

Aproksymacja profilu wysokościowego

1. Wstęp

Celem projektu była implementacja metod interpolacji Lagrange'a i funkcji sklejanych trzeciego stopnia do aproksymacji profilu wysokościowego. Do realizacji wykorzystałem język Python, bibliotekę matplotlib do tworzenia wykresów oraz bibliotekę pandas do przetwarzania plików CSV. Do rozwiązywania układu równań liniowych z drugiej metody użyłem faktoryzacji LU z uwzględnieniem możliwości dzielenia przez zero, wykorzystując pivoting.

2. Testowane profile wysokościowe

Zastosowałem profile wysokościowe dostępne na platformie enauczanie, tak aby były dość zróżnicowane pod względem charakteru trasy:

Chełm – plik chelm.txt, trasa z reguły równa, z małymi uskokami,

Głębia Challengeera – plik GłębiaChallengeera.csv, najniżej położone zbadane miejsce na Ziemi, teren z bardzo dużym uskokiem w dół,

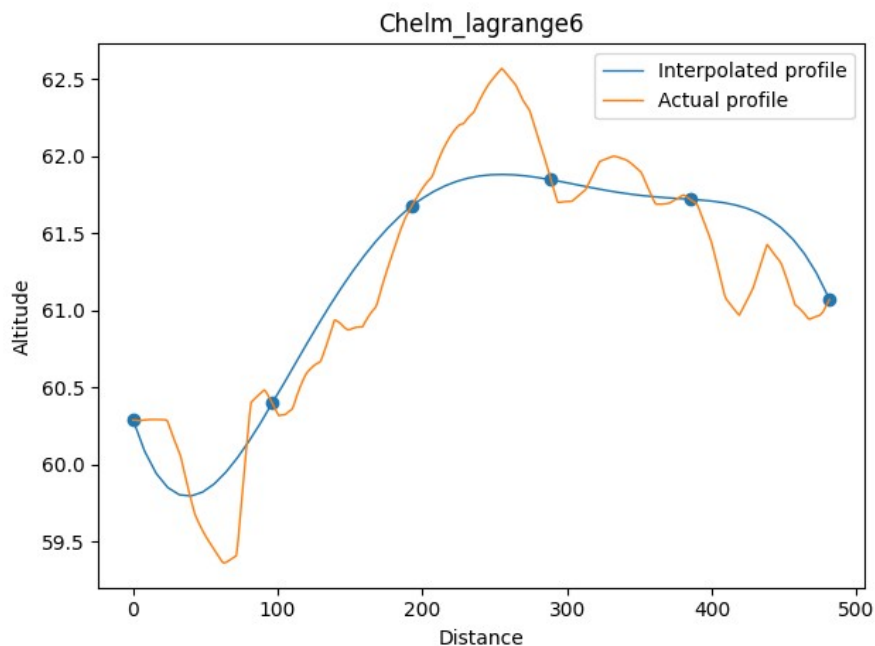
Mount Everest – plik MountEverest.csv, najwyższa góra na Ziemi, teren z wysokim uskokiem w górę.

3. Metoda Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a jest prosta w implementacji oraz nie wymaga dużego nakładu pamięci, w porównaniu do metody splajnów. Działa poprzez przybliżanie wielomianu n -tego stopnia w $n+1$ punktach (węzły). Metoda jest dokładniejsza przy większych ilościach węzłów, ale występuje w niej efekt Rungego, czyli oscylacje na krańcach przedziału.

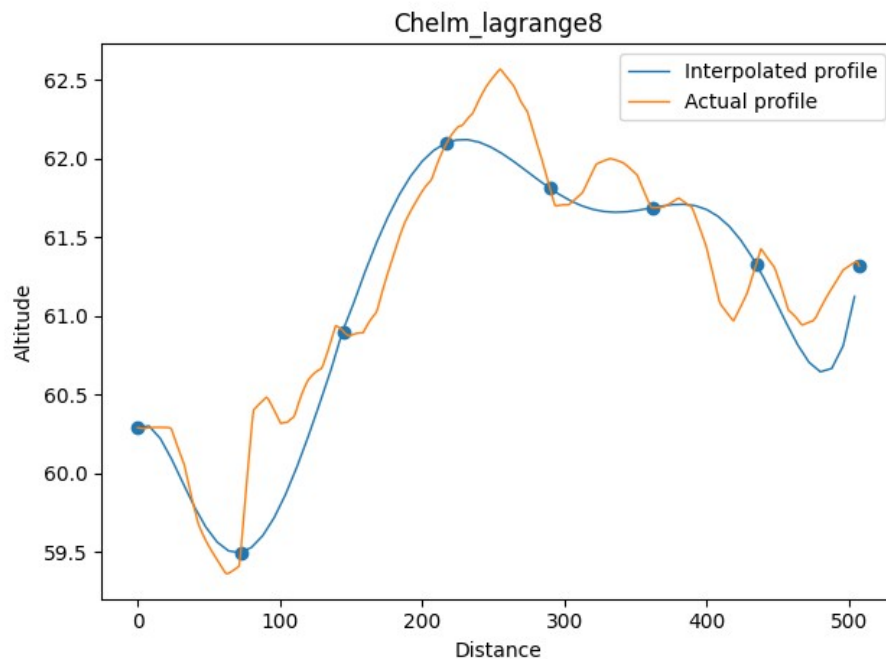
1. Chełm

Interpolacja dla 6 punktów



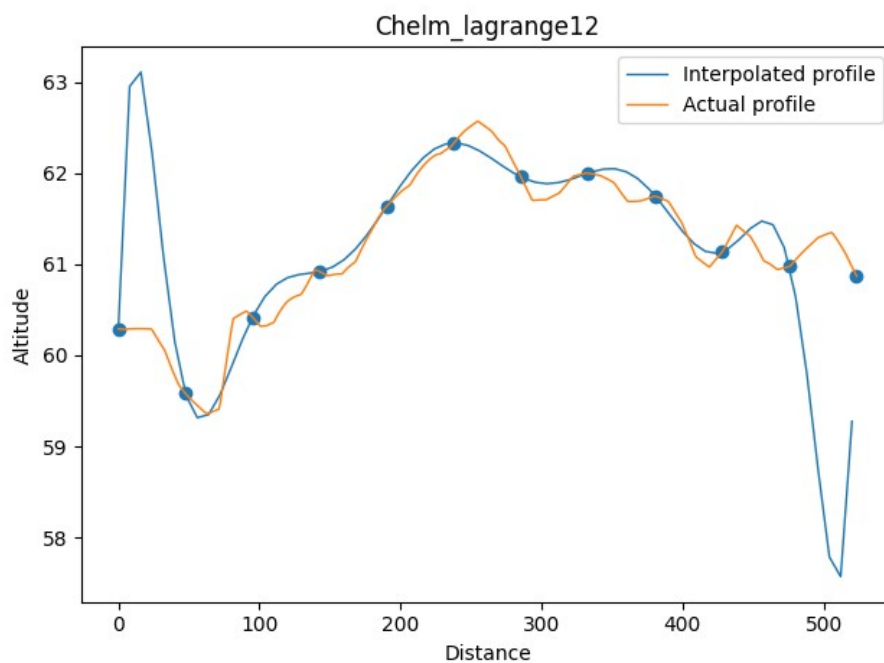
Rezultat nie jest zadowalający, ponieważ przybliżenie funkcji jest mało dokładne.

