Piotr Kowalczyk
Rafał Lech
Piotr Sypek

24 kwietnia 2023

# Metody numeryczne, laboratorium 5. Interpolacja.

## 1. Wstęp

Celem tego laboratorium jest przeprowadzenie analizy wybranych cech interpolacji.

Interpolacja jest to estymacja wartości badanej funkcji w obszarach między dyskretnymi punktami dla których wartości tej funkcji są znane. Przy opisie interpolacji punkty dla których wartości badanej funkcji są znane nazywane są **węzłami** interpolacji. Wspomniana estymacja wartości badanej funkcji może zostać określona poprzez wyznaczenie funkcji interpolującej. Cechą charakterystyczną funkcji interpolującej jest to, że posiada ona w węzłach interpolacji te same wartości co funkcja badana.

Na tym laboratorium analizowane będą dwa rodzaje interpolacji:

- interpolacja wielomianowa,
- interpolacja trygonometryczna.

W celu zastosowania interpolacji należy przeprowadzić dwuetapowy proces obliczeń:

1. wyznaczamy parametry funkcji interpolującej,
2. obliczamy wartości funkcji interpolującej.

Funkcja interpolacji wielomianowej obliczanej na płaszczyźnie ma postać (1). Do jej określenia należy wyznaczyć wartości wszystkich parametrów $p_{m,n}$. Liczba parametrów $p_{m,n}$ równa jest liczbie węzłów interpolacji.

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} p_{m,n} x^m y^n \tag{1}$$

Funkcja interpolacji trygonometrycznej obliczanej na powierzchni prostokąta o bokach $a$ i $b$ ma postać (2). Do jej określenia należy wyznaczyć wartości wszystkich parametrów $t_{m,n}$. Liczba parametrów $t_{m,n}$ równa jest liczbie węzłów interpolacji.

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} t_{m,n} cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \tag{2}$$

## 2. Opis hipotetycznego zadania

Zadanie polega na przeprowadzeniu analizy zastosowania interpolacji w celu opracowania mapy obrazującej poziom promieniowania jonizującego na obszarze 10000 m$^2$ w pobliżu byłej elektrowni jądrowej. Dane służące do interpolacji zostaną zebrane za pomocą autonomicznego łazika. Łazik wyposażony jest w licznik Geigera-Müllera i może poruszać się w wybranym obszarze po zadanym torze, dokonując pomiaru w dyskretnych chwilach czasu. Pomiar musi zostać dokonany szybko i w niewielkiej liczbie punktów ze względu na szkodliwy wpływ promieniowania na przyrządy pomiarowe i nawigacyjne. Z powodu nielicznego zbioru danych pomiarowych do stworzenia dokładnej mapy należy zastosować odpowiednią metodę interpolacji.

W ogólności wyznaczenie błędu interpolacji nie jest możliwe, gdyż nieznane są wartości funkcji pomiędzy węzłami interpolacji. Przed przystąpieniem do pomiarów należy przeanalizować wpływ zmiany liczby punktów pomiarowych na kształt funkcji interpolujących. Teoretycznie powyżej pewnej liczby zebranych próbek, rozkład badanej funkcji powinien się stabilizować. Zakładamy, że obszar, po którym porusza się łazik jest kwadratem, więc łazik dokona pomiaru w $K \times K$ równooddalonych punktach, gdzie $K$ oznacza liczbę pomiarów (punktów) wzdłuż jednego boku kwadratu.

# 3. Symulator

Przed przystąpieniem do realizacji zadania należy przeprowadzić symulację mającą na celu określenie jaką należy zastosować interpolację i dla jakiej liczby punktów pomiarowych. Na tym laboratorium należy opracować ten symulator oraz wykonać analizę jakości interpolacji zgodnie z procedurą opisaną w punkcie 4 tej instrukcji. Opracowanie symulatora należy rozpocząć od pobrania ze strony kursu pliku laboratorium5_kody.zip. W pliku tym zawarte są definicje następujących funkcji:

1. `[x,y,f,xp,yp]=lazik(K)`

   Funkcja `lazik` stanowi generator toru ruchu łazika oraz wartości pobranych próbek.

   - `K` - liczba punktów pomiarowych wzdłuż jednego z kierunków,
   - `x`, `y` - wektory kolumnowe reprezentujące współrzędne miejsc pobrania próbek,
   - `f` - wektor kolumnowy zawierający wartości pobranych próbek,
   - `xp`, `yp` - wektory kolumnowe reprezentujące współrzędne położenia łazika w kolejnych chwilach pobierania próbek.

2. `[p] = polyfit2d(x,y,f)`

   Funkcja `polyfit2d` wyznacza wartości współczynników $p_{m,n}$ interpolacji wielomianowej stosowanych w (1). Liczba współczynników $p_{m,n}$ jest równa liczbie węzłów interpolacji, czyli liczbie pobranych próbek ($K^2$).

