Grzegorz Fotyga
Piotr Sypek

27 maja 2023

Metody numeryczne, laboratorium 7.
Całkowanie numeryczne.

1. Wstęp

Celem laboratorium jest implementacja, porównanie dokładności i wydajności czterech metod całkowania numerycznego:

- metoda prostokątów
- trapezów
- Simpsona
- Monte Carlo

Wymagana lektura: Wykład 8: Całkowanie numeryczne.
Lektura dodatkowa:

1. Solomon, Justin. *Numerical algorithms: methods for computer vision, machine learning, and graphics.* CRC Press, 2015. (rozdział 14)

2. Szatkowski, Andrzej, and Jacek Cichosz. *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne.* 2002. (rozdział 9)

2. Prawdopodobieństwo awarii urządzenia elektronicznego

W ramach tego laboratorium badany będzie sposób wyznaczenia prawdopodobieństwa wystąpienia awarii urządzenia elektronicznego po n latach jego użytkowania. To prawdopodobieństwo zostanie wyznaczone poprzez numeryczne całkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(t)$ wystąpienia awarii rozpatrywanego urządzenia elektronicznego. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa może zostać wyznaczona na podstawie danych statystycznych i aproksymacji. W ramach tego laboratorium przyjęto, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa wystąpienia awarii urządzenia elektronicznego została opisana wzorem (1),

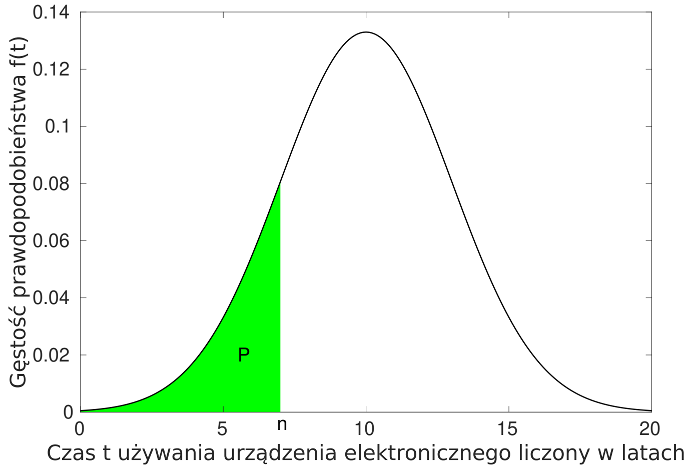
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} \tag{1}$$

gdzie $\sigma = 3$, natomiast $\mu = 10$ (wzór (1) określa funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego ze średnią μ oraz odchyleniem standardowym σ). Uwaga: w Matlabie potęga liczby Eulera, czyli e^x, może zostać obliczona przez wywołanie `exp(x)`.

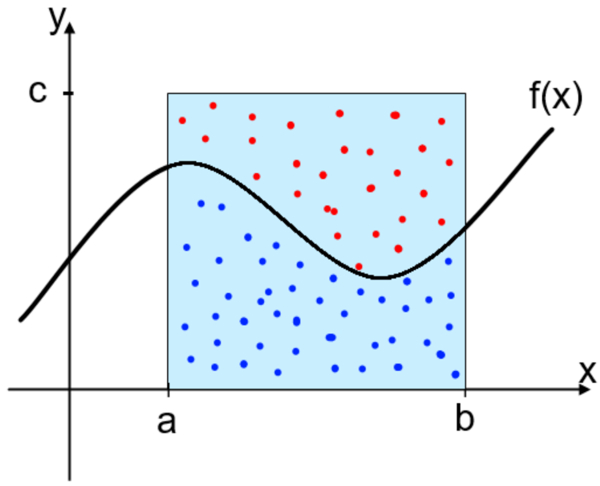
Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w n pierwszych latach używania rozpatrywanego urządzenia stanowi całkę z funkcji gęstości prawdopodobieństwa, co zapisano w (2) i przedstawiono na rys. 1,

$$P = \int_0^n f(t)dt \tag{2}$$

gdzie n jest punktem na osi czasu. Zauważ, że dla $n = 20$ prawdopodobieństwo awarii sprzętu wynosi w przybliżeniu 1, natomiast dla $n = 10$ prawdopodobieństwo wynosi ok. 0,5.



Rysunek 1: Wartość całki oznaczonej w przedziale $[0, n]$ jest równa polu powierzchni obszaru zaznaczonego na zielono



Rysunek 2: Ilustracja działania metody Monte Carlo

3. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo została stworzona przez polskiego matematyka Stanisława Ulama, przedstawiciela lwowskiej szkoły matematycznej, w celu wykonania symulacji zachowania neutronów, która była wymagana w czasie prac nad amerykańską pierwszą bombą wodorową realizowanych w Los Alamos. Nazwa (kryptonim) Monte Carlo nawiązuje do nazwy kasyna w Monaco. Metoda ta umożliwia m.in. obliczanie wartości całki funkcji, której nie da się wyznaczyć standardowymi metodami.

Kolejne etapy obliczeń w metodzie Monte Carlo są następujące:

- Na wstępie obszar całkowania zostaje ograniczony figurą, której pole powierzchni S można łatwo policzyć. Jeśli obliczana jest całka funkcji $f(x)$ przedstawionej na rys. 2 i wybraną figurą jest prostokąt, to dolny bok prostokąta pokrywa się z osią x, natomiast górny bok powinien znajdować się nieznacznie powyżej lub co najwyżej na wysokości maksymalnej wartości funkcji $f(x)$ dla $x \in [a, b]$.

- W drugim etapie obliczeń, przy całkowaniu funkcji jednej zmiennej, następuje wylosowanie N punktów należących do powierzchni wybranej figury. Przybliżona wartość całki funkcji jednej zmiennej wyznaczona metodą Monte Carlo została zapisana w (3), przy czym N_1 oznacza liczbę wszystkich wylosowanych punktów, które znalazły się pod krzywą $f(x)$.

$$P = \frac{N_1}{N} S \tag{3}$$

- Analogicznie używa się metody Monte Carlo do całkowania funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$. W takiej sytuacji bryłą ograniczającą obszar całkowania może być prostopadłościan. Wzór (4) określa przybliżoną wartość całki funkcji dwóch zmiennych wyznaczonej metodą Monte Carlo,

$$P = \frac{N_1}{N} V \tag{4}$$

gdzie N_1 jest liczbą wylosowanych punktów znajdujących się pod powierzchnią funkcji $f(x, y)$,
N jest liczbą wszystkich wylosowanych punktów,
V jest objętością bryły (np. prostopadłościanu) ograniczającej przestrzeń całkowania.

4. Zadania do wykonania

1. (80%) Celem pierwszego zadania jest przeanalizowanie dokładności i czasu numerycznego całkowania zastosowanego do wyznaczenia prawdopodobieństwa wystąpienia awarii urządzenia elektronicznego w **pięciu pierwszych latach** jego użytkowania ($n = 5$). Do numerycznego wyznaczenia całki (2) dla gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ określonej w (1) należy zastosować cztery metody całkowania wymienione w p. 1. Etapy realizacji zadania:

   - Ze strony kursu pobierz i rozpakuj plik laboratorium7_kody.zip.
   - Zdefiniuj funkcję, która wyznacza wartość gęstości prawdopodobieństwa zgodnie z (1). W celu weryfikacji poprawności napisanego kodu wygeneruj wykres gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$. Do wykresu dodaj odpowiedni opis oraz zapisz go do pliku **gestosc.png**.
   - Zaimplementuj cztery algorytmy całkowania numerycznego wymienione w p. 1 i zastosuj opracowane implementacje do wyznaczenia całki zdefiniowanej w (2). Opis wymaganych algorytmów znajduje się na stronie kursu w pliku Wyklad8_pl.pdf. Wartość całki powinna zależeć od parametru N określającego dokładność całkowania. W przypadku metody Monte Carlo N oznacza liczbę wylosowanych punktów, natomiast dla pozostałych trzech metod N jest równe liczbie przedziałów całkowania.
   - Dla każdej z czterech metod numerycznego całkowania wyznacz błąd całkowania w funkcji wartości N zdefiniowanych w matlabie jako `N = 5:50:10^4`. Błąd całkowania należy wyznaczyć poprzez porównanie z wartością referencyjną całki, którą zapisano w pliku *P_ref.mat*. Błąd całkowania przedstaw na jednym wykresie zawierającym cztery krzywe lub na czterech osobnych wykresach. Błąd całkowania powinien być przedstawiony w **skali logarytmicznej**.
   - Przedstaw na wykresie wygenerowanym przez polecenie **`bar`** czasy całkowania numerycznego czterema badanymi metodami dla $N = 10^7$.
   - Skomentuj otrzymane wyniki w pliku **zadanie_a.txt**.

   Uwagi:

   (a) Zadanie dotyczy prawdopodobieństwa i z założenia obarczone jest pewnym błędem. Z tego względu, z praktycznego punktu widzenia nie jest konieczne otrzymanie wyników całkowania z wysoką dokładnością. Jednakże w ramach tego laboratorium analizowane są główne cechy metod całkowania numerycznego, a więc również dokładność obliczeń.

   (b) Każdy wykres powinien zawierać tytuł (polecenie **`title`**) oraz opis osi x (polecenie **`xlabel`**) oraz osi y (polecenie **`ylabel`**).

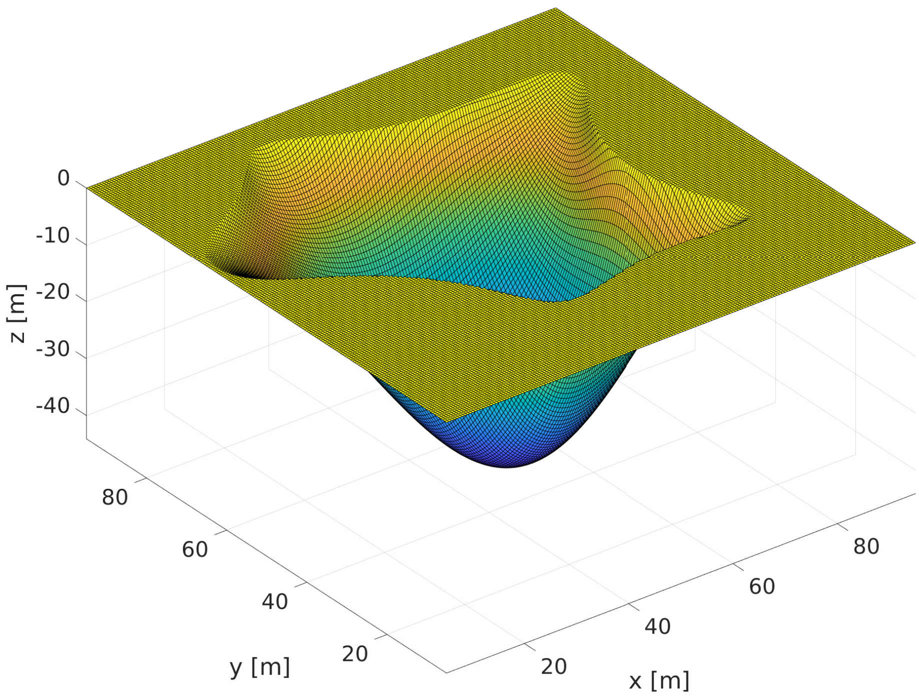
   (c) Wykresy błędu całkowania powinny posiadać osie x i y w skali logarytmicznej, co można osiągnąć np. stosując polecenie **`loglog`**.

   (d) Wykresy błędu całkowania można przedstawić na jednym rysunku. W takiej sytuacji należy opisać krzywe stosując polecenie **`legend`**.

   (e) W tym zadaniu przy całkowaniu numerycznym metodą Monte Carlo obszar, z którego losowane będą punkty, można określić na podstawie wykresu całkowanej funkcji (rys. 1).

2. (20%) Drugie zadanie dotyczy całkowania numerycznego funkcji dwóch zmiennych za pomocą metody Monte Carlo, w celu obliczenia objętości zbiornika wodnego[1]. Załóżmy, że głębokość zbiornika wyznaczono w wybranych punktach, a następnie aproksymowano otrzymane dane, tak, żeby uzyskać przybliżony kształt dna w każdym punkcie (rys. 3). Maksymalna głębokość jeziora wynosi około 44 metry. Otocz obszar całkowania bryłą: $x \in [0, 100]$, $y \in [0, 100]$ i $z \in [-50, 0]$. Wylosuj $N = 10^5$ punktów w obrębie zdefiniowanej bryły $p_i(x, y, z)$. Wyznacz liczbę punktów, które leżą **NAD** powierzchnią dna. Oblicz przybliżoną objętość zbiornika korzystając z wzoru (4).

   Głębokość zbiornika w punkcie (x, y) należy obliczyć za pomocą funkcji `z = glebokosc(x,y)`. Rezultat obliczeń, czyli przybliżoną objętość zbiornika, zapisz w pliku **zadanie_b.txt**. Punkty za realizację tego zadania zależą zarówno od rezultatu obliczeń jak i od poprawności implementacji metody Monte Carlo i sposobu jej zastosowania w obliczeniach. Kod opracowany do realizacji tego zadania powinien zostać umieszczony w pliku **zadanie_b.m**.



Rysunek 3: Aproksymowane położenie dna jeziora

5. Podsumowanie

Całkowite sprawozdanie z laboratorium 7 powinno zawierać kody, wykresy w formacie png (trzy lub sześć) oraz dwa pliki txt. Wymienione pliki należy skompresować do pliku zip oraz przesłać na stronę eNauczanie.

[1] *Fabuła* zadania dotyczy objętości, ponieważ wyniki w tym przypadku są łatwe do interpretacji. Jednak metodę Monte Carlo stosuje się w sposób analogiczny do analizy wielu innych, bardziej złożonych zagadnień.