Interpolacja dla 8 punktów



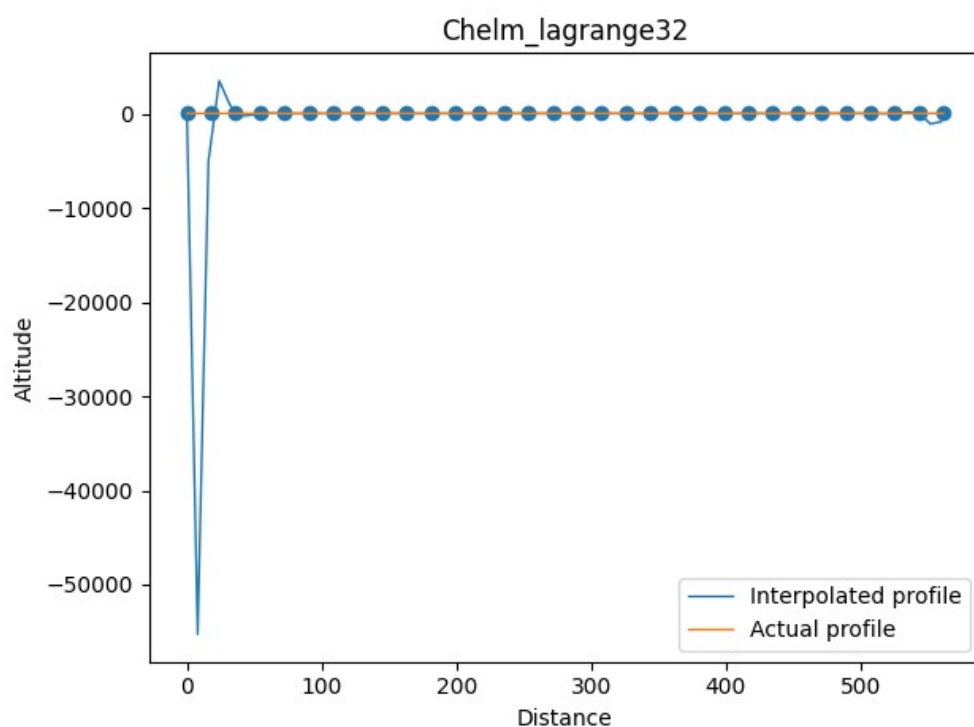
Efekt jest dokładniejszy niż przy liczbie 6 węzłów, lecz wciąż mało dokładny.

Interpolacja dla 12 punktów



Kolejne zwiększenie ilości węzłów pomogło polepszyć dokładność, ale zaczyna być widoczny efekt Rungego – oscylacje na krańcach przedziału.

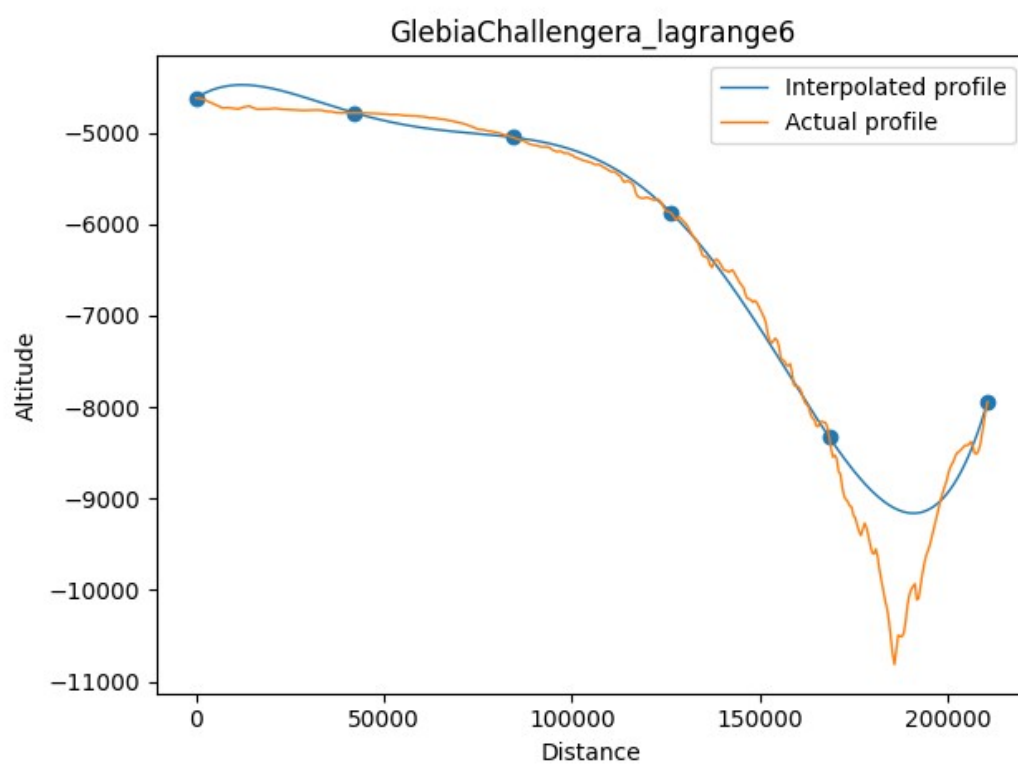
Interpolacja dla 32 punktów



Następne zwiększanie liczby węzłów znacznie polepszać wyniki dla wnętrza przedziału, ale oscylacje na jego krańcach będą coraz większe, co niszczy użyteczność metody.

