forma de transformar uma função no tempo em uma função na frequência. A transformada de Fourier é relevante no contexto de processamento de imagem, uma vez que decompõe a imagem em seus senos e cossenos. A imagem no domínio espacial é então convertida no domínio de Fourier, cada ponto no domínio de Fourier representa uma frequência presente na imagem.

Do ponto de vista formal a transformada de Fourier de uma função contínua é dada por:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

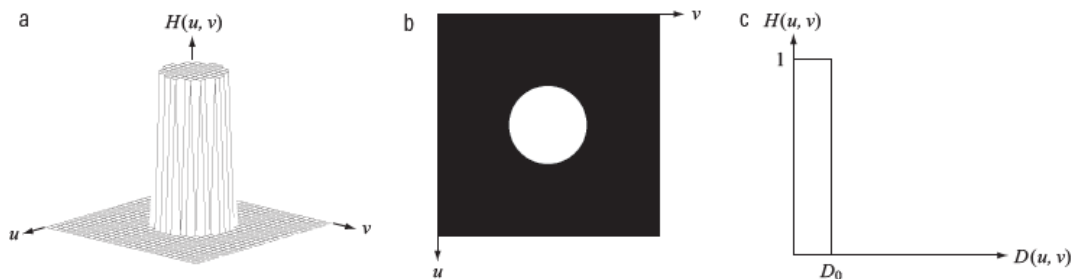
À esquerda da equação está o operador de Fourier, cuja entrada é  $f(t)$ , à direita está a expressão da transformada. No nosso contexto é usada a transformada em duas dimensões:

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

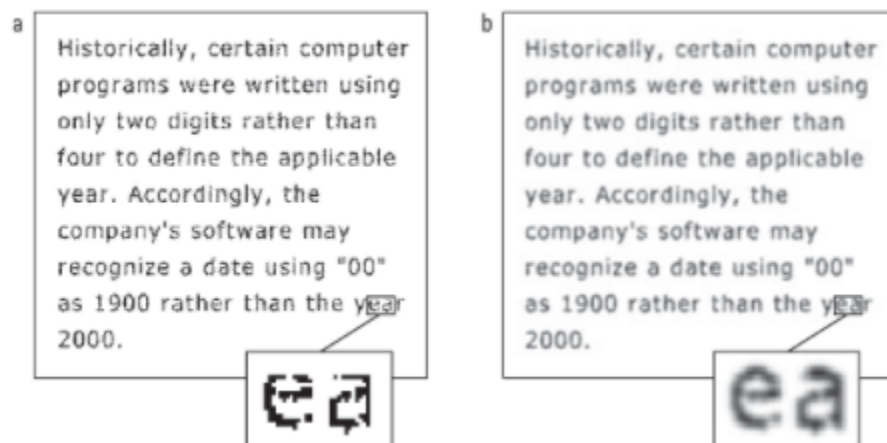
As variáveis que definem  $F$  são as variáveis de frequência. No contexto prático são utilizadas transformadas discretas, mas foge ao escopo desta resposta.

Agora são comentadas algumas aplicações, começando por suavização de imagens utilizando filtros no domínio da frequência:

Quando se fala no conteúdo espectral de uma imagem, as componentes de alta frequência se dão devido às variações abruptas como bordas e contornos. Consequentemente, para obter uma imagem suavizada, faz-se necessário atenuar ou eliminar esses componentes de alta frequência, uma forma de fazer isso é utilizando filtros passa-baixa. Esses filtros vão permitir que as frequências mais baixas sejam preservadas e as mais altas eliminadas. Existem vários tipos de filtros: ideal, Gaussiana, Butterworth. Na figura abaixo está o exemplo de um filtro ideal:

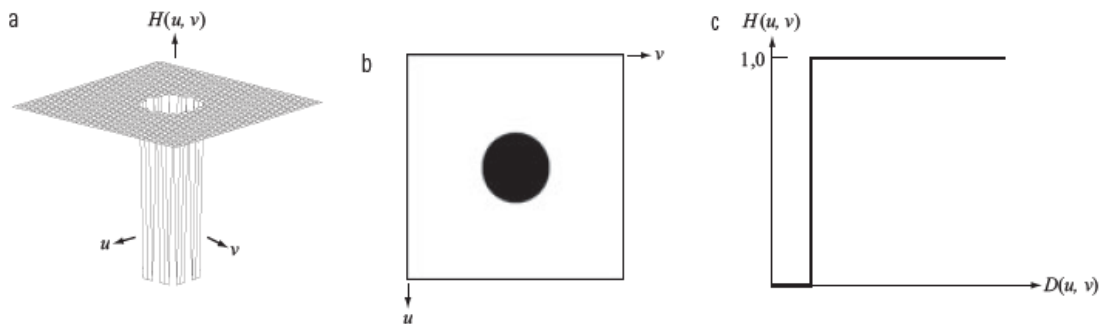


Um exemplo da aplicação da suavização de imagens é na restauração de caracteres em baixa resolução, conforme a imagem que segue:

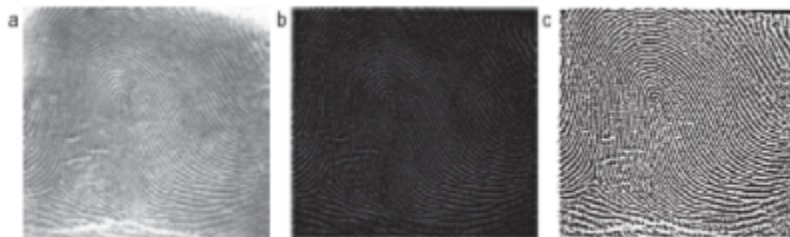


Agora será discutido o aguçamento de imagens utilizando filtros no domínio da frequência:

