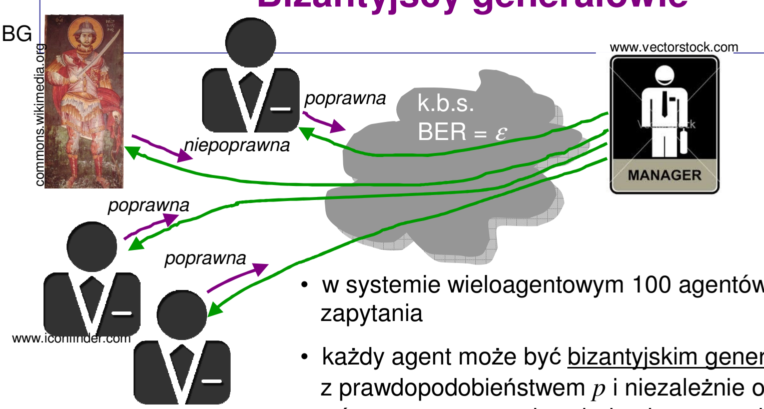
Metody probabilistyczne w informatyce

Wykład

Jerzy Konorski
Katedra Teleinformatyki
pok. 139, jekon@eti.pg.edu.pl, tel. 58 347 2123

Bizantyjscy generałowie



- w systemie wieloagentowym 100 agentów odpowiada na zapytania
- każdy agent może być bizantyjskim generałem (BG) z prawdopodobieństwem p i niezależnie od pozostałych; wówczas zawsze odpowiada niepoprawnie
- aby **ocenić liczbę BG**, Manager rozsyła zapytanie testowe (zna poprawną odpowiedź tak/nie)
- obserwuje liczbę niepoprawnych odpowiedzi
- kanał bezpamięciowy symetryczny przekłamuje z prawdopodobieństwem ε

POLITECHNIKA GDAŃSKA WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Bizantyjscy generałowie

- Korzystamy z **twierdzenia Bayesa**

POLITECHNIKA GDAŃSKA WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Zasada maksimum wiarygodności

- *hipotezy* $H_1,\ldots,H_n$ – układ zupełny zdarzeń
- zaobserwowano zdarzenie A
- $P(A \mid H_i)$ możliwe do policzenia
- którą hipotezę przyjąć?

- **zasada maksimum wiarygodności**: wybór na podstawie

$$\Rightarrow \max_i P(A \mid H_i)$$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Twierdzenie Bayesa

uwaga, prawo Stiglera!

- *hipotezy* $H_1,\dots, H_n$ – układ zupełny zdarzeń
- $P(H_i)$ *prawdopodobieństwa á priori* znane
- zaobserwowano zdarzenie A
- $P(A \mid H_i)$ łatwe do policzenia
- którą hipotezę przyjąć?

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Twierdzenie Bayesa

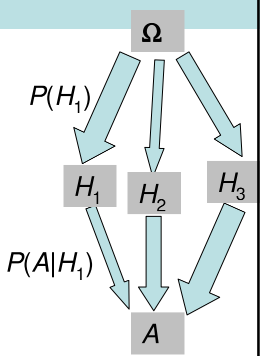
uwaga, prawo Stiglera!

- *hipotezy* $H_1,\dots, H_n$ – układ zupełny zdarzeń
- $P(H_i)$ *prawdopodobieństwa á priori* znane
- zaobserwowano zdarzenie A
- $P(A \mid H_i)$ łatwe do policzenia
- którą hipotezę przyjąć?
- **podejście Bayesa**: wybór na podstawie

$$\max_i P(H_i \mid A) \leftarrow$$ *prawdopodobieństwa á posteriori*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}, \; i = 1,\dots,n$$

= $P(A)$, tylko normalizacja!



~ udział miary odpowiedniej "ścieżki dotarcia"

Toolkit

Twierdzenie Bayesa

uwaga, prawo Stiglera!

- $P(H_i \mid A) \sim P(A \mid H_i)$ wiarygodność
  $\sim P(H_i)$ wiedza aprioryczna

Np. sygnały z kosmosu! Pulsar vs. Obcy?

- obserwacje kolejnych <u>niezależnych</u> zdarzeń A, B, C, ...
  dają kolejne przybliżenia do "doskonałej wiedzy *á posteriori*",
  tj. $P(H_i \mid A)$ jako á priori przy obserwacji B itd.

- problem z $P(H_i)$ – skąd brać?

Toolkit

Twierdzenie Bayesa

uwaga, prawo Stiglera!

- $P(H_i \mid A) \sim P(A \mid H_i)$ wiarygodność
  $\sim P(H_i)$ wiedza aprioryczna

Np. sygnały z kosmosu! Pulsar vs. Obcy?

- obserwacje kolejnych <u>niezależnych</u> zdarzeń A, B, C, ...
  dają kolejne przybliżenia do "doskonałej wiedzy *á posteriori*",
  tj. $P(H_i \mid A)$ jako á priori przy obserwacji B itd.

- problem z $P(H_i)$ – skąd brać?
  "aksjomatyści" – z wiedzy apriorycznej, modeli
  "frekwentyści"… radzą nie pamiętać "wzoru Bayesa"!
  - tylko korzystać z zasady maksimum wiarygodności
  i tak definiować A, by $P(A \mid H_i)$ miało wyraźne maksimum w funkcji i

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Twierdzenie Bayesa

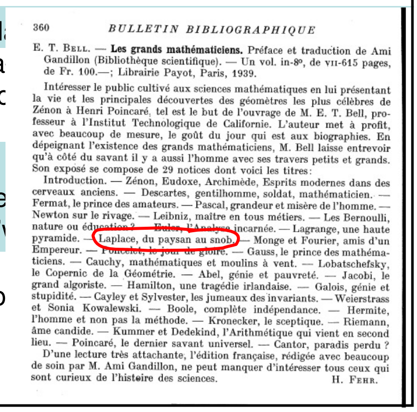
uwaga, prawo Stiglera!

- $P(H_i \mid A)$ ~ $P(A \mid H_i)$ wiarygodność
  ~ $P(H_i)$ wiedza aprioryczna

Np. sygnały z kosmosu! Pulsar vs. Obcy?