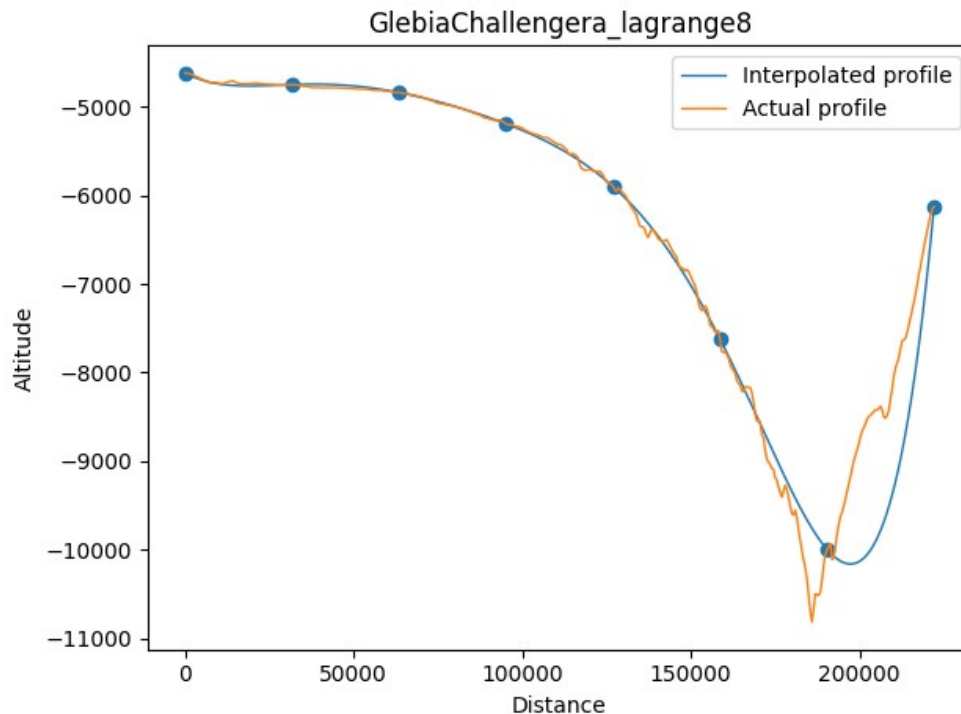
2. Głębia Challengeera

Interpolacja dla 6 punktów



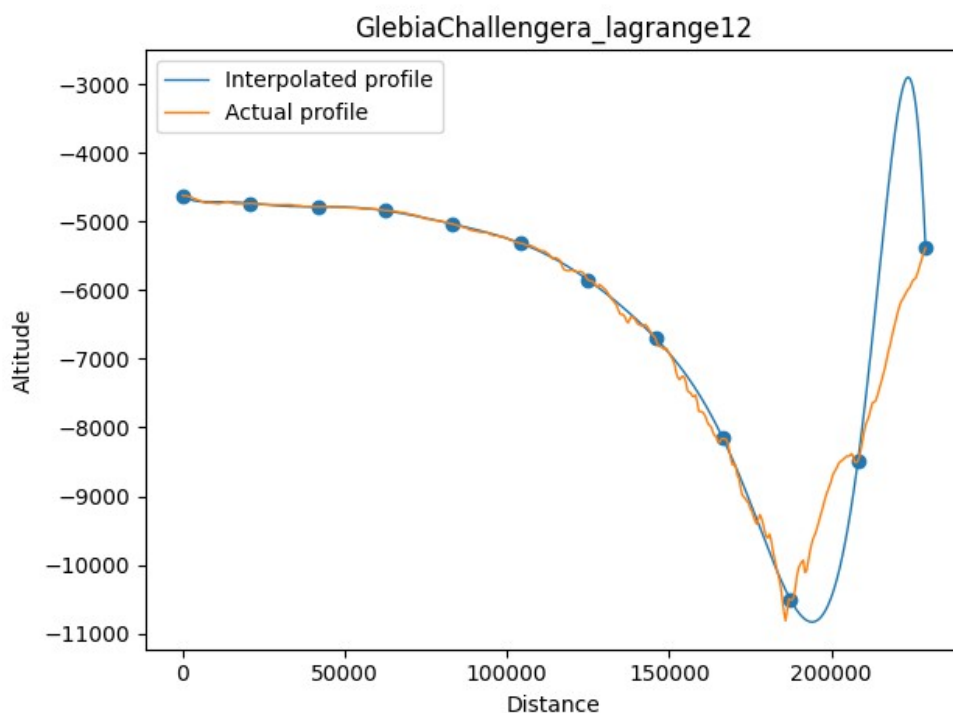
Tak jak w poprzednim przykładzie, efekt dla niskiej ilości węzłów jest niezadowalający. Widoczna jest dobrze różnica w charakterystyce wysokościowej profilu z poprzednim przykładem. Trasa zawiera mniej małych skoków wysokości, więc jest łatwiej interpolowalna niż poprzednia.

Interpolacja dla 8 punktów



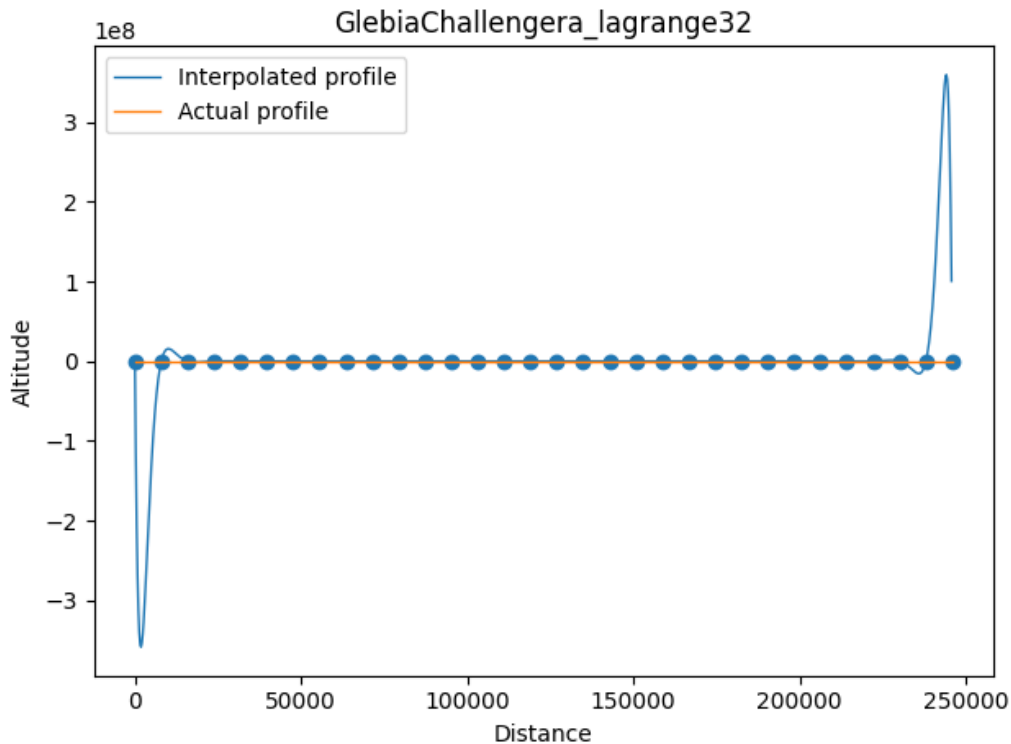
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zwiększenie liczby węzłów daje nam lepszą dokładność wyniku.

Interpolacja dla 12 punktów



Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zwiększenie liczby węzłów daje nam lepszą dokładność wyniku, ale możemy zaobserwować początki efektu Rungego na krańcu przedziału.

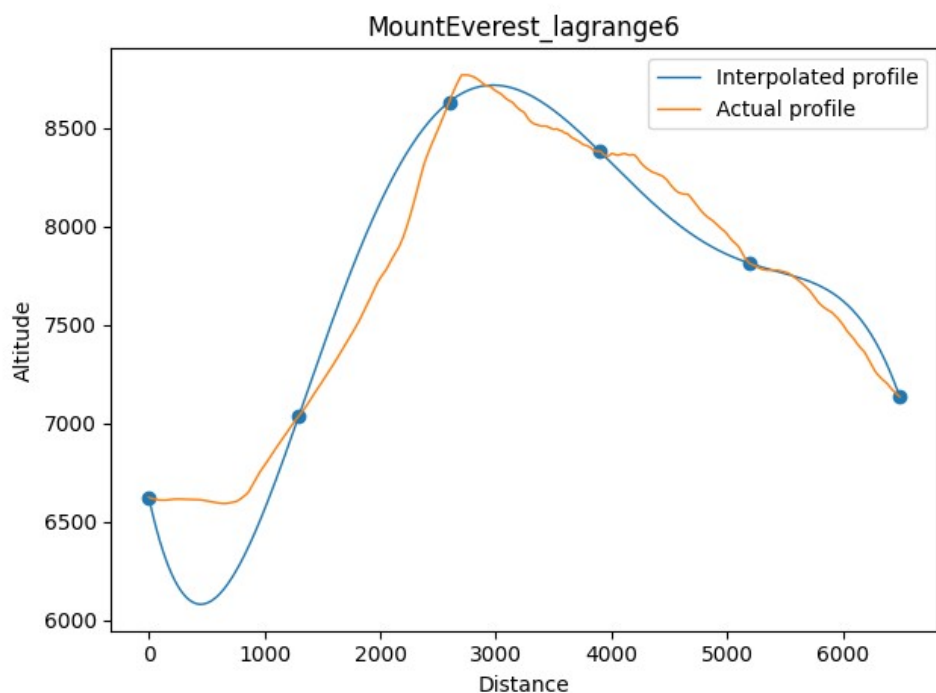
Interpolacja dla 32 punktów



Podobnie jak w poprzednim przykładzie, następne zwiększanie liczby węzłów zacznie polepszać wyniki dla wnętrza przedziału, ale oscylacje na jego krańcach będą coraz większe, co niszczy użyteczność metody.