Diferentemente do caso anterior, no processo de aguçamento deseja-se manter as bordas e contornos, conseqüentemente utiliza-se um filtro passa-alta, uma vez que o conteúdo de alta frequência deve ser mantido para aguçar as imagens. Aqui está um exemplo de um filtro ideal passa-alta:



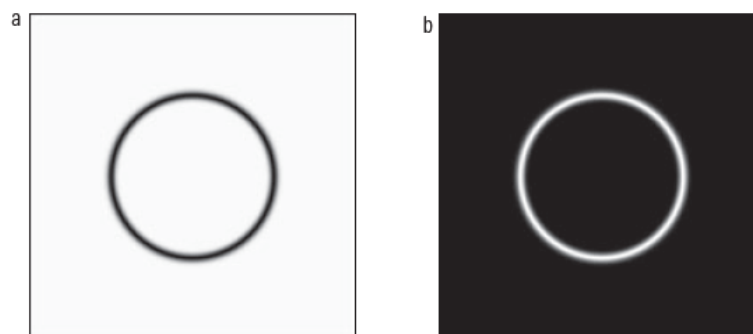
Segue um exemplo de aplicação para o aguçamento dos detalhes da imagem contendo a digital de uma pessoa:



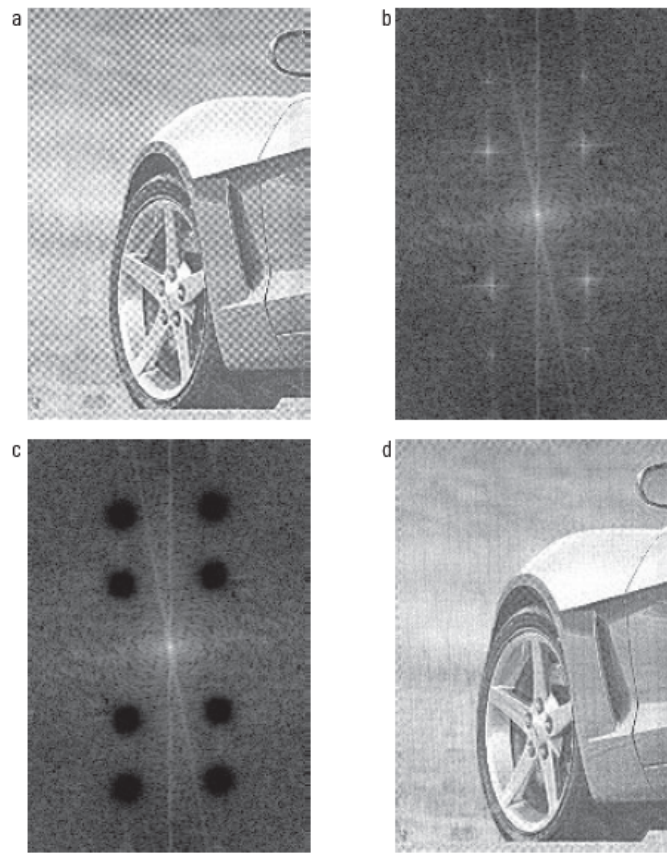
A parte b é o resultado da aplicação do filtro passa-alta e c é o resultado da limiarização.

Por último, a filtragem seletiva:

Diferentemente dos dois últimos filtros, existem processos de filtragem que querem atuar em bandas de frequências específicas, como exemplo tem-se os filtros passa e rejeita-faixa e os filtros notch. A imagem abaixo ilustra filtros rejeita e passa-faixa, respectivamente:



Como exemplo tem-se a imagem a seguir:



Note que a utilização de um filtro rejeita-notch (imagem c) possibilitou remover o padrão moiré da imagem a.

[1,6,7,8]

**b. Demonstre que a transformada de Fourier e seu inverso são um processo linear.**

**R.:**

Para ser um processo linear, faz-se necessário que as propriedades de aditividade ( $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ) e homogeneidade ( $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ) sejam satisfeitas.

→ transformada de Fourier

$$F_T [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$\omega = 2\pi f$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$


---

→ transformada inversa de Fourier

$$F_T^{-1} [a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)] e^{j\omega t} df$$

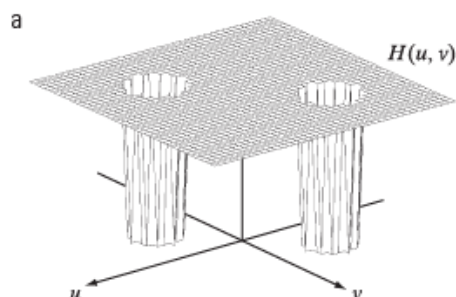
$$= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) e^{j\omega t} df + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j\omega t} df = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

[1,4,5]

c. Como a transformada de Fourier pode ser usada para remoção de ruído periódico?