- obserwacje kolejnych <u>niezależnych</u> zd
  dają kolejne przybliżenia do "doskona
  tj. $P(H_i \mid A)$ jako á priori przy obserwac

- problem z $P(H_i)$ – skąd brać?
  "aksjomatyści" – z wiedzy aprioryczne
  "frekwentyści"… radzą nie pamiętać "
  - tylko korzystać z zasady maksimum
  i tak definiować A, by $P(A \mid H_i)$ miało



360 *BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE*

E. T. Bell. — **Les grands mathématiciens.** Préface et traduction de Ami Gandillon (Bibliothèque scientifique). — Un vol. in-8°, de VII-615 pages, de Fr. 100.—; Librairie Payot, Paris, 1939.

Intéresser le public cultivé aux sciences mathématiques en lui présentant la vie et les principales découvertes des géomètres les plus célèbres de Zénon à Henri Poincaré, tel est le but de l'ouvrage de M. E. T. Bell, professeur à l'Institut Technologique de Californie. L'auteur met à profit, avec beaucoup de mesure, le goût du jour qui est aux biographies. En dépeignant l'existence des grands mathématiciens, M. Bell laisse entrevoir qu'à côté du savant il y a aussi l'homme avec ses travers petits et grands. Son exposé se compose de 29 notices dont voici les titres:

Introduction. — Zénon, Eudoxe, Archimède, Esprits modernes dans des cerveaux anciens. — Descartes, gentilhomme, soldat, mathématicien. — Fermat, le prince des amateurs. — Pascal, grandeur et misère de l'homme. — Newton sur le rivage. — Leibniz, maître en tous métiers. — Les Bernoulli, nature ou éducation ? — Euler, l'Analyse incarnée. — Lagrange, une haute pyramide. — Laplace, du paysan au snob. — Monge et Fourier, amis d'un Empereur. — Poncelet, le jour de gloire. — Gauss, le prince des mathématiciens. — Cauchy, mathématiques et moulins à vent. — Lobatschefsky, le Copernic de la Géométrie. — Abel, génie et pauvreté. — Jacobi, le grand algoriste. — Hamilton, une tragédie irlandaise. — Galois, génie et stupidité. — Cayley et Sylvester, les jumeaux des invariants. — Weierstrass et Sonia Kowalewski. — Boole, complète indépendance. — Hermite, l'homme et non pas la méthode. — Kronecker, le sceptique. — Riemann, âme candide. — Kummer et Dedekind, l'Arithmétique qui vient en second lieu. — Poincaré, le dernier savant universel. — Cantor, paradis perdu ?

D'une lecture très attachante, l'édition française, rédigée avec beaucoup de soin par M. Ami Gandillon, ne peut manquer d'intéresser tous ceux qui sont curieux de l'histoire des sciences.

H. Fehr.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Bizantyjscy generałowie

- Korzystamy z **twierdzenia Bayesa**
  - **układ zupełny** hipotez: H_i = w systemie jest i BG, i = 0..100
  - <u>prawdopodobieństwa á priori</u> $H_i : P(H_i) = P(\underline{B}_{100,p} = i) = b_{100,p}(i)$
  - zapytanie generuje wielkość losową $\underline{R} \in \{0..100\}$: # niepoprawnych odpowiedzi (<u>zdarzenie zaobserwowane</u>: $\underline{R} = k$)

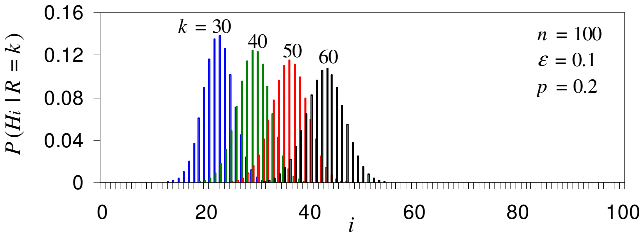
Bizantyjscy generałowie

- Korzystamy z **twierdzenia Bayesa**
  - **układ zupełny** hipotez: H_i = w systemie jest i BG, i = 0..100
  - prawdopodobieństwa á priori H_i : $P(H_i) = P(\underline{B}_{100,p} = i) = b_{100,p}(i)$
  - zapytanie generuje wielkość losową $\underline{R} \in$ {0..100}: # niepoprawnych odpowiedzi (zdarzenie zaobserwowane: $\underline{R} = k$)
  - wiarygodność H_i : $$P(\underline{R} = k \mid H_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ k-j=0..100-i}}^{i} b_{i,1-\varepsilon}(j) b_{100-i,\varepsilon}(k-j)$$

j BG nie doznało przekłamania,
$k - j$ uczciwych agentów doznało

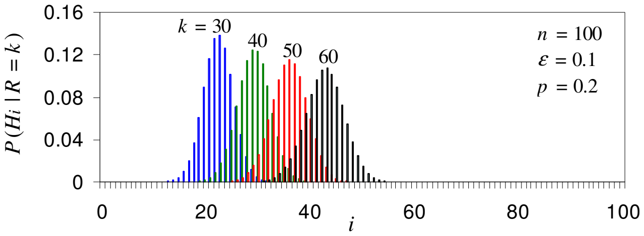
  - prawdopodobieństwa á posteriori: $$P(H_i \mid \underline{R} = k) = \frac{P(\underline{R} = k \mid H_i) P(H_i)}{\sum_{l=0}^{100} P(\underline{R} = k \mid H_l) P(H_l)}$$

Bizantyjscy generałowie



mniejsza liczba niepoprawnych odpowiedzi faworyzuje mniejsze liczby BG i zmniejsza niepewność