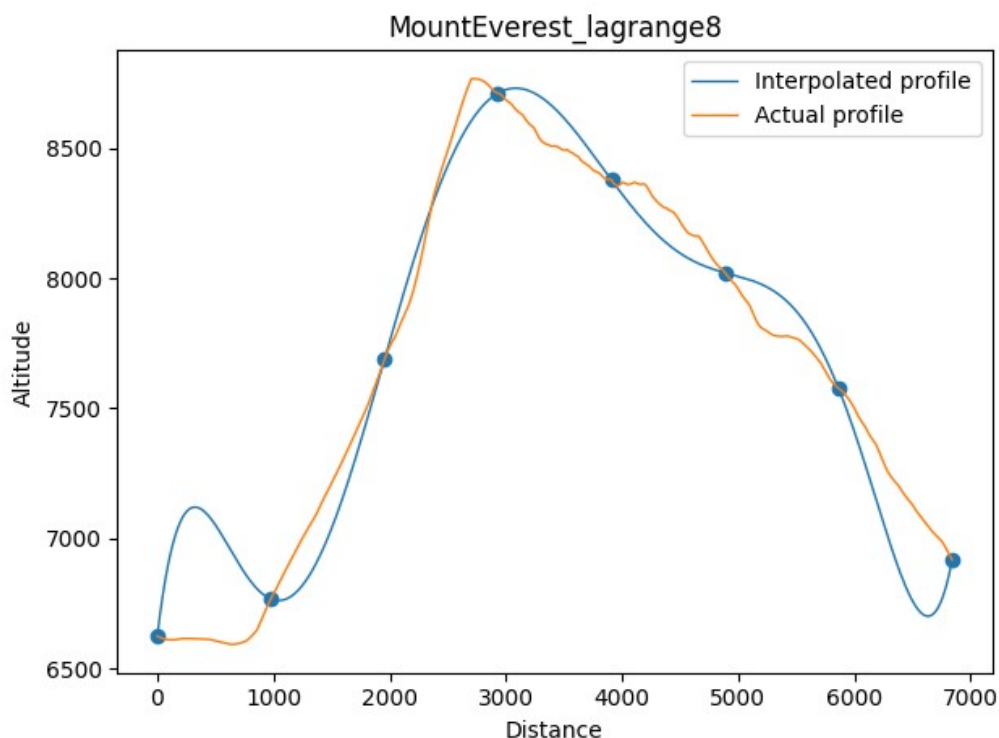
3. Mount Everest

Interpolacja dla 6 punktów



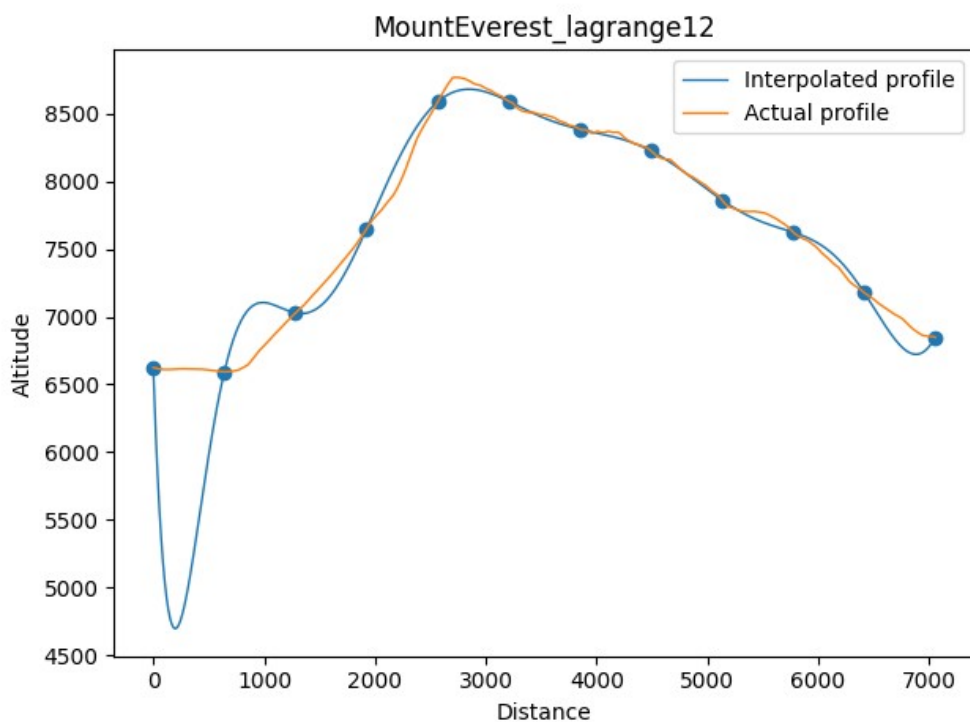
Tak jak w poprzednim przykładzie, efekt dla niskiej ilości węzłów jest niezadowolający. Charakterystyka wysokościowa jest podobna jak poprzednio, ale wysokość rośnie zamiast maleć. Trasa zawiera mniej małych skoków wysokości, więc jest łatwiej interpolowalna niż pierwsza.

Interpolacja dla 8 punktów



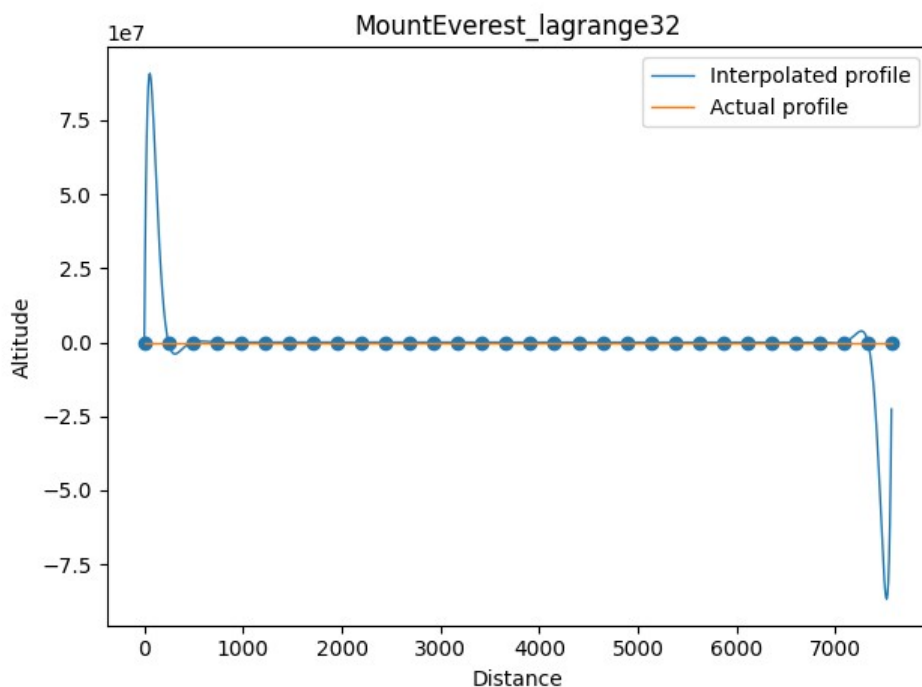
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zwiększenie liczby węzłów daje nam lepszą dokładność wyniku, ale oscylacje zaczynają być widocznie już przy 8 węzłach.