R.:

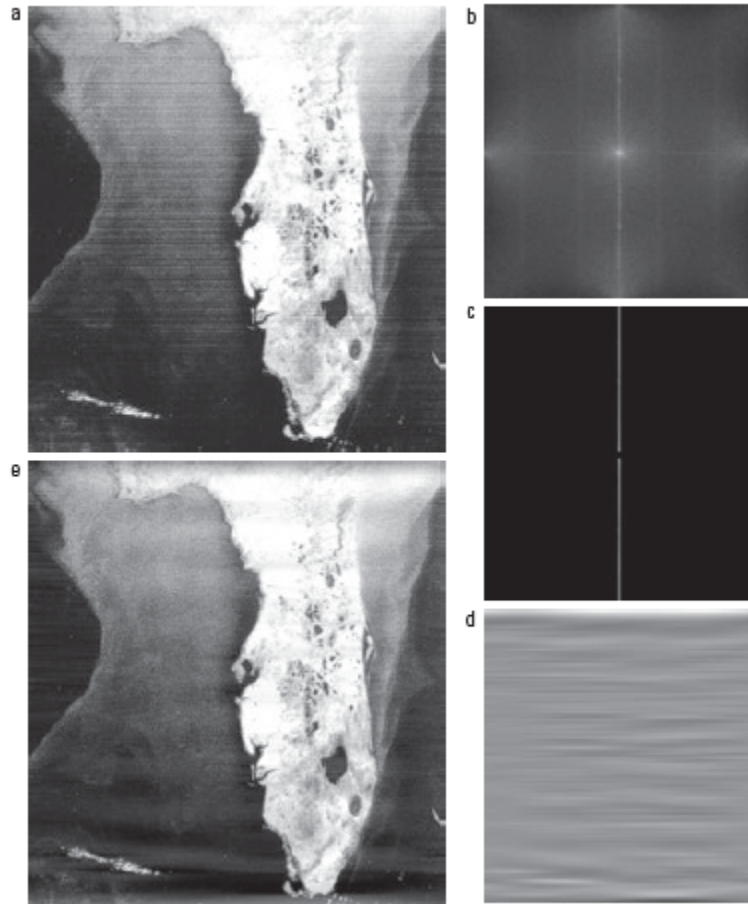
Para lidar com ruído periódico, faz-se uso do filtro *notch*. O filtro *notch* atua (passa ou rejeita) em frequências vizinhas a uma frequência central. A imagem abaixo ilustra um filtro *notch* rejeita ideal:





Também deve ser mencionado que a simetria da transformada de Fourier faz com que os filtros notch apareçam em pares simétricos em relação à origem, exceto se o filtro está localizado na origem.

A imagem abaixo contém um ruído periódico e faz-se uso de um filtro notch para remover este ruído. A filtragem notch reduz o ruído significativamente sem acrescentar o borramento proveniente de outros métodos.



O processo de filtragem reduz o efeito das linhas de varredura horizontal. O filtro passa-notch em c é usado para isolar o ruído e em seguida um filtro rejeita-notch gera a imagem filtrada em e.

[1]

**d. Explique o que é um processo de convolução e como a convolução espacial se relaciona com a convolução no domínio da frequência.**

**R.:**

No capítulo 3 a convolução entre duas funções foi tratada como a rotação de uma função em 180° em relação a origem e seu deslocamento pela outra função, em que os cálculos vão sendo realizados ao longo desse deslocamento. No caso de duas funções contínuas a convolução é definida da seguinte forma:

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

O sinal de - é a rotação de 180° e t é o deslocamento entre as funções.

Um ponto importante acerca da convolução é o teorema da convolução:

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

As setas indicam que a transformada de Fourier da convolução entre f(t) e h(t) é o produto das transformadas de cada uma, respectivamente. Note também que a transformada inversa do produto vai gerar a convolução das funções no domínio do tempo.

Em duas dimensões e do ponto de vista discreto, a convolução pode ser escrita como:

$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

O teorema da convolução no contexto 2D:

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

E inversamente:

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$

Novamente as setas indicam o lado direito como a transformada de Fourier do lado esquerdo e o lado esquerdo como a transformada inversa de Fourier do lado direito.

O teorema da convolução em 2D (ou 1D) mostra que a convolução no domínio da frequência é análogo ao produto no domínio do espaço, em que se relacionam através da transformada e da inversa da transformada de Fourier.

[1]

**e. Suponha um filtro espacial passa-baixa que tira a média dos quatro vizinhos do ponto (x,y) mas exclui o próprio ponto. Encontre o filtro equivalente H(u,v) no domínio de frequência.**

**R.:**

Seja um filtro passa-baixa que tira a média dos quatro vizinhos e exclui o próprio ponto:

$$g(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+1, y) + f(x, y+1) + f(x-1, y) + f(x, y-1)]$$

Se  $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi u(\frac{x_0}{M} + \frac{y_0}{N})}$ , então:

$$G(u, v) = \frac{1}{4} \left[ e^{j2\pi \frac{u}{M}} + e^{j2\pi \frac{v}{N}} + e^{-j2\pi \frac{u}{M}} + e^{-j2\pi \frac{v}{N}} \right] \cdot F(u, v), \text{ logo:}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{4} \left[ 2 \cos\left(\frac{2\pi u}{M}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi v}{N}\right) \right]$$

[1]

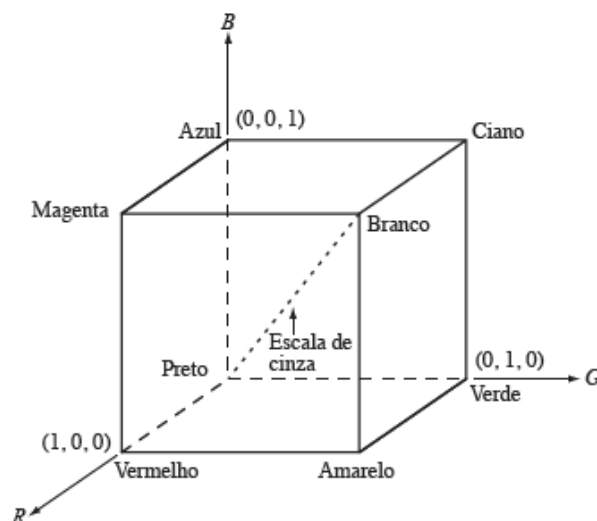
### 3. Em processamento de imagens coloridas:

a. Defina dois modelos de cores explicando em detalhes como é representada uma imagem digital colorida.