   - `p` - wektor kolumnowy zawierający wartości współczynników interpolacji wielomianowej.

3. `[p] = trygfit2d(x, y, f)`

   Funkcja `trygfit2d(x,y,f)` wyznacza wartości współczynników $t_{m,n}$ interpolacji trygonometrycznej stosowanych w (2).

   - `p` - wektor kolumnowy zawierający wartości współczynników interpolacji trygonometrycznej.

4. `[FF] = polyval2d(XX,YY,p)`

   Funkcja `polyval2d` wyznacza interpolowane wartości funkcji w dowolnych punktach badanego obszaru przy zastosowaniu interpolacji wielomianowej.

   - `XX`, `YY` - macierze zawierające współrzędne punktów, w których wyznaczane będą interpolowane wartości funkcji,
   - `FF` - macierz zawierająca interpolowane wartości funkcji.

5. `[FF] = trygval2d(XX,YY,p)`

   Funkcja `trygval2d` wyznacza interpolowane wartości funkcji w dowolnych punktach badanego obszaru przy zastosowaniu interpolacji trygonometrycznej.

   - `XX`, `YY` - macierze zawierające współrzędne punktów, w których wyznaczane będą interpolowane wartości funkcji,
   - `FF` - macierz zawierająca interpolowane wartości funkcji.

Przy opracowaniu wyżej wymienionych plików założono, że współrzędne położenia łazika zostały znormalizowane, co oznacza, że $x \in [0, 1]$ oraz $y \in [0, 1]$ są wielkościami bezwymiarowymi.

# 4. Zadania do wykonania

**Zadanie 1.**

W pierwszym zadaniu należy zobrazować i przeanalizować rezultaty interpolacji wielomianowej i trygonometrycznej dla czterech wartości $K$: 5, 15, 25, 35. Tor ruchu łazika (współrzędne $x$, $y$) oraz odpowiadający mu rozkład promieniowania jonizującego (wartość $f$) należy wygenerować przy pomocy wywołania `[x,y,f,xp,yp]=lazik(K)`. Dla każdego zestawu punktów opracuj mapę rozkładu promieniowania obliczoną dla siatki $101 \times 101$ równoodległych punktów z zastosowaniem:

- interpolacji wielomianowej
  (funkcje `[p]=polyfit2d(x,y,f)` i `[FP]=polyval2d(XX,YY,p)`),
- interpolacji trygonometrycznej
  (funkcje `[t]=trygfit2d(x,y,f)` i `[FT]=trygval2d(XX,YY,t)`).

Wektor `p` zawiera współczynniki interpolacyjne a macierze `XX` oraz `YY` zawierają siatkę równoodległych punktów, w których wyznaczane są interpolowane wartości funkcji `FF`. Do wygenerowania siatki punktów `XX` oraz `YY`, należy wywołać polecenie
`[XX,YY]=meshgrid(linspace(0,1,101),linspace(0,1,101))`.

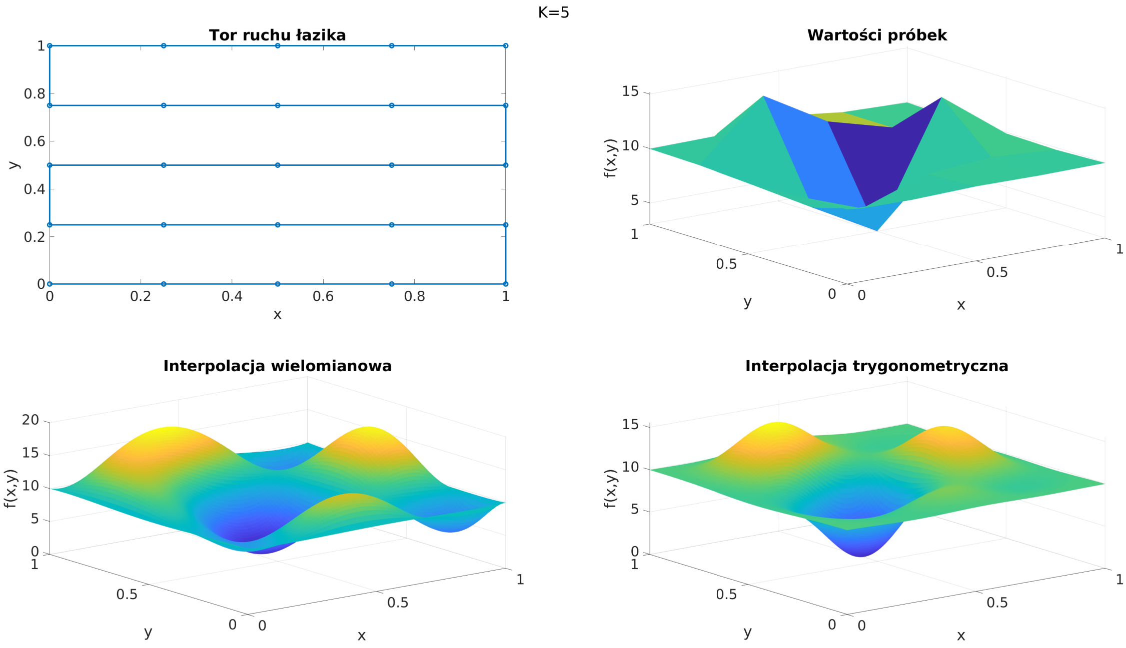
Dla każdego zestawu punktów przedstaw rezultaty interpolacji na jednym rysunku składającym się z czterech wykresów:

1. Wykres pierwszy powinien przedstawiać drogę ruchu łazika.
   Należy zastosować funkcję `plot(xp,yp,'-o','linewidth',2)`.
2. Wykres drugi powinien przedstawiać wartości pomiarów.
   Należy zastosować funkcję `surf(reshape(x,K,K),reshape(y,K,K),reshape(f,K,K))`.
3. Trzeci wykres powinien przedstawiać mapę wygenerowaną z zastosowaniem interpolacji wielomianowej (użyj funkcji `surf(XX,YY,FP)`).
4. Czwarty wykres powinien przedstawiać mapę wygenerowaną z zastosowaniem interpolacji trygonometrycznej (użyj funkcji `surf(XX,YY,FT)`).

Układ i opis wykresów powinien być wzorowany na rys. 1. Każdy wykres powinien zawierać tytuł (polecenie `title`) oraz opis osi $x$ i $y$ (polecenia `xlabel`, `ylabel`) oraz dla wykresów 3d dodatkowo opis osi $z$ (polecenie `zlabel`). Przed dodaniem do okna z wykresami pierwszego z czterech wykresów można zastosować polecenie `subplot(2,2,1)` i następnie polecenie `plot`. Przed dodaniem kolejnych wykresów należy zmienić trzeci argument polecenia `subplot`. W celu zwiększenia przejrzystości wykresów 3d można zastosować polecenie `shading flat` po poleceniu `surf`. Tytuł całego rysunku można nadać stosując np. polecenie `sgtitle('K=5')`.

Zestaw wykresów opracowany dla każdej z zadanych wartości $K$ powinien zostać zapisany do pliku w formacie png. **Nazwa pliku** powinna wskazywać dla jakiej wartości $K$ został on wygenerowany.

Porównaj otrzymane wykresy dla interpolacji wielomianowej i trygonometrycznej oraz dla różnych liczb węzłów interpolacji. Wnioski z tego porównania opisz w pliku **komentarz_zadanie_1.txt**.




Rysunek 1: Przykładowe zobrazowania rozwiązania zadania 1 dla $K = 5$

**Zadanie 2.**

Wykorzystując generator toru łazika oraz funkcje do interpolacji wielomianowej i trygonometrycznej określ optymalny rozkład punktów pomiarowych (liczbę punktów $K$) do stworzenia dokładnej mapy promieniowania jonizującego. W tym celu opracuj dla obu metod interpolacyjnych wykres zbieżności $Div(K)$ w funkcji liczby punktów pomiarowych $K$. Opracowane wykresy należy zapisać do **dwóch plików png**.

$Div(K)$ reprezentuje maksymalną różnicę pomiędzy wartościami interpolacji wyznaczonymi dla $K$ oraz $K-1$ węzłów interpolacji wzdłuż jednego kierunku próbkowania, co zapisano w (3).

$$Div(K) = max|FF_K - FF_{K-1}| \tag{3}$$

gdzie $FF_K$ oznacza wartości interpolacji wyznaczone dla $K$ węzłów interpolacji,
$FF_{K-1}$ oznacza wartości interpolacji wyznaczone dla $K-1$ węzłów interpolacji.

W Matlabie $Div(K)$ można obliczyć jako maksymalną różnicę pomiędzy elementami macierzy `F1` oraz `F2` stosując polecenie `max(max(abs(F1-F2)))`.

Do opracowania wykresów $Div(K)$ przyjmij $K$ z zakresu **od 5 do 45**. Uwaga: czas trwania obliczeń interpolowanych wartości funkcji silnie rośnie wraz ze zwiększaniem liczby punktów pomiarowych, więc całkowity czas obliczeń wymaganych do opracowania wykresów zbieżności może wynosić kilka minut.

Przeanalizuj otrzymane wyniki obliczeń. Wnioski ze swojej analizy opisz w pliku **komentarz_zadanie_2.txt**.

# 5. Podsumowanie

Całkowite sprawozdanie z laboratorium 5 powinno zawierać kody, sześć wykresów w formacie png oraz dwa pliki txt. Wymienione pliki należy skompresować do pliku zip oraz przesłać na stronę eNauczanie.