Interpolacja dla 12 punktów



Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zwiększenie liczby węzłów daje nam lepszą dokładność wyniku, ale efekt Rungego z lewej strony przedziału jest bardzo silny i odbiera użyteczność wynikowi.

Interpolacja dla 32 punktów



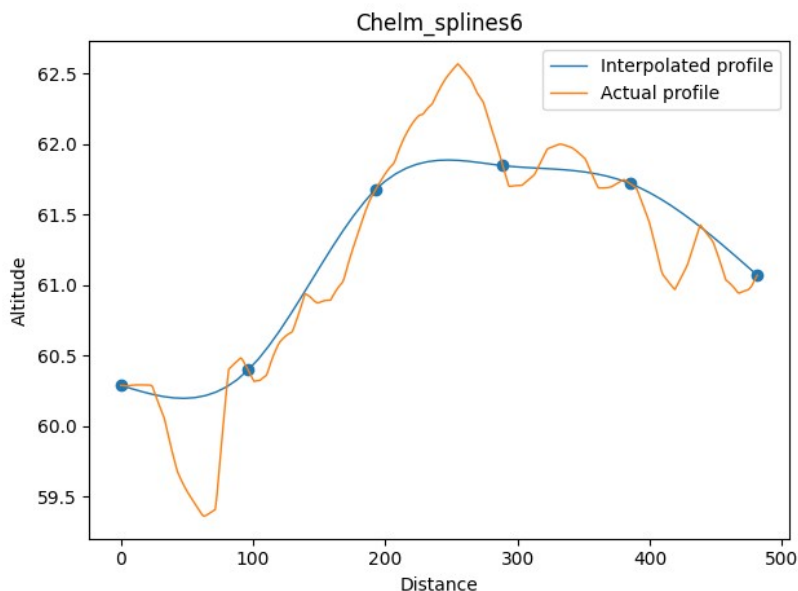
Tak jak w poprzednim przykładzie, następne zwiększanie liczby węzłów zacznie polepszać wyniki dla wnętrza przedziału, ale oscylacje na jego krańcach będą coraz większe, co niszczy użyteczność metody.

3. Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia

Przy metodzie Lagrange'a oscylacje na krańcach przedziałów rujnują użyteczność naszego wyniku. Aby uniknąć efektu Rungego stosujemy metodę splajnów. Dla n węzłów tworzymy $n-1$ podprzedziałów i dla każdego interpolujemy funkcję wielomianem trzeciego stopnia. Do metody tworzymy $4 \cdot (n-1)$ równań liniowych, które rozwiązujemy faktoryzacją LU z pivotingiem.

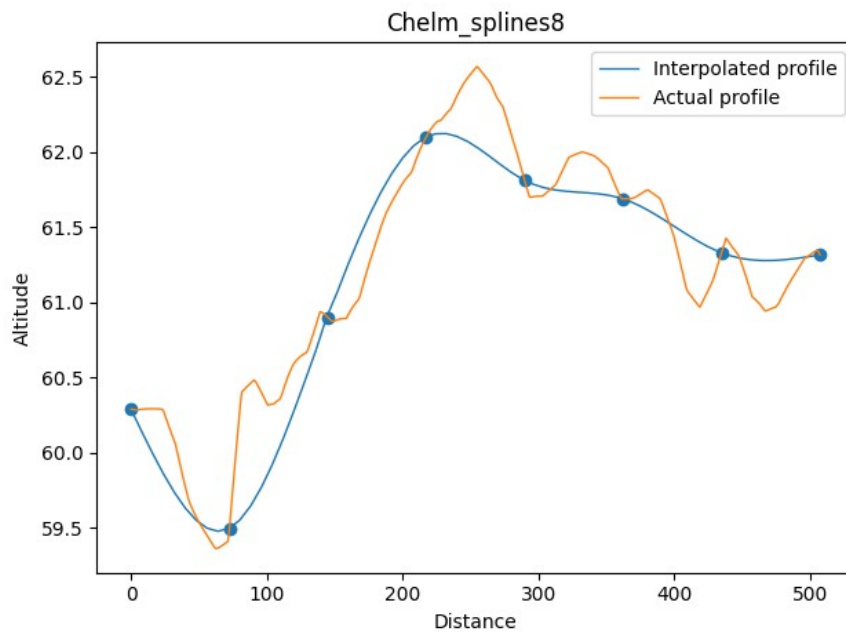
1. Chełm

Interpolacja dla 6 punktów



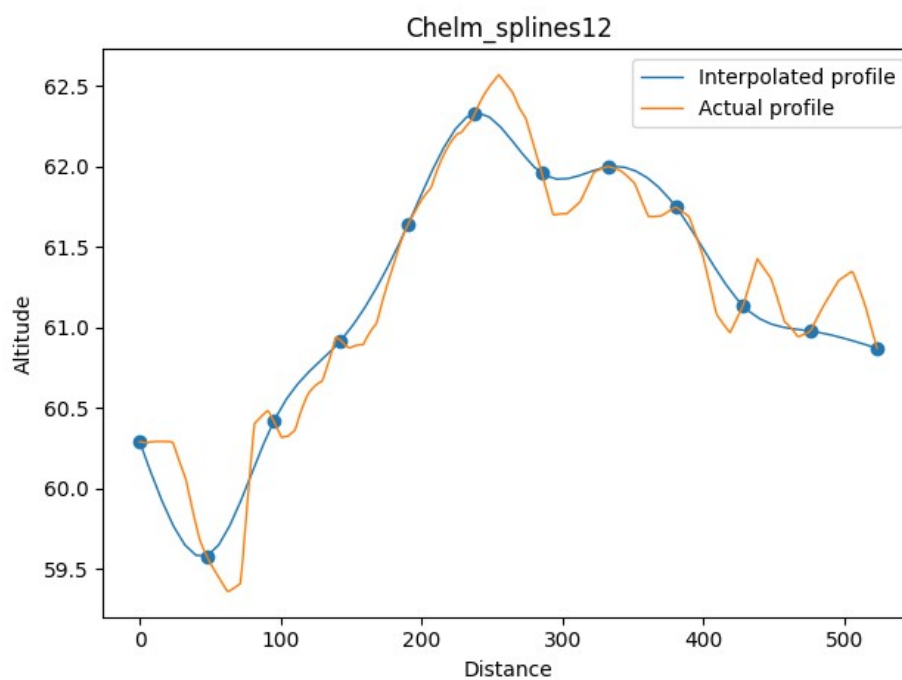
Dla małej ilości węzłów metoda nie jest lepsza od metody Lagrange'a, a wręcz jest podobna.