R.:

RGB

No modelo RGB cada cor é representada como uma combinação de vermelho, verde e azul. Este modelo pode ser representado em um sistema de coordenadas cartesianas. Considere um cubo no sistema de coordenadas x,y,z. A origem desse cubo (o ponto [0,0,0]) corresponde a cor preta, enquanto que cada eixo representa uma das 3 cores do RGB. Conforme a imagem abaixo as cores vermelho, verde e azul estão em vértices do cubo, enquanto nos outros vértices estão o ciano, magenta e amarelo:



Note que os valores vão de 0 a 1, isso acontece por questões de conveniência, assim os valores de vermelho, verde e azul vão variar de 0 a 1. Os níveis de cinza acontecem quando as três componentes têm o mesmo valor, por isso é uma reta, que vai da origem (preto) até o ponto mais distante (branco). Cada cor é um ponto no cubo ou dentro dele e é definida como um vetor partindo da origem.

No modelo RGB a imagem é o resultado da combinação das 3 componentes de cores, em um monitor, por exemplo, as componentes se combinam para gerar uma imagem com cores compostas. O número de bits usado para representar cada pixel no modelo RGB é a profundidade do pixel. Para uma imagem em que cada canal RGB é escrito utilizando 8 bits, diz-se que cada pixel tem profundidade de 24 bits.

## HSI

Quando o ser humano interpreta visualmente uma imagem com cores, os principais pontos utilizados para descrever a imagem são a matiz, a saturação e o brilho. A matiz trata da cor, podendo ser amarelo, vermelho, enquanto a saturação indica o grau de diluição daquela cor pela cor branca. Por outro lado, o brilho é subjetivo e não pode ser medido de forma objetiva, também se caracteriza por contribuir na sensação das cores. A intensidade e o brilho se relacionam, de modo que embora o brilho não possa ser medido, a medida da intensidade pode ser usada.

O modelo HSI (hue, saturation, intensity) representa a imagem baseando-se na matiz, saturação e intensidade. Essa característica possibilita o uso do HSI para o desenvolvimento de algoritmos de processamento de imagem com base em aspectos que são mais intuitivos para os seres humanos. O RGB, por exemplo, tem grande sucesso na geração de imagens coloridas, mas possui limites quando se trata de descrição de cores.

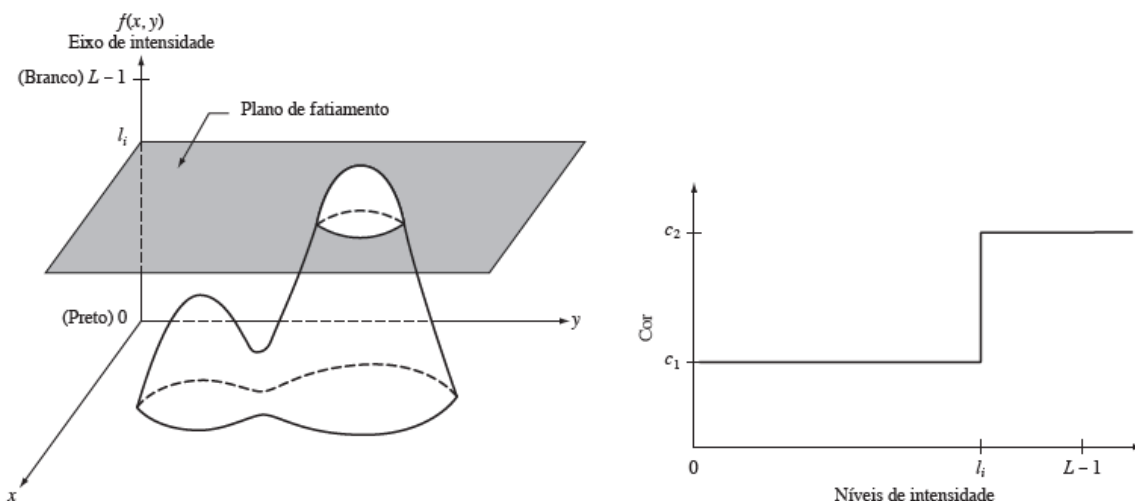
**b. O que significa processamento de imagens em pseudo-cores? Qual o seu uso, dê um exemplo de como obter uma imagem em pseudo-cores e possíveis aplicações.**

**R.:**

Quando se fala em processamento de imagens coloridas, tem-se duas áreas que se destacam: processamento de imagens coloridas e pseudocores. No caso de processamento de imagens coloridas, as imagens são obtidas através de sensores de cores, no caso pseudocores é necessário atribuir as cores usando algum critério, geralmente o nível de intensidade é utilizado como referência nesse processo de coloração.

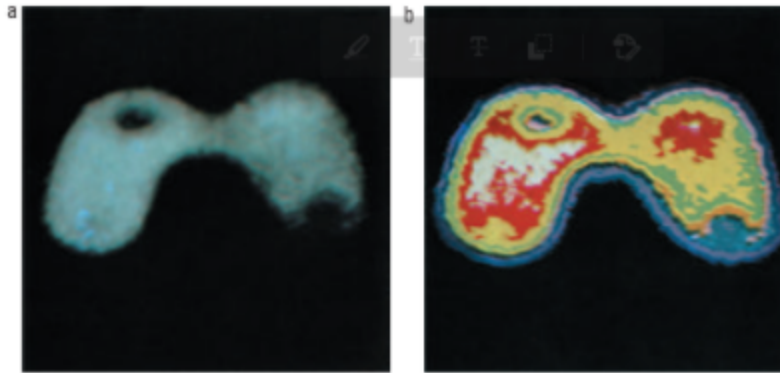
O nome pseudocor vem do fato que a cor atribuída aquela imagem não é de fato a sua cor verdadeira. O processamento de imagens em pseudocores tem como função facilitar a interpretação humana, através da atribuição de cores a imagens em escala de cinza.

