Grzegorz Fotyga
Piotr Sypek

16 maja 2023

Metody numeryczne, laboratorium 6. Aproksymacja.

1. Wstęp

Celem tego laboratorium jest przeprowadzenie analizy wybranych cech aproksymacji. W metodach numerycznych aproksymacja oznacza wyznaczenie przybliżenia liczby lub funkcji matematycznej. Funkcja aproksymująca może przybliżać zmienność bardziej złożonej funkcji lub zbioru danych.

Funkcja aproksymująca f_a wyznaczona dla dyskretnego zbioru danych złożonego z argumentów x_i oraz wartości funkcji aproksymowanej $f(x_i)$ może lecz nie musi zachowywać zależność $f_a(x_i) = f(x_i)$. Stanowi to istotną różnicę w porównaniu do interpolacji, która w węzłach interpolacji przyjmuje wartości równe wartościom interpolowanym (wejściowym).

Na tym laboratorium analizowane będą dwa rodzaje aproksymacji:

- aproksymacja wielomianowa,
- aproksymacja trygonometryczna.

Funkcja aproksymacji wielomianowej ma postać (1), gdzie N oznacza rząd aproksymacji.

$$\Phi_p(n) = c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 + \cdots + c_N n^N \tag{1}$$

Funkcja aproksymacji trygonometrycznej ma postać (2), gdzie N również oznacza rząd aproksymacji.

$$\Phi_t(n) = c_0 + c_1 \cdot cos(n) + c_2 \cdot cos(2n) + \cdots + c_N cos(Nn) \tag{2}$$

Rząd aproksymacji może być znacznie mniejszy od liczby danych dla których wyznaczana jest funkcja aproksymująca. W tej instrukcji tę liczbę danych oznaczono przez literę `M`.

2. Zadania do wykonania

1. Uczestniczysz w projekcie, którego celem jest stworzenie systemu do pomiarów różnych wielkości fizycznych (temperatura, wilgotność, natężenie dźwięku itp.) oraz mocy sygnału sieci bezprzewodowych (Wi-Fi, Zig-Bee, GSM itp.) wewnątrz pomieszczeń. System składa się z:
   - drona wyposażonego w odpowiednie czujniki,
   - systemu lokalizacji drona (3 anteny, położenie drona jest wyznaczane poprzez pomiar mocy sygnału z każdej z anten),
   - serwera zbierającego dane pomiarowe. Na bazie wyznaczonej trajektorii drona tworzona jest mapa rozkładu danej wielkości (np. mocy sygnału Wi-Fi) wewnątrz badanego pomieszczenia.

2. Dron określa swoje położenie w równych odstępach czasu bazując na systemie lokalizacji, jednak proces ten jest obarczony błędem ok. 5%. Jego symulowane położenie mierzone w krótkich odstępach czasu zawiera plik **trajektoria1.mat**, który został udostępniony na stronie kursu na portalu eNauczanie w pliku laboratorium6_kody.zip. Kod realizujący zadanie opisane w tym punkcie można dodać do udostępnionego pliku `zadanie2.m`. Na wstępie wykreśl położenie drona stosując polecenia `plot3(x,y,z,'o')`, `grid on`, `axis equal`. Wektor `n` o długości `M` zawiera chwile czasu, w których była wyznaczana pozycja drona. Wektory `x`, `y`, `z` określają położenie drona wyrażone w **metrach**. Otrzymany w tym punkcie wykres nie musi zostać zapisany do pliku png (nie jest wymagany w sprawozdaniu).

3. Twoje główne zadanie polega na wyznaczeniu postaci funkcji przybliżającej położenie drona. Czy lepiej jest w takiej sytuacji korzystać z interpolacji, czy aproksymacji? Odpowiedź na to pytanie, wraz z uzasadnieniem, zapisz w pliku tekstowym o nazwie **zadanie3.txt**.

4. Do aproksymacji położenia drona zastosuj aproksymację wielomianową, której rząd wynosi 60. Początek wymaganych w tym punkcie obliczeń znajduje się w komentarzu zawartym w pliku `zadanie2.m`, w którym aproksymacja współrzędnej x położenia drona jest wyznaczona przez wywołanie `xa = aproksymacjaWielomianowa(n,x,N)`. W kolejnych obliczeniach należy aproksymować współrzędne y oraz z położenia drona.

   Przedstaw na jednym wykresie trajektorię drona bazującą na lokalizacji (zastosuj polecenie `plot3(x,y,z,'o')`) i aproksymowaną (polecenie `plot3(_,_,_,'g','lineWidth',4)`, podkreślenia zastąp nazwami odpowiednich zmiennych). Dodanie wielu krzywych do jednego wykresu można otrzymać poprzez zastosowanie polecenia `hold on` pomiędzy wywołaniami `plot3`. Ten i kolejne wykresy powinny zawierać tytuł (polecenie `title`) oraz opis osi x i y (polecenia `xlabel`, `ylabel`). Dla wykresów 3d należy również dodać opis osi z (polecenie `zlabel`). Przy dodawaniu opisu osi wykresów należy pamiętać o jednostkach, np. czy odległość wyrażona jest w metrach czy milimetrach ([m], [mm]). Zapisz otrzymany w tym punkcie wykres w pliku o nazwie **zadanie4.png**.

5. Osoba z zespołu odpowiedzialna za testy systemu zauważyła, że dla trajektorii o mniejszej liczbie węzłów pomiarowych (większych odstępach czasu) algorytm powoduje powstawanie dużych błędów. Twoje kolejne zadanie polega na znalezieniu takiego `N`, przy którym błąd określenia lokalizacji drona jest najmniejszy, w sytuacji gdy wykonano tylko 151 pomiarów.

   Wykreśl położenie drona (lokalizacja i aproksymacja, analogicznie jak w zadaniu 4) dla danych z pliku **trajektoria2.mat** oraz dla rzędu aproksymacji `N = 60`. Zapisz wykres w pliku o nazwie **zadanie5a.png**.

   Do oceny, którego rzędu aproksymacja lepiej przybliża rzeczywistą trajektorię drona można w obliczeniach wyznaczyć wartość błędu średniokwadratowego zdefiniowanego pomiędzy położeniem zmierzonym a aproksymowanym. Błąd ten będzie liczony osobno dla współrzędnych x, y, z, zgodnie ze wzorem (3). Wartość err opisuje średnią odległość trajektorii aproksymowanej od zmierzonej.

$$err = err_x + err_y + err_z \tag{3}$$

$$err_\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} (\sigma_i - \sigma_i^{apr})^2}}{M} \tag{4}$$

   gdzie $\sigma \in \{x, y, z\}$,
   σ_i oznacza współrzędne zmierzonych lokalizacji drona,
   σ_i^{apr} oznacza współrzędne aproksymowane,
   M oznacza liczbę pomiarów lokalizacji drona.

   Opracuj wykres błędu err w zależności od rzędu aproksymacji `N` $\in [1, 71]$. Wykres powinien zawierać opis osi oraz tytuł. Zapisz wykres błędu w pliku o nazwie **zadanie5b.png**.

6. Ostatnie zadanie polega na sprawdzeniu działania aproksymacji trygonometrycznej dla badanego zbioru danych. Na wstępie realizacji tego zadania należy dokończyć implementację aproksymacji trygonometrycznej.

Przy opracowaniu kodu należy uwzględnić poniższe informacje:

- Baza funkcji: $\phi_0(n) = 1$, $\phi_1(n) = cos(n)$, $\phi_2(n) = cos(2n)$, $\ldots$, $\phi_N(n) = cos(Nn)$.
- Współczynniki $\boldsymbol{c}$ stosowane w (2) wyznaczane są za pomocą układu równań (5)

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{t} \tag{5}$$

gdzie

$$t_k = \sum_{i=1}^{M} \phi_k(n_i) \cdot x_i \tag{6}$$

$$S_{kl} = \sum_{i=1}^{M} \phi_k(n_i) \cdot \phi_l(n_i) \tag{7}$$

- Postać wektora $\boldsymbol{t}$ jest już wyznaczona w funkcji `aproksymacjaTrygonometryczna`.
- Należy napisać algorytm generujący macierz $\boldsymbol{S}$, a następnie użyć odpowiedniej metody do rozwiązania (5) w celu wyznaczenia wektora $\boldsymbol{c}$.
- Do wyznaczenia macierzy $\boldsymbol{S}$ można zastosować dwie pętle, które będą iterować po wierszach i kolumnach tej macierzy. Ze względów wydajnościowych warto w pętli wewnętrznej zastosować polecenie **`sum`**, podobnie jak to zostało określone przy wyznaczaniu $\boldsymbol{t}$ w funkcji `aproksymacjaTrygonometryczna`.

W ramach realizacji tego zadania należy wykonać następujące prace:

- Opracuj dla aproksymacji trygonometrycznej wykres analogiczny do wykresu zapisanego w pliku `zadanie5a.png`. Zapisz ten wykres w pliku **zadanie6a.png**.
- Opracuj dla aproksymacji trygonometrycznej wykres analogiczny do wykresu zapisanego w pliku `zadanie5b.png`. Zapisz ten wykres w pliku **zadanie6b.png**.
- Opracuj dla aproksymacji trygonometrycznej wykres analogiczny do wykresu zapisanego w pliku `zadanie6a.png`, jednak ze zmienioną wartością rzędu, który powinien wynosić 150. Zapisz ten wykres w pliku **zadanie6c.png**. W pliku **zadanie6.txt** zapisz swoje odpowiedzi na następujące pytania:
  (a) Jaka jest różnica pomiędzy interpolacją danych zawierających 151 wartości oraz ich aproksymacją, gdy rząd aproksymacji wynosi 150?
  (b) Czy dla aproksymacji trygonometrycznej występuje efekt Rungego?

3. Podsumowanie

Całkowite sprawozdanie z laboratorium 6 powinno zawierać kody, sześć wykresów w formacie png oraz dwa pliki txt. Wymienione pliki należy skompresować do pliku zip oraz przesłać na stronę eNauczanie.