Interpolacja dla 8 punktów



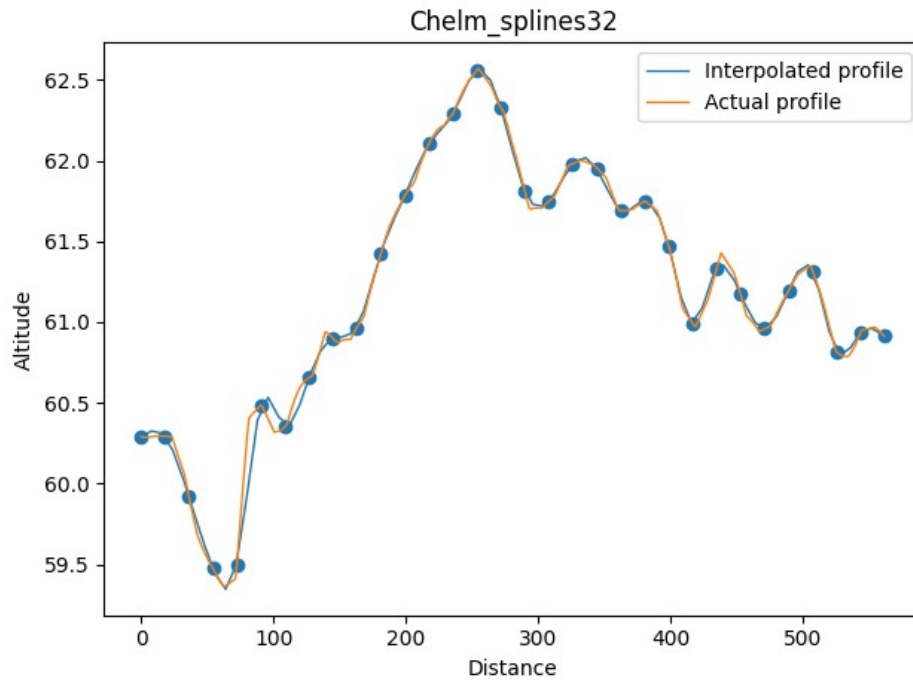
Przy zwiększeniu ilości węzłów jakość metody się polepsza, a oscylacje nie występują.

Interpolacja dla 12 punktów



Przy zwiększeniu ilości węzłów jakość metody się polepsza, przy czym widoczna jest dobrze różnica wyniku z metodą Lagrange'a – oscylacje nie występują.

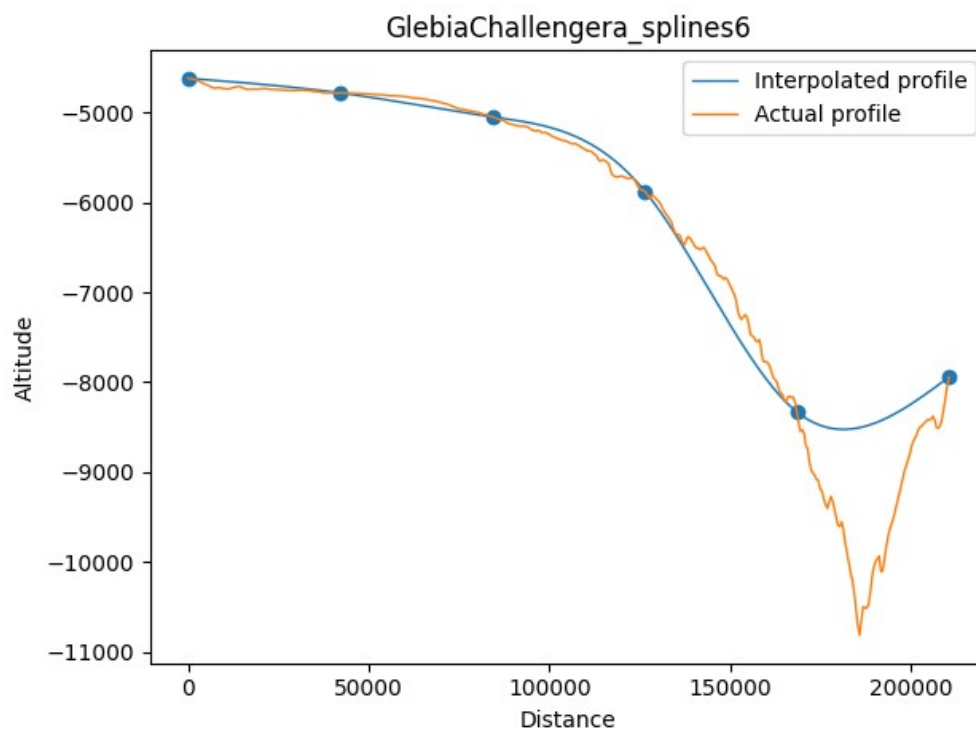
Interpolacja dla 32 punktów



Dla 32 węzłów mamy odpowiednio dokładną interpolację, której wynik jest jak najbardziej użyteczny w przeciwieństwie do metody Lagrange'a, gdzie oscylacje uniemożliwiały dobrą jakość wyniku.

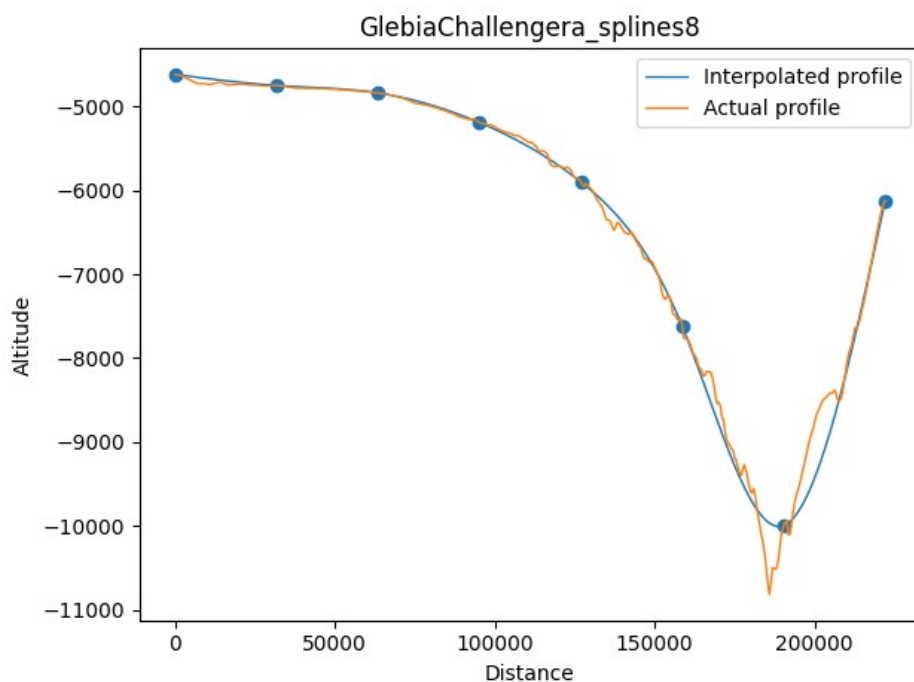
2. Głębia Challengeera

Interpolacja dla 6 punktów

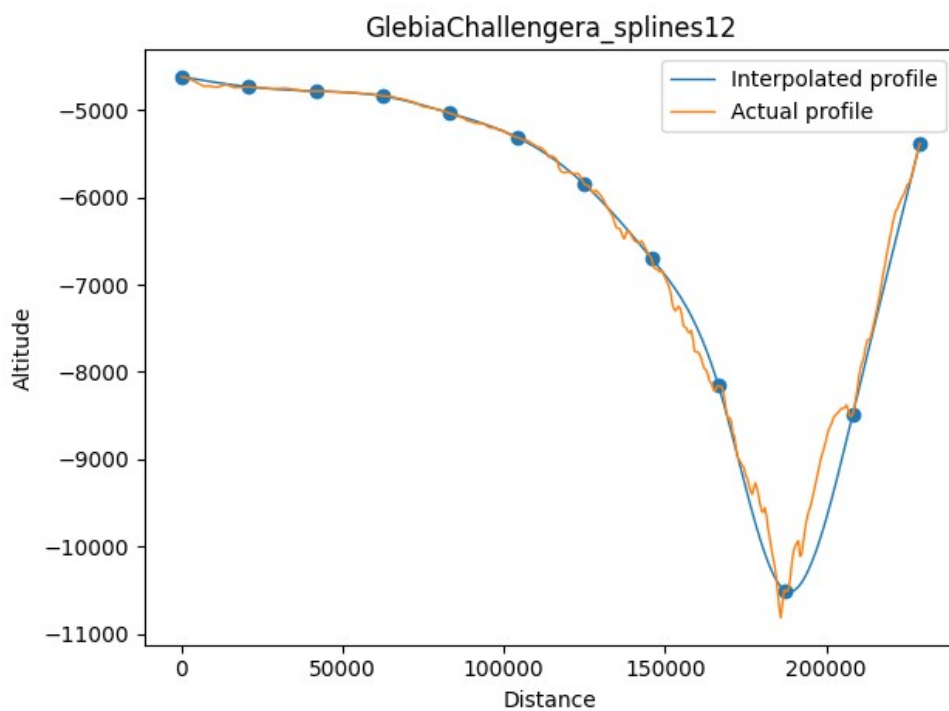


Tak jak poprzednio, zaczynając od 6 węzłów nie uzyskujemy dobrego przybliżenia, ale wraz ze zwiększaniem jej ilości rezultat staje się coraz lepszy.

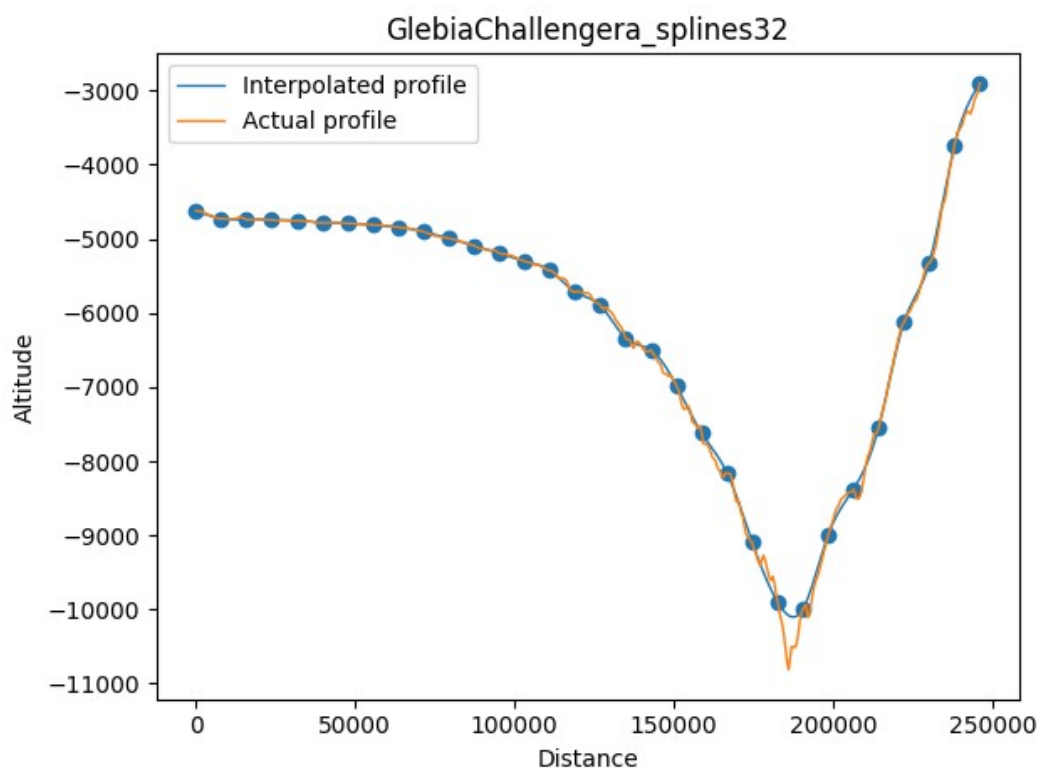
Interpolacja dla 8 punktów



Interpolacja dla 12 punktów



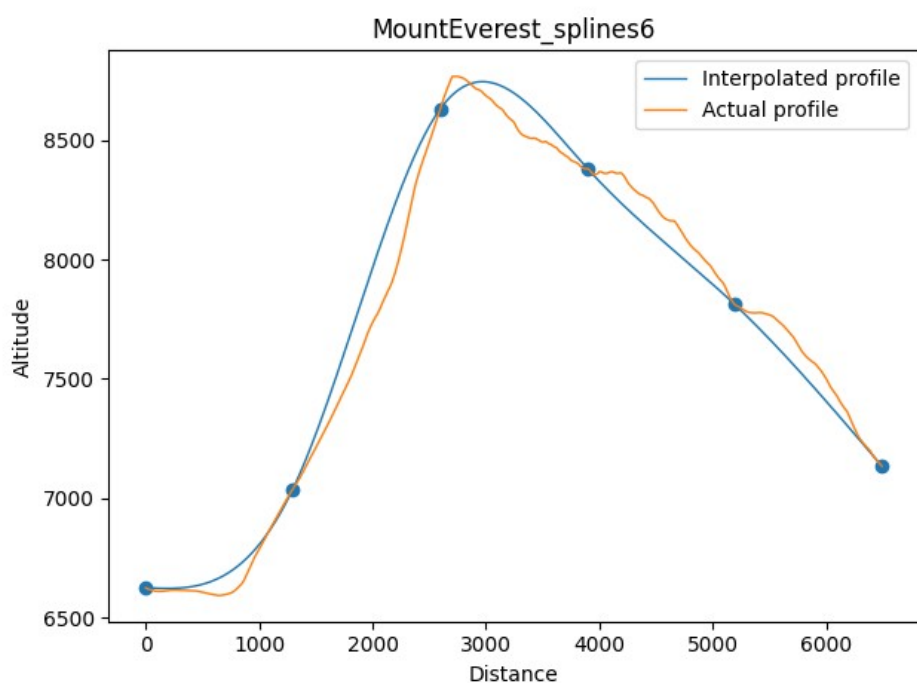
Interpolacja dla 32 punktów



Przy wysokiej liczbie węzłów otrzymujemy dobre przybliżenie, z niedokładnością przy nagłym skoku w dół, w najgłębszym punkcie charakterystyki.

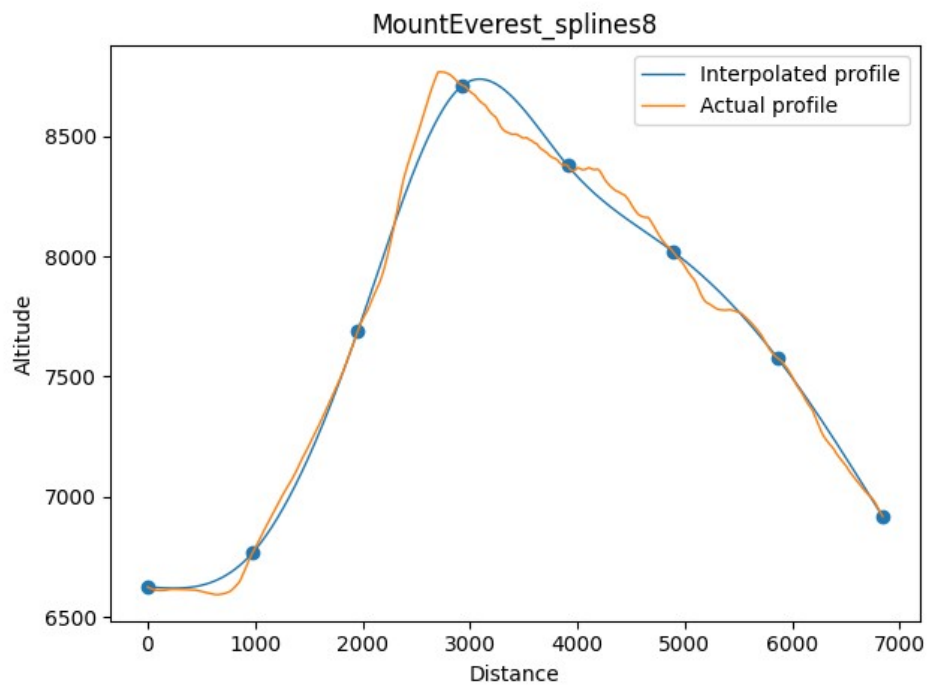
3. Mount Everest

Interpolacja dla 6 punktów

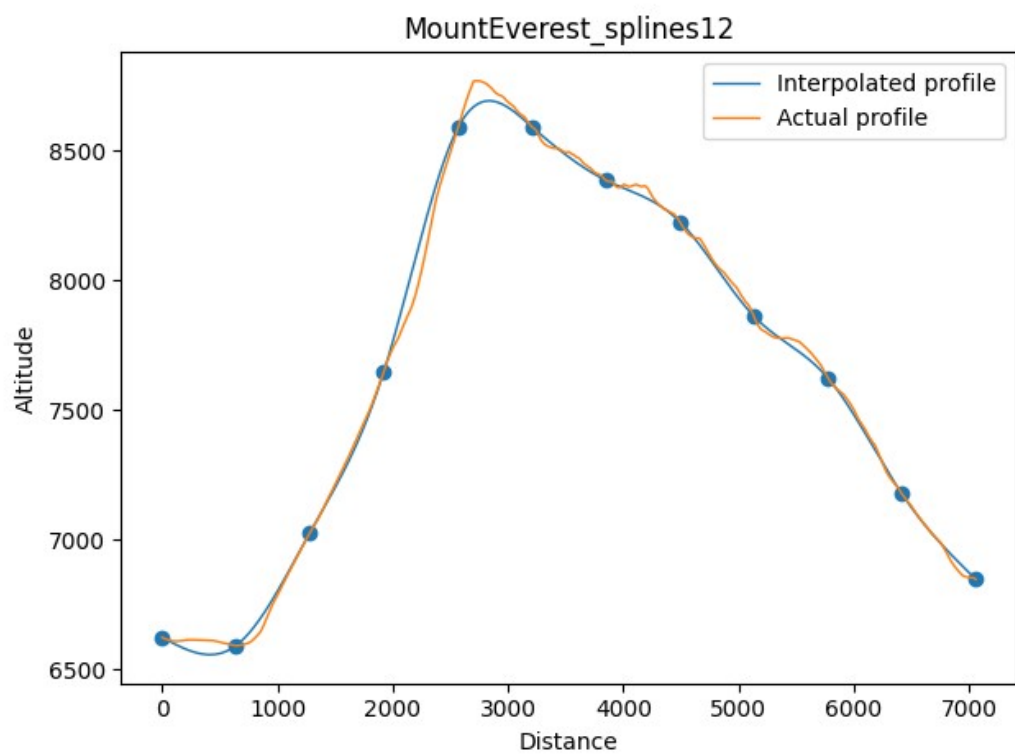


Wyniki prezentują się podobnie jak przy poprzednim przykładzie, z tymi samymi zasadami wyniku.

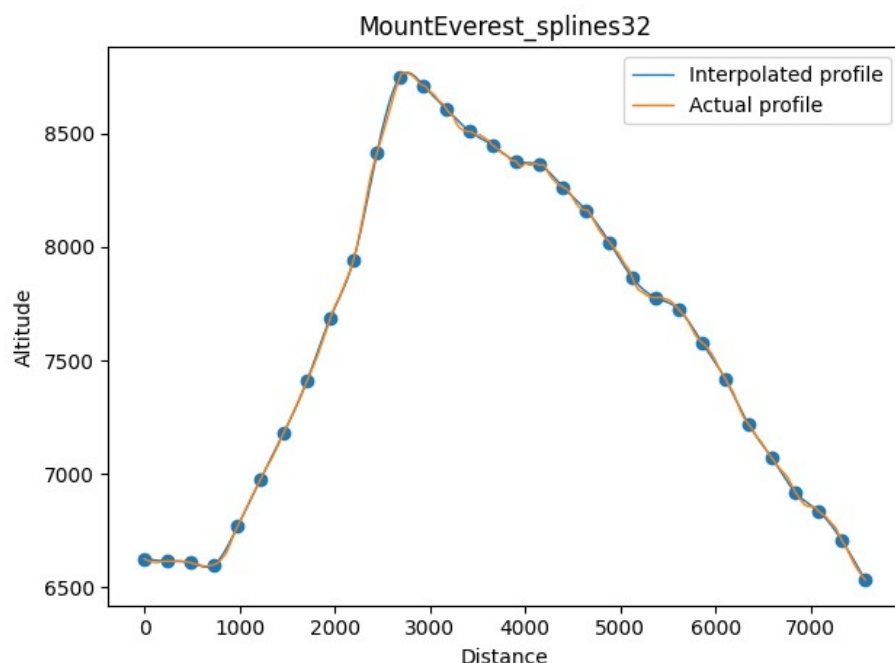
Interpolacja dla 8 punktów



Interpolacja dla 12 punktów



Interpolacja dla 32 punktów



Interpolacja metodą funkcji sklejanych trzeciego stopnia dla charakterystyki Mount Everest wydaje się najdokładniejsza ze wszystkich jednocześnie nie wykazując oscylacji na krańcach przedziału oraz dobrą jakością przybliżenia w jego wnętrzu.

4. Podsumowanie

Metoda Lagrange'a pomimo swoich zalet w postaci łatwej implementacji czy niskiego zapotrzebowania pamięci tworzy efekt Rungego, czyli oscylacje na krańcach przedziału, które psują użyteczność wyniku. Wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacji dokładność przybliżenia wewnątrz przedziału się zwiększa, ale na jego krańcach efekt Rungego wzrasta.

Lepszym rozwiązaniem jest metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, która pomimo trudniejszej implementacji oraz większego zapotrzebowania pamięci daje o wiele lepsze wyniki dokładności przybliżenia oraz nie generuje efektu Rungego.

W obu metodach jakość interpolacji zależna jest od liczby węzłów – im ich więcej tym lepsza dokładność.

Istotnym elementem jakości wyniku interpolacji jest charakterystyka terenu badanego. Dla regularnie rosnących lub malejących tras wynik jest dokładniejszy, a dla szybko zmieniających się wysokość nagłymi skokami przybliżenie staje się mniej dokładne.

Podsumowując, metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia jest zdecydowanie lepszą interpolacją i jest zalecana do użytkowania zamiast metody Lagrange'a. Efekt Rungego w pierwszej metodzie jest niedopuszczalny w wyniku interpolacji.