Uma técnica de processamento em pseudocores é a de fatiamento por intensidade. Basicamente são definidos níveis de cor (planos de fatiamento) e se uma determinada intensidade estiver abaixo ou acima desse nível, vai receber uma cor diferente. A imagem que segue ilustra bem esse conceito:



As duas figuras representam o mesmo processo, exceto que a representação à direita é mais simples. Acima da intensidade  $I_i$  a cor é a  $c_2$ , abaixo a  $c_1$ .

Como exemplo, tem-se a sua utilização em imagens monocromáticas, no caso em questão há um lóbulo vermelho em escala de cinza. Aparentemente não há muita variação nos níveis de intensidade, porém, na realidade a intensidade é bem variável. Na imagem abaixo é possível visualizar a imagem monocromática sendo colorida artificialmente usando como base 8 regiões de cores de acordo com a variação do nível de intensidade.



[1]

**c. Quantos tons de cinza existem em um sistema de color RGB na qual cada imagem RGB é uma imagem de 32-bit?**

**R.:**

Já que são 32 bits, tem-se  $2^{32} = 4294967296$  valores em uma imagem de 32 bits. Para obter os tons de cinza, faz-se necessário que os valores RGB sejam iguais, logo existem 4294967296 tons de cinza.

[1]

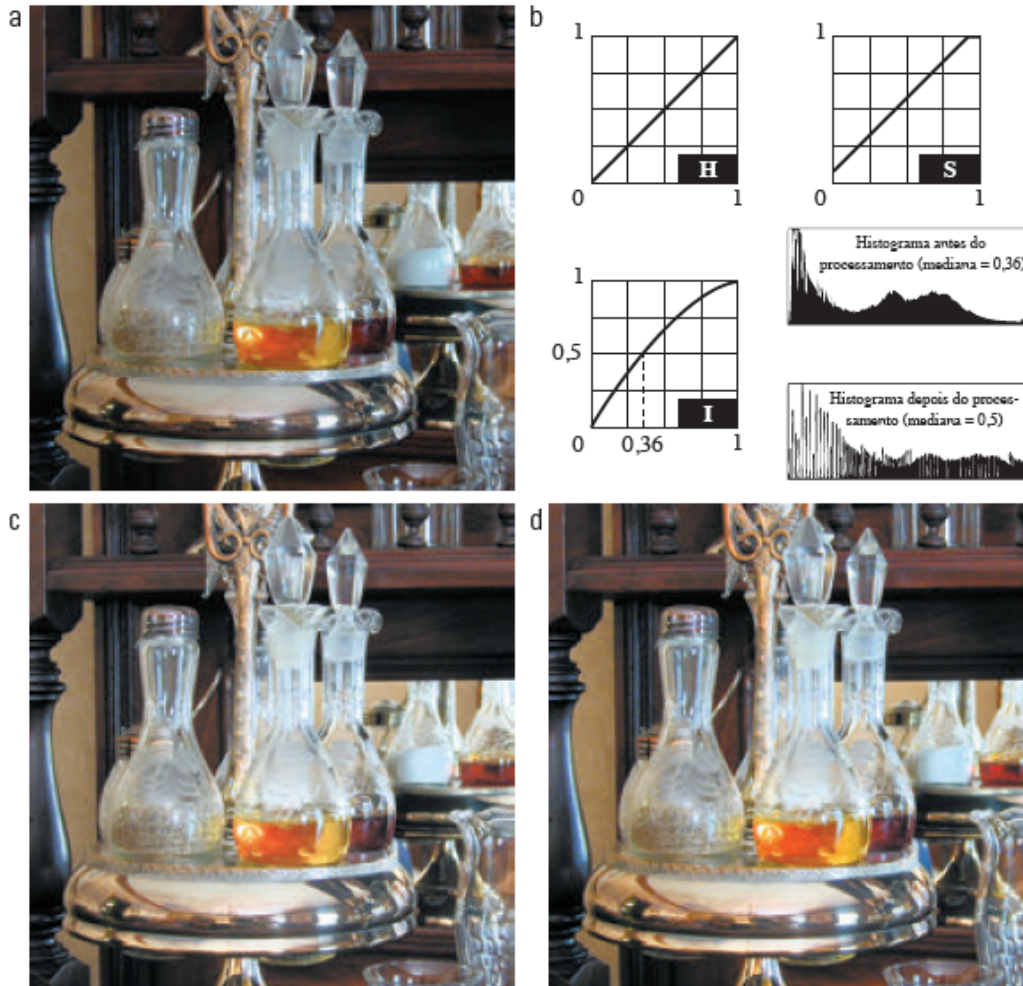
**d. Explique como implementar o equivalente à equalização do histograma em tons de cinza numa imagem colorida.**

**R.:**

A equalização do histograma trata de uma transformação que visa gerar uma imagem, cujos valores do histograma sejam uniformes. Para imagens monocromáticas essa técnica foi bem-sucedida, no caso de imagens coloridas é necessário realizar uma adaptação, uma vez que existem múltiplos componentes.

Não é desejável equalizar os componentes da imagem colorida de maneira independente, uma vez que gera erros nas cores da imagem. Para tanto, optou-se por dispersar a intensidade de cor e manter assim a cor inalterada.