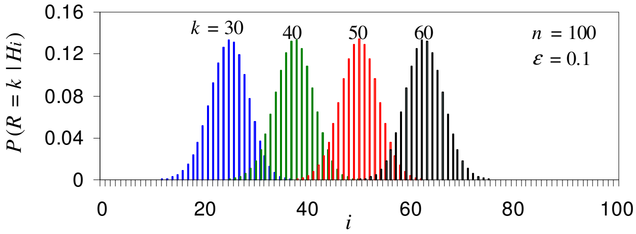
Bizantyjscy generałowie



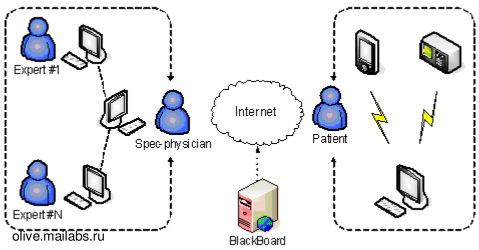
mniejsza liczba niepoprawnych odpowiedzi faworyzuje mniejsze liczby BG i zmniejsza niepewność

- …tymczasem według **zasady maksimum wiarygodności** należy porównywać $P(\underline{R} = k \mid H_i)$ dla różnych i

wskutek niewykorzystania znajomości p domniemania koncentrują się bliżej $i = k$

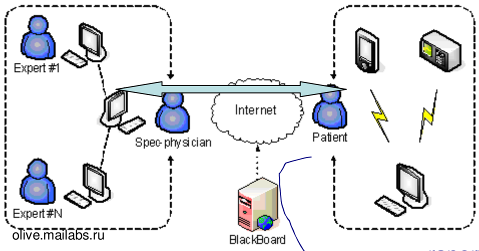


System reputacyjny Beta



- interakcje agentów z klientami w celu świadczenia usług
- agenci: eksperci / węzły sieci / inteligentne urządzenia / wirtualni operatorzy /…
- usługi dla klientów: transfer danych / wyszukiwanie informacji / dostęp do zasobów / ekspertyzy / pośrednictwo /…
- wymagania: rosnące (złożoność, QoS, bezpieczeństwo, …)
- potrzebny: system budowy zaufania

System reputacyjny Beta



raport o satysfakcji
WYSOKA / NISKA

Centrum Reputacji

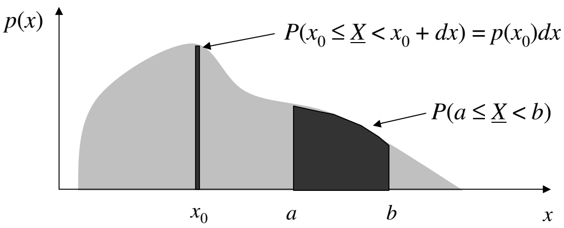
Model agenta ("eksperta"):

- rzetelność z
  $= P$(dostarcza usługi dające WYSOKĄ satysfakcję)
- potrzebujemy rozkładu prawdopodobieństwa z - ciągła wielkość losowa!

Gęstość prawdopodobieństwa

- **wielkości losowe ciągłe**

- Czy istnieje funkcja $p(x) \geq 0$ taka, że $P(a \leq \underline{X} \leq b) = \int_a^b p(x)dx$?



$$p(x) = \frac{P(x \leq \underline{X} < x + dx)}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = P(-\infty < \underline{X} < \infty) = 1$$

warunek normalizacyjny

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Dystrybuanta

- **dystrybuanta** (funkcja rozkładu): $F(x) = P(\underline{X} < x)$
  - niemalejąca
  - lewostronnie ciągła
  - $F(x) = 0$, $F(x) = 1$ na krańcach dziedziny

- **komplementarna dystrybuanta**: $C(x) = 1 - F(x) = P(\underline{X} \geq x)$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

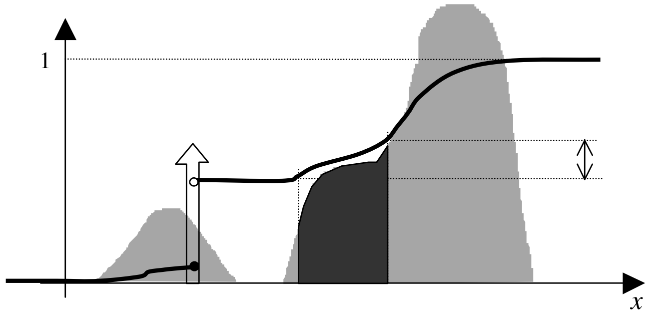
Dystrybuanta

związki między p, F i C

$$p(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$$

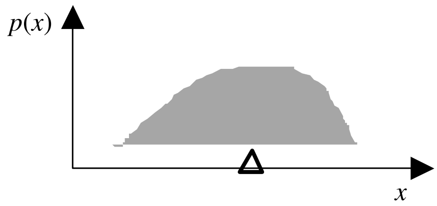
$$C(x) = \int_{x}^{\infty} p(u)du$$



Toolkit

Wartość średnia
ciągłej wielkości losowej

$$E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$



Toolkit

Wartość średnia
ciągłej wielkości losowej

- Rozkład…

  - wykładniczy: $E\underline{X} = \int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x/m} / m \cdot dx = m$

  - normalny $N(m,\sigma)$: $E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = m$

    $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

  - Pareto: $p(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{b}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1}, & x \geq a \end{cases}$

  - itd.

Wartość średnia
ciągłej wielkości losowej

- Czy wartość średnia jest…
  - najbardziej prawdopodobna? r. wykładniczy !
  - skończona? r. Pareto, $b \le 1$!

$$E\underline{X} = \int_a^\infty x \frac{b}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b-1}$$

- Czy wartość średnia zawsze istnieje?

$$E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

rozkład Cauchy'ego

Twierdzenie o średniej warunkowej

- Analogicznie do prawdopodobieństwa całkowitego:

$$\Rightarrow \quad E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} E\underline{X}_{|y} \cdot p_Y(y) dy$$

wartość średnia warunkowego rgp $p_X(x|y)$

Twierdzenie o średniej warunkowej

Z tw. o średniej warunkowej możemy wywnioskować:

- $E(a\underline{X} + b\underline{Y} + c) = aE\underline{X} + bE\underline{Y} + c$
  w szczególności:
  $E(\underline{X} + \underline{Y} + \ldots) = E\underline{X} + E\underline{Y} + \ldots$

$$E(a\underline{X}+b) = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)\cdot p(x)dx = aE\underline{X}+b$$

(E – operator liniowy!)

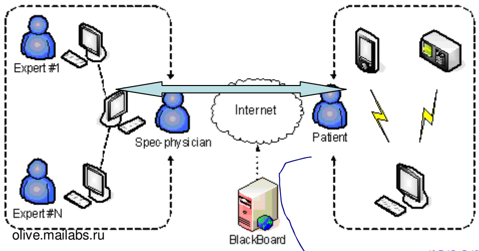
Wartość średnia: uogólnienie

- Dla dowolnego przekształcenia g : $Eg(\underline{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p(x)dx$

Z tw. o średniej warunkowej:

- $\underline{X}$, $\underline{Y}$ niezależne $\Rightarrow E(g(\underline{X})\cdot g(\underline{Y})) = Eg(\underline{X})\cdot Eg(\underline{Y})$ (tylko $\Rightarrow$!)
  w szczególności $E(\underline{X}\cdot\underline{Y}) = E\underline{X}\cdot E\underline{Y}$

System reputacyjny Beta



raport o satysfakcji
WYSOKA / NISKA

Centrum Reputacji

Model agenta ("eksperta"):

- rzetelność z
  = P(dostarcza usługi dające WYSOKĄ satysfakcję)
- potrzebujemy rozkładu prawdopodobieństwa z - ciągła wielkość losowa!
- statystyczna niezależność zachowań w kolejnych interakcjach
- $\Rightarrow$ liczby $\underline{W}$ i $\underline{N}$ raportów o WYSOKIEJ i NISKIEJ satysfakcji klientów z usług tego agenta są **wielkościami losowymi Bernoulliego**
- gdy $\underline{W} = w$ i $\underline{N} = n$, ocena agenta = $z^*(w,n)$

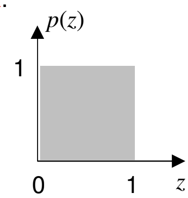
System reputacyjny Beta

Do wypracowania oceny z^* wykorzystuje się **twierdzenie Bayesa**.

Odnośnie z mamy ciągły **układ zupełny** hipotez: $z \in [0,1]$.

Przyjmijmy jednakowe prawdopodobieństwa á priori: $p(z) = const.$

Zdarzenie zaobserwowane: $\underline{W} = w$, $\underline{N} = n$



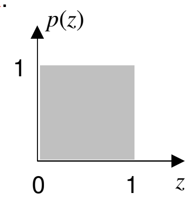
System reputacyjny Beta

Do wypracowania oceny z^* wykorzystuje się **twierdzenie Bayesa**.

Odnośnie z mamy ciągły **układ zupełny** hipotez: $z \in [0,1]$.

Przyjmijmy jednakowe prawdopodobieństwa á priori: $p(z) = const.$

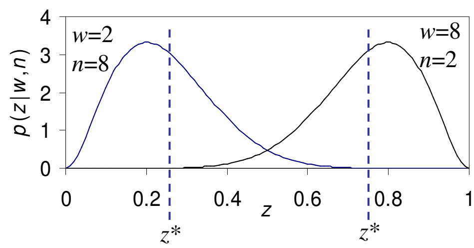
Zdarzenie zaobserwowane: $\underline{W} = w$, $\underline{N} = n$



$$p(z\,|\,w,n) = \frac{P(\underline{W}=w,\underline{N}=n\,|\,z)\,p(z)}{\int_0^1 P(\underline{W}=w,\underline{N}=n\,|\,x)\,p(x)dx} = \frac{\binom{w+n}{w} z^w (1-z)^n}{\underbrace{\int_0^1 \binom{w+n}{w} x^w (1-x)^n dx}_{= 1/_{w+n+1}}}$$

$$= \frac{(w+n+1)!}{w!n!} z^w (1-z)^n = Beta_{w,n}(z)$$

System reputacyjny Beta



rozkład beta

- Ocena z:

$$z^*(w,n) = \underset{|w,n}{E}\,Z = \int_0^1 z \cdot p(z\,|\,w,n)dz = \frac{w+1}{w+n+2}$$

System reputacyjny Beta

Problem: niektórzy klienci mogą być <u>nieuczciwi</u> i składać fałszywe raporty, np.:

- "oszczerca": wysoką satysfakcję raportuje jako WYSOKĄ w 50% przypadków
- "wspólnik": niską satysfakcję raportuje jako NISKĄ w 50% przypadków

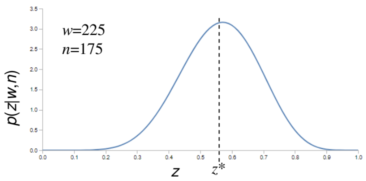
Przykład

- rzetelność eksperta Jana K. wynosi z = 0.6
- klienci $i \in I$ składają raporty nt. Jana K.
- po 40 rundach składania raportów:

klient i	w_i	n_i
1	15	25
2	30	10
3	22	18
4	25	15
5	24	16
6	23	17
7	19	21
8	25	15
9	20	20
10	22	18
suma	225	175
ocena $z^*(I)$	0.56	

"oszczerca"?

"wspólnik"?



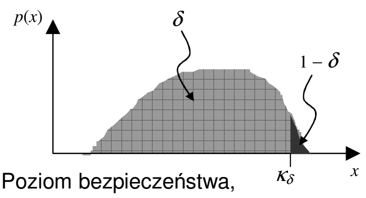
Jak Centrum Reputacji ma eliminować efekty raportów nieuczciwych klientów?

Z wykorzystaniem **kwantyli rozkładu** !

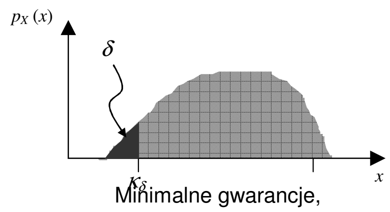
Kwantyle rozkładu

- Równanie $F(x) = P(\underline{X} < x) = u$

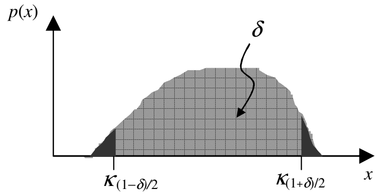
$\Rightarrow x = \kappa_u$ **kwantyl rzędu u** rozkładu $\underline{X}$!



Poziom bezpieczeństwa, ryzyko przekroczenia = 1 – δ

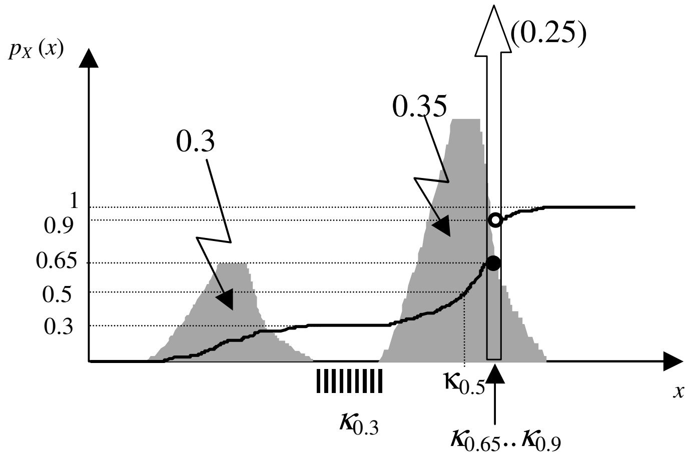


Minimalne gwarancje, ryzyko niezapewnienia = δ



Przedział "typowych" realizacji

Kwantyle rozkładu

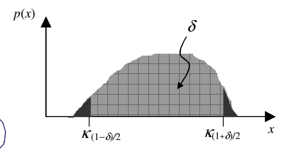


System reputacyjny Beta

Problem: Jaki zbiór klientów $M \subseteq I$ można uznać za uczciwych?

M jest największym podzbiorem I spełniającym warunek

$$z^*(M) \in [\kappa^{(i)}_{(1-\delta)/2}, \kappa^{(i)}_{(1+\delta)/2}] \quad \forall i \in M$$

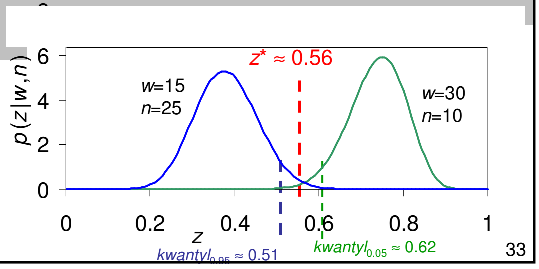


gdzie $\kappa^{(i)}_u$ – kwantyle rozkładu $Beta_{w_i,n_i}(z)$
δ – ustalony próg tolerancji

swoiste kryterium większościowe:
ocena każdego klienta $i \in M$ nie jest wyraźnie niezgodna z oceną zbiorową opartą na M

System reputacyjny Beta

```
M := I
repeat
  z* := (Σ_{i∈M} w_i + 1) / (Σ_{i∈M} (w_i+n_i) + 2)
  nieuczciwi := ∅
  for i ∈ M do
    znajdź kwantyl_{0.05}, kwantyl_{0.95} rozkładu Beta_{wi,ni}(z); //δ = 10%
    if z* < kwantyl_{0.05} then nieuczciwi∪ := {i}  //"wspólnik";
    if z* > kwantyl_{0.95} then nieuczciwi∪ := {i}  //"oszczerca"
  M\ := nieuczciwi
until nieuczciwi = ∅
```



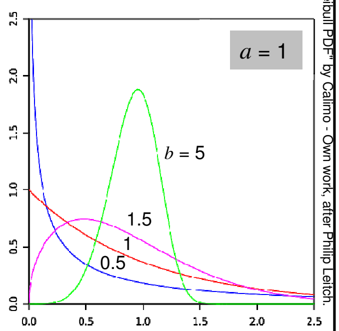
Generacja liczb pseudolosowych: metoda odwracania dystrybuanty

- Czas życia (bezawaryjnej pracy) badanego systemu jest wielkością losową o dystrybuancie:

$$\tilde{F}(x) = 1 - e^{-x^b/a}, \quad x \geq 0$$

tzw. rozkład Weibulla; parametry: a: (skali), b: (kształtu), popularny w analizie niezawodności, gdyż zależnie od b może modelować różne efekty upływu czasu.

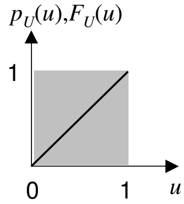
odpowiednia gęstość prawdopodobieństwa



- Jak wygenerować taki czas życia w symulatorze?
- Problem: Dysponujemy generatorem `random`. Jak przekształcić go w generator wielkości losowej o zadanej dystrybuancie $\tilde{F}(\cdot)$?

Generacja liczb pseudolosowych: metoda odwracania dystrybuanty

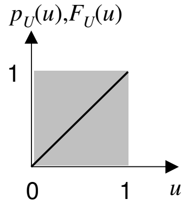
- Zakładamy, że $\tilde{F}(\cdot)$: ciągła & monotoniczna ($\Rightarrow$ odwracalna)
- Niech $\underline{U}$ ~ `random`, tj. $P(\underline{U} < u) = u \; \forall u \in [0,1]$
- Zdefiniujmy $\underline{X} = \tilde{F}^{-1}(\underline{U})$
- Jaka będzie $F_X(x)$?



Systemy IT i rozkłady prawdopodobieństwa

Generacja liczb pseudolosowych: metoda odwracania dystrybuanty

- Zakładamy, że $\tilde{F}(\cdot)$: ciągła & monotoniczna ($\Rightarrow$ odwracalna)
- Niech $\underline{U}$ ~ `random`, tj. $P(\underline{U} < u) = u \; \forall u \in [0,1]$
- Zdefiniujmy $\underline{X} = \tilde{F}^{-1}(\underline{U})$
- Jaka będzie $F_X(x)$?:



$$F_X(x) = P(\underline{X} < x) = P(\tilde{F}^{-1}(\underline{U}) < x) = P(\underline{U} < \tilde{F}(x)) = \tilde{F}(x)$$

kwantyl rzędu *u* rozkładu $\tilde{F}(\cdot)$

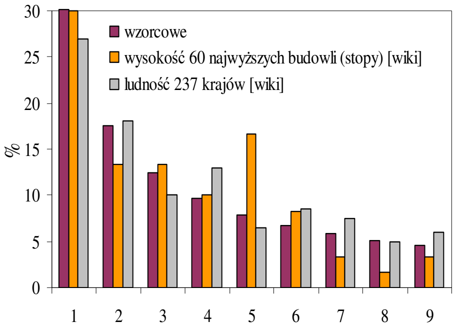
u := `random`;
$x := \tilde{F}^{-1}(u)$
// dla rozkładu Weibulla $x := \sqrt[b]{-a \cdot \ln u}$

- Co gdy $F(\cdot)$ nieciągła / niemonotoniczna? Drobne modyfikacje.

"Naturalne" zbiory danych

to tylko fragment długiej listy…

prędkość światła	299792458 m/s
stała grawitacyjna	6.67259e-11 m³/kg/s²
stała Plancka /2π	1.0545726691251e-34 Js
masa Plancka	2.17671e-08 kg
długość Plancka	1.61605e-35 m
j.a.	1.4959789e11 m
parsek	206264.806 j.a.
rok świetlny	9.46053e15 m
masa Słońca	1.989e30 kg
średnica Słońca	1.392e6 km
promień Bohra	5.29177249e-11 m
atmosfera techniczna	101325 Pa
eV	1.60217733e-19 J
masa protonu	1.0072764666 amu
masa elektronu	0.0005485799111 amu
funt	0.45359232 kg
j. strumienia magnetycznego	2.06783461e-15 Wb
opór Halla	25812.8056 Ω
stała Boltzmanna	1.380658e-23 J/K
stała Avogadro	6.0221367e+23 1/mol
stała Faradaya	96485.309 C 1/mol
....	....



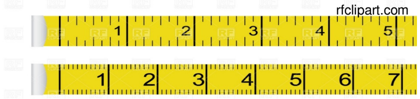
- Pierwsze cyfry znaczące nie występują jednakowo często.
- Ich częstości układają się w pewien "wzorcowy" rozkład (**prawo Benforda**).
- Dlaczego? Co to za rozkład?

"Naturalne" zbiory danych

- Niech $\underline{X} > 0$ – wartość przypadkowo wybranej danej z pewnego "naturalnego" zbioru danych. Jaki rozkład prawdopodobieństwa posiada $\underline{X}$? (??!!!)

"Naturalne" zbiory danych

- Niech $\underline{X} > 0$ – wartość przypadkowo wybranej danej z pewnego "naturalnego" zbioru danych. Jaki rozkład prawdopodobieństwa posiada $\underline{X}$? (??!!!)
- Jeżeli $\underline{X}$ posiada jakiś rozkład, to nie może on zależeć od jednostek, w jakich wyrażone są dane!

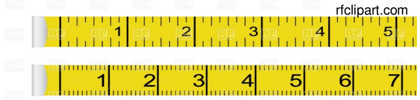


np. prawdopodobieństwa znalezienia się w lewej połówce skali… lewej / środkowej ćwiartce itd.. są takie same.

Systemy IT i rozkłady prawdopodobieństwa

"Naturalne" zbiory danych

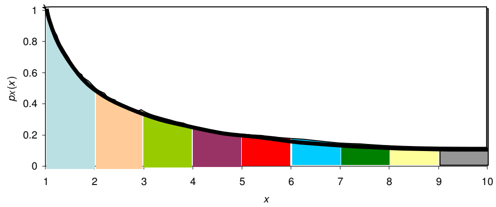
- Niech $\underline{X} > 0$ – wartość przypadkowo wybranej danej z pewnego "naturalnego" zbioru danych. Jaki rozkład prawdopodobieństwa posiada $\underline{X}$? (??!!!)
- Jeżeli $\underline{X}$ posiada jakiś rozkład, to nie może on zależeć od jednostek, w jakich wyrażone są dane!

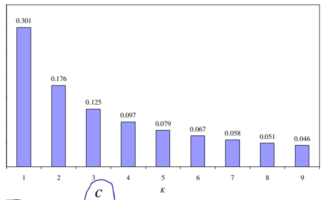


np. prawdopodobieństwa znalezienia się w lewej połówce skali… lewej / środkowej ćwiartce itd.. są takie same.

- Zatem $\underline{X}$ i $k\underline{X}$ mają takie same rozkłady dla dowolnego $k > 0$.
- $P(\underline{X} < x) = P(k\underline{X} < x) = P(\underline{X} < x/k) \;\Rightarrow\; F_X(x) \equiv F_X(x/k)$
- Pamiętając o związkach między gęstością prawdopodobieństwa a dystrybuantą mamy po zróżniczkowaniu: $p_X(x) \equiv \dfrac{p_X(x/k)}{k} \;\Rightarrow\; \boxed{p_X(x) = \dfrac{c}{x}}$

"Naturalne" zbiory danych





$\frac{c}{x}$

- $$P(\text{I cyfra znacz.} = m \mid 10^i \le X < 10^{i+1}) = \frac{\int_{10^i m}^{10^i(m+1)} p_X(x)dx}{\int_{10^i}^{10^{i+1}} p_X(x)dx} = \log(m+1) - \log m$$

- Z **twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym**:

$$P(\text{I cyfra znacz.} = m)$$
$$= \sum_{i=0,\pm1,\pm2,\ldots} P(\text{I cyfra znacz.} = m \mid 10^i \le X < 10^{i+1}) P(10^i \le X < 10^{i+1}) = \log(m+1) - \log m$$

to właśnie rozkład "wzorcowy", m = 1..9

Systemy IT i sumy niezależnych wielkości losowych

- wariancja
- funkcje: charakterystyczna i tworząca
- zbieżność stochastyczna, słabe prawo wielkich liczb
- rozkłady: normalny, Erlanga, Pareto, Cauchy'ego
- przekształcenie (funkcja) wielkości losowej

Jaki jest problem i po co jest?

Dane: $\underline{X}$, $\underline{Y}$ niezależne o wspólnej dziedzinie (zbiorze realizacji) i znanych rozkładach. Jaki rozkład ma $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$?

Momenty rozkładu? Wiemy:

Wartość średnia: $E\underline{Z} = E\underline{X} + E\underline{Y}$

Wariancja: $V\underline{Z} = E(\underline{Z} - E\underline{Z})^2 = V\underline{X} + V\underline{Y}$

Odchylenie standardowe: $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

Rozkłady sum niezależnych wielkości losowych potrzebne są do analizy:

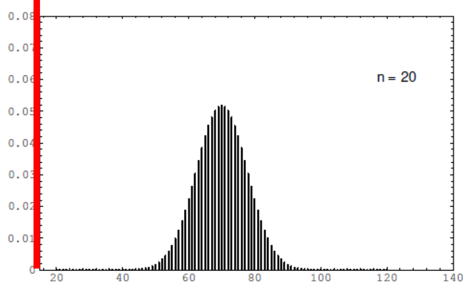
- zagregowanych losowych strumieni zdarzeń
- łącznych efektów wielu zjawisk losowych
- serii doświadczeń losowych
- itd.

Rozkłady sum niezależnych wielkości losowych

Jeżeli $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ mają obie rozkład równomierny, to czy rozkład $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$ też jest równomierny (przesunięty/przeskalowany)? Nie.

Wynik rzutu kostką symetryczną ma rozkład równomierny, lecz suma wyników w dwóch rzutach już nie, np. 7 oczek jest znacznie bardziej prawdopodobne niż 2 lub 12.

www.sodahead.com

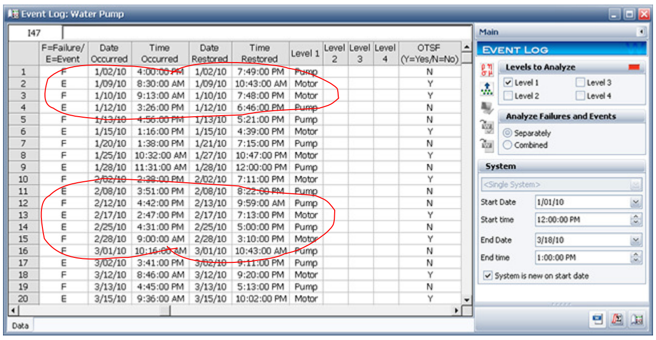


rozkład sumy oczek w n = 20 rzutach

Rozkłady sum niezależnych wielkości losowych

Liczby wywołań:

$$\underline{Z} \left\{ \begin{array}{l} \underline{X} \\ \\ \underline{Y} \end{array} \right.$$



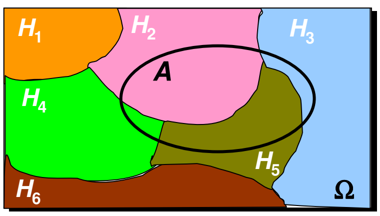
	F=Failure/ E=Event	Date Occurred	Time Occurred	Date Restored	Time Restored	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	OTSF (Y=Yes/N=No)
1	F	1/02/10	4:00:00 PM	1/02/10	7:49:00 PM	Pump				N
2	E	1/09/10	8:30:00 AM	1/09/10	10:43:00 AM	Motor				Y
3	F	1/10/10	9:13:00 AM	1/10/10	7:48:00 PM	Motor				Y
4	E	1/12/10	3:26:00 PM	1/12/10	6:46:00 PM	Pump				N
5	F	1/13/10	4:56:00 PM	1/13/10	5:21:00 PM	Pump				N
6	E	1/15/10	1:16:00 PM	1/15/10	4:39:00 PM	Motor				Y
7	F	1/20/10	1:38:00 PM	1/21/10	7:15:00 PM	Pump				N
8	F	1/25/10	10:32:00 AM	1/27/10	10:47:00 PM	Motor				Y
9	E	1/28/10	11:31:00 AM	1/28/10	12:00:00 PM	Pump				N
10	F	2/02/10	2:38:00 PM	2/02/10	7:11:00 PM	Motor				Y
11	E	2/08/10	3:51:00 PM	2/08/10	8:22:00 PM	Pump				N
12	F	2/12/10	4:42:00 PM	2/13/10	9:59:00 AM	Pump				N
13	E	2/17/10	2:47:00 PM	2/17/10	7:13:00 PM	Motor				Y
14	E	2/25/10	4:31:00 PM	2/25/10	5:00:00 PM	Pump				N
15	F	2/28/10	9:00:00 AM	2/28/10	3:10:00 PM	Motor				Y
16	F	3/01/10	10:16:00 AM	3/01/10	10:43:00 AM	Pump				N
17	E	3/02/10	3:41:00 PM	3/02/10	9:11:00 PM	Pump				N
18	F	3/12/10	8:46:00 AM	3/12/10	9:20:00 PM	Motor				Y
19	F	3/13/10	4:45:00 PM	3/13/10	5:13:00 PM	Pump				N
20	E	3/15/10	9:36:00 AM	3/15/10	10:02:00 PM	Motor				Y

- $P(\underline{Z} = k) = \ldots$ rozbijamy względem **układu zupełnego** $P(\underline{X} = j), j = 0,\ldots,k$

Prawdopodobieństwo całkowite

- Interesuje nas dowolne zdarzenie A

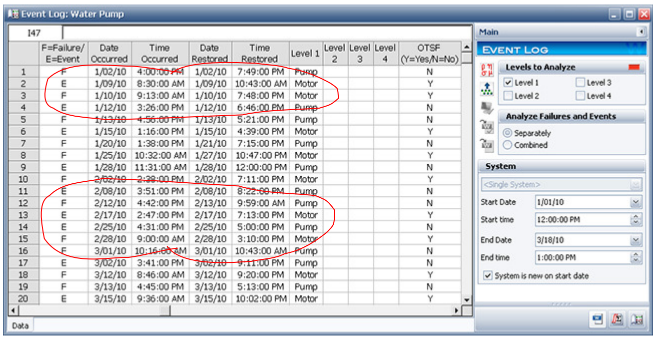
$P(A) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n)$



Rozkłady sum niezależnych wielkości losowych

Liczby wywołań:

$$\underline{Z} \left\{ \begin{array}{l} \underline{X} \\ \\ \underline{Y} \end{array} \right.$$


Event Log: Water Pump

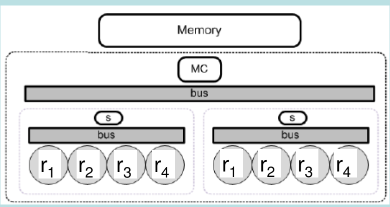
	F=Failure/ E=Event	Date Occurred	Time Occurred	Date Restored	Time Restored	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	OTSF (Y=Yes/N=No)
1	F	1/02/10	4:00:00 PM	1/02/10	7:49:00 PM	Pump				N
2	E	1/09/10	8:30:00 AM	1/09/10	10:43:00 AM	Motor				Y
3	F	1/10/10	9:13:00 AM	1/10/10	7:48:00 PM	Motor				Y
4	E	1/12/10	3:26:00 PM	1/12/10	6:46:00 PM	Pump				N
5	F	1/13/10	4:56:00 PM	1/13/10	5:21:00 PM	Pump				N
6	E	1/15/10	1:16:00 PM	1/15/10	4:39:00 PM	Motor				Y
7	F	1/20/10	1:38:00 PM	1/21/10	7:15:00 PM	Pump				N
8	F	1/25/10	10:32:00 AM	1/27/10	10:47:00 PM	Motor				Y
9	E	1/28/10	11:31:00 AM	1/28/10	12:00:00 PM	Pump				N
10	F	2/02/10	2:38:00 PM	2/02/10	7:11:00 PM	Motor				Y
11	E	2/08/10	3:51:00 PM	2/08/10	8:22:00 PM	Pump				N
12	F	2/12/10	4:42:00 PM	2/13/10	9:59:00 AM	Pump				N
13	E	2/17/10	2:47:00 PM	2/17/10	7:13:00 PM	Motor				Y
14	E	2/25/10	4:31:00 PM	2/25/10	5:00:00 PM	Pump				N
15	F	2/28/10	9:00:00 AM	2/28/10	3:10:00 PM	Motor				Y
16	F	3/01/10	10:16:00 AM	3/01/10	10:43:00 AM	Pump				N
17	E	3/02/10	3:41:00 PM	3/02/10	9:11:00 PM	Pump				N
18	F	3/12/10	8:46:00 AM	3/12/10	9:20:00 PM	Motor				Y
19	F	3/13/10	4:45:00 PM	3/13/10	5:13:00 PM	Pump				N
20	E	3/15/10	9:36:00 AM	3/15/10	10:02:00 PM	Motor				Y

- $P(\underline{Z} = k)$ = … rozbijamy względem **układu zupełnego** $P(\underline{X} = j), j = 0,\ldots,k$

$$P(\underline{Z} = k) = \sum_{j=0}^{k} P\big((\underline{X} = j)(\underline{Y} = k - j)\big) = \sum_{j=0}^{k} P(\underline{X} = j) \cdot P(\underline{Y} = k - j)$$

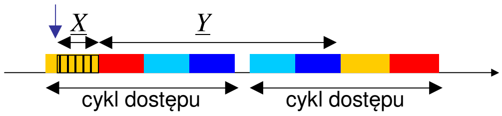
splot dyskretny

Architektura wielordzeniowa



4123 ← w każdym cyklu dostępu
2341 przypadkowa permutacja
2134 szczelin dla rdzeni

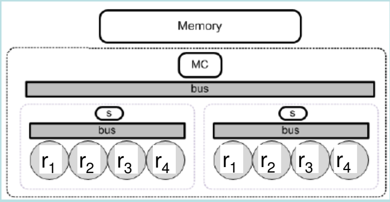
chybienie w pamięci podręcznej danych/instrukcji



P(AET > MTET) ≤ ε
AET – *actual execution time* $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$
MTET – *maximum tolerable execution time*

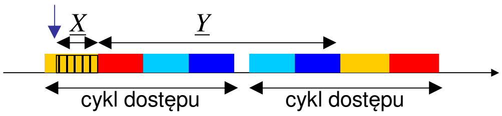
- $F_Z(z) = P(\underline{X} + \underline{Y} < z) = \ldots$ rozbijamy względem układu zupełnego $P(x \le \underline{X} < x + dx)$, $0 \le x \le szczelina$

Architektura wielordzeniowa



4123 ← w każdym cyklu dostępu
2341 przypadkowa permutacja
2134 szczelin dla rdzeni

chybienie w pamięci podręcznej danych/instrukcji



P(AET > MTET) $\le \varepsilon$
AET – *actual execution time* $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$
MTET – *maximum tolerable execution time*

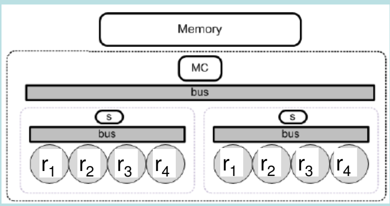
- $F_Z(z) = P(\underline{X} + \underline{Y} < z) = \ldots$ rozbijamy względem układu zupełnego $P(x \le \underline{X} < x + dx)$, $0 \le x \le szczelina$

$$F_Z(z) = P(\underline{X} + \underline{Y} < z) = \int_x P\big((\underline{Y} < z - x)(x \le \underline{X} < x + dx)\big)$$

$$= \int_x P(\underline{Y} < z - x) P(x \le \underline{X} < x + dx) = \int_x F_Y(z - x) p_X(x) dx$$

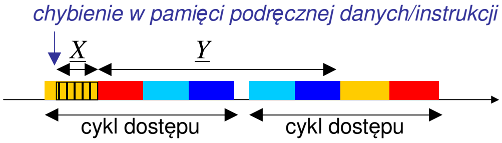
Systemy IT i sumy niezależnych wielkości losowych

Architektura wielordzeniowa



4123 ← w każdym cyklu dostępu
2341 przypadkowa permutacja
2134 szczelin dla rdzeni