O HSI é um modelo de cor apropriado para aplicar a técnica de equalização. Consequentemente é discutido um exemplo em uma imagem representada pelo padrão HSI. A imagem a seguir contém os elementos da discussão:



A imagem em *a* é a imagem original, em que *b* tem o histograma do canal intensidade, antes e depois da equalização. Na imagem original é possível perceber um grande número de cores escuras e sua mediana vale 0,36. A equalização apenas no canal de intensidade, isto é, sem alterar a matiz e a saturação, faz a imagem ficar mais clara e vários contornos se tornam visíveis, conforme visto em *c*. Vale também mencionar que em *b* está a transformação utilizada, note que tanto o hue quanto a saturação são uma reta de 45°, isto é, não mudam, diferente do gráfico de intensidade. Apesar de a transformação alterar apenas a intensidade, acaba afetando a percepção atual de cor, sendo necessário fazer um ajuste aumentando a componente de saturação, conforme em *d*.

[1]

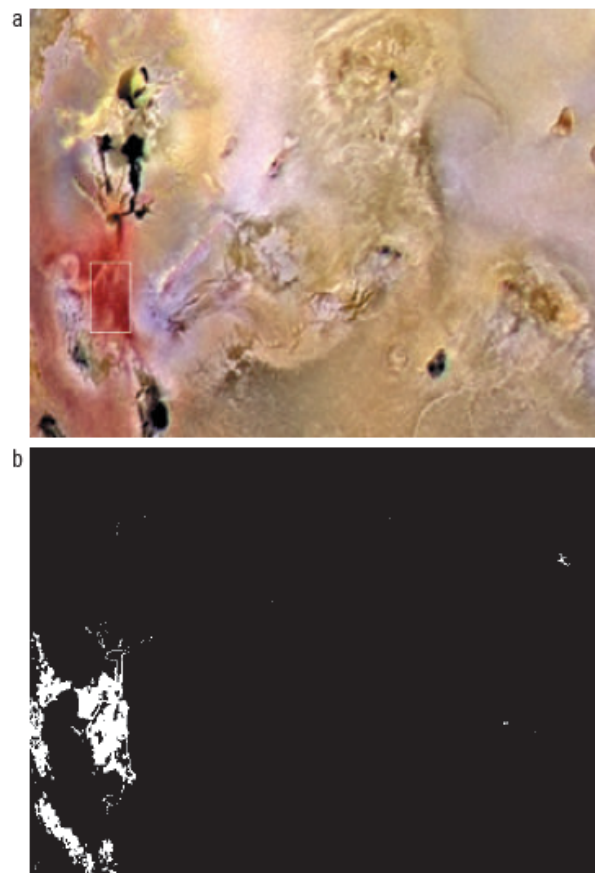
**e. Defina segmentação no espaço vetorial RGB e como podemos utilizar em uma aplicação.**

**R.:**



Embora seja intuitivo trabalhar com o modelo HSI, em muitos casos o uso do modelo RGB se mostra melhor quando se fala em segmentação. Para realizar a segmentação no padrão RGB, faz-se necessário obter uma amostra com as cores de interesse, e assim calcular um valor médio que vai servir como referência. Esse valor médio é um vetor e pode ser representado no plano cartesiano, em que cada componente RGB é um valor do vetor. O objetivo então é classificar os pixels de uma imagem como pertencentes ou não a um intervalo específico. Uma forma de fazer isso é comparando as cores pela distância euclidiana, seja um dado vetor de cor  $W$ , por exemplo, pode-se dizer que aquele pixel é ou não semelhante a  $W$  se a distância entre a cor do pixel e  $W$  estiver dentro de um limiar. Vale mencionar que definindo uma cor de referência e uma distância limiar, tem-se uma esfera, em que os pontos dentro da esfera são ditos similares e os que estão fora são desconsiderados, sendo assim os pontos dentro da esfera satisfazem o critério de cor.

Como exemplo, tem-se a segmentação da cor vermelha na imagem abaixo:



É definido um retângulo na imagem *a* na figura acima, de modo que esses pixels são levados em consideração para o cálculo de um vetor médio, tal que esse vetor é usado para centralizar um cubo. As dimensões deste cubo são definidas de acordo com o desvio padrão de cada componente: vermelha, azul e verde. No caso acima o valor definido foi de 1,25 multiplicado



pelo desvio padrão. Considerando apenas a componente vermelha, por exemplo, a dimensão iria do *valor médio* -  $1,25 \cdot (\text{desvio padrão})$  até o *valor médio* +  $1,25 \cdot (\text{desvio padrão})$ . Os pontos dentro do cubo ficam brancos e os de fora pretos, conforme o resultado da segmentação acima. Olhando o resultado da segmentação, percebe-se que o padrão conseguiu segmentar bem a cor vermelha da imagem original.

[1]

#### 4. Função de transferência e filtros

a. Obtenha a função de transferência do filtro,  $H(u,v)$  do Laplaciano no domínio de frequência.

R.:

Seja o Laplaciano em 2D:

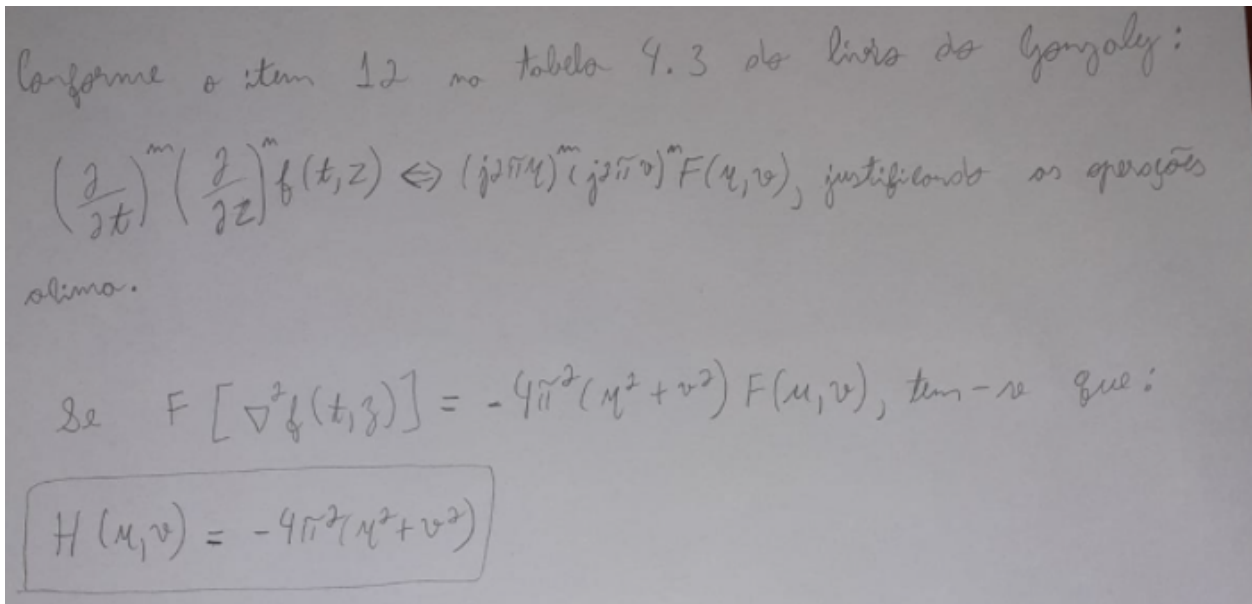
$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Tomando a transformada de Fourier:

$$F[\nabla^2 f(x,y)] = F\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] + F\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]$$

$$= (j2\pi u)^2 F(u,v) + (j2\pi v)^2 F(u,v)$$

$$= -4\pi^2 (u^2 + v^2) F(u,v)$$



[1]

**b. Descreva e explique a filtragem por “alto reforço”. Qual a vantagem deste filtro?**

**R.:**

Um processo utilizado pela indústria gráfica para aumentar a nitidez das imagens consiste em subtrair uma versão suavizada da imagem original. Este processo recebe o nome de máscara de nitidez, que consiste em borrar a imagem original, subtrair a imagem borrada da original e por último adicionar a máscara à imagem original. A máscara pode ser escrita como  $g(x,y) = f(x,y) - b(x,y)$ , em que  $b(x,y)$  denota a imagem borrada. Na última etapa faz-se a adição ponderada de  $g(x,y)$  com a imagem original  $f(x,y)$ :  $r(x,y) = f(x,y) + k \cdot g(x,y)$ . Quando o  $k > 1$ , tem-se a filtragem por “alto reforço”, em que quanto maior o valor de  $k$ , maior a contribuição da máscara de nitidez. A vantagem desse filtro é conseguir melhorar o aumento de nitidez na imagem borrada.



Na figura acima tem-se a imagem original em *a*, a imagem filtrada em *b*, a máscara de nitidez em *c*, aguçamento com  $k = 1$  em *d* e em *e* aguçamento com  $k = 4,5$ . É perceptível que em *e* a imagem consegue um melhoramento significativo.

[1]

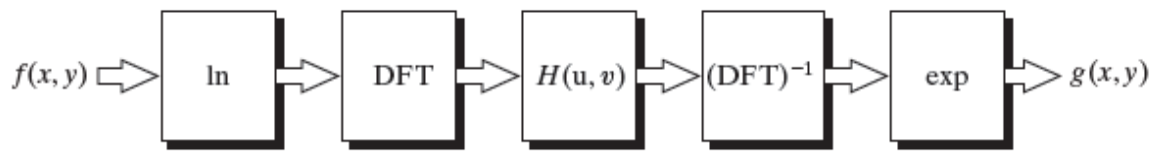
**c. Descreva e explique o filtro homomórfico. Quando devemos aplicar este filtro?**

**R.:**

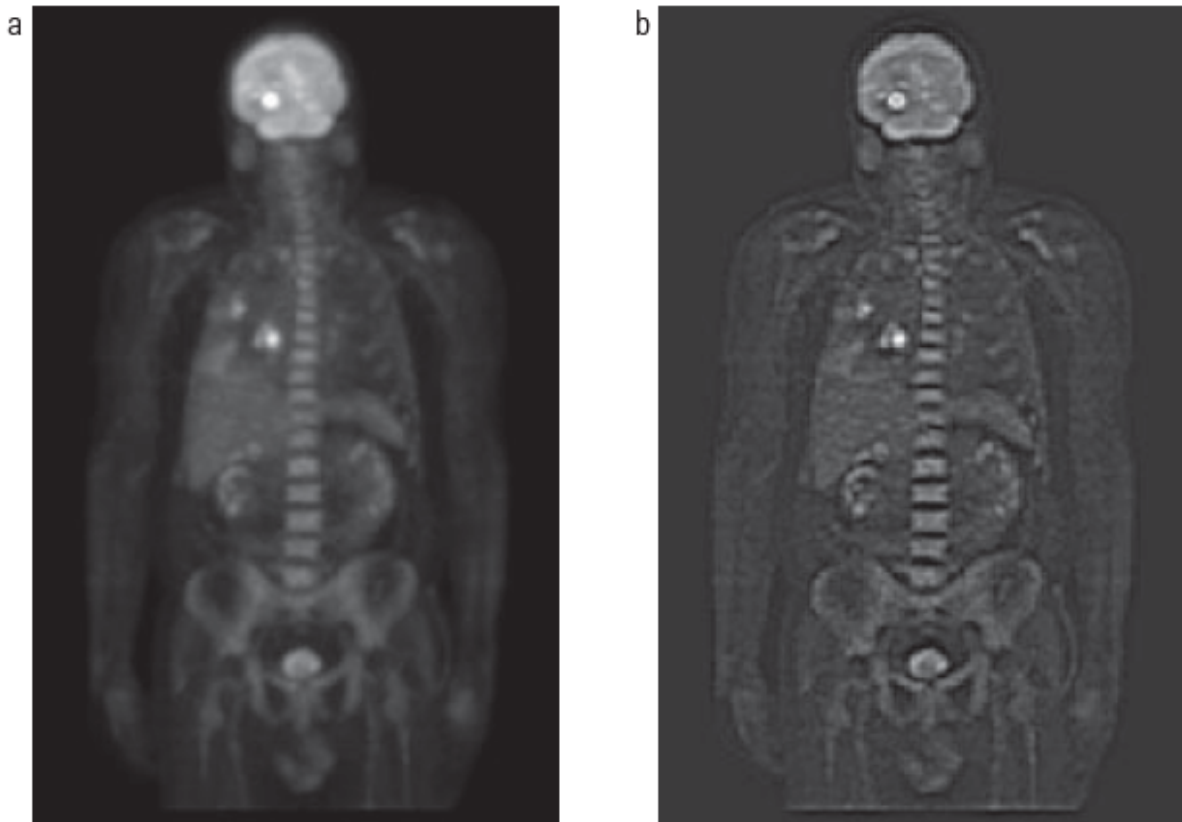
Seja o modelo de iluminação-reflectância, a imagem pode ser escrita como:  $f(x,y) = i(x,y) \cdot r(x,y)$ , em que  $i(x,y)$  é a componente de iluminação e  $r(x,y)$  é a componente de reflectância. Esta expressão de  $f(x,y)$  não pode ser utilizada diretamente para a análise na frequência, uma vez que a transformada de Fourier de  $f(x,y)$  não resulta no produto das transformadas de  $i(x,y)$  por  $r(x,y)$ .

Uma solução é calcular o logaritmo natural de  $i(x,y)$  e  $r(x,y)$ , de modo que a transformada de Fourier vai ser a soma da transformada dos logaritmos. Assim, as componentes de iluminação e reflectância podem ser separadas no domínio da frequência e a aplicação de um filtro se daria pelo produto do filtro pelas transformadas dos logaritmos. Para obter a transformada inversa após a filtragem, basta aplicar a transformada inversa de Fourier, porém como foi calculado o logaritmo das componentes  $i(x,y)$  e  $r(x,y)$ , faz-se o exponencial do resultado da transformada inversa.

Este método de filtragem se chama filtragem homomórfica e é resumido na imagem abaixo:



O filtro homomórfico deve ser utilizado para realçar a imagem. A figura abaixo em *a*, possui um ligeiro borramento e parte de suas características de baixa intensidade são dominadas pelos pontos claros. Já em *b* está o resultado da filtragem, observe como o esqueleto e os pontos claros estão mais nítidos e com mais detalhes. A redução dos efeitos do componente de iluminação, possibilita ao monitor exibir intensidades mais baixas de forma mais visível. Uma vez que as componentes de alta frequência são realçadas, os componentes de refletância também foram realçados. Consequentemente é nítida a melhora após a filtragem.



[1]

**5. Uma imagem de raio-X produz uma degradação que pode ser modelado como uma convolução da imagem com uma função simétrica espacial circular da forma**

$$h(r) = [(r^2 - \sigma^2)/\sigma^4] e^{-r^2/2\sigma^2}$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ . Demonstre que a degradação no domínio da frequência é dada pela expressão:

$$H(u, v) = -\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2 + v^2)}$$

R.:

Para resolver este problema, faz-se necessariamente usar a seguinte equação:

$$\nabla^2 h_0(r) = h(r), \text{ em que } h_0(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Seja  $F[\nabla^2 f(x, y)] = -(u^2 + v^2)F(u, v)$ , para calcular a transformada de Fourier de  $h(r)$ , basta calcular a transformada de  $\nabla^2 h_0(r)$ , em que  $h_0(r)$  está na forma gaussiana.

Seja  $F[e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}] = F[e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}] = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\pi^2\sigma^2}{2}(u^2 + v^2)}$   
(conforme tabela 4.1, no item Gaussian)

Consequentemente:

$$F[h(r)] = F[\nabla^2 h_0(r)] = -(u^2 + v^2)F(u, v) = -(u^2 + v^2)\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\pi^2\sigma^2}{2}(u^2 + v^2)}$$

$$F[h(r)] = H(u, v) = -\sqrt{2\pi}\sigma(u^2 + v^2)e^{-\frac{\pi^2\sigma^2}{2}(u^2 + v^2)}$$

[1]

## Referências

1. Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods. Digital Image Processing (3rd Edition). Prentice Hall, August 2007.
2. Sobel operator - [https://en.wikipedia.org/wiki/Sobel\\_operator](https://en.wikipedia.org/wiki/Sobel_operator)
3. Sobel Edge Detector - <https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/sobel.htm#:~:text=The%20Sobel%20operator%20performs%20a,in%20an%20input%20grayscale%20image.>
4. Linearity - <https://en.wikipedia.org/wiki/Linearity>
5. Fourier Transform - Linearity Property - [https://www.youtube.com/watch?v=nQ\\_u-hRSOV0&t=209s](https://www.youtube.com/watch?v=nQ_u-hRSOV0&t=209s)
6. Fourier transform - <https://www.thefouriertransform.com/>
7. Introduction to the Fourier Transform - <https://lpsa.swarthmore.edu/Fourier/Xforms/FXformIntro.html>
8. Image Transforms - Fourier Transform - <https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/fourier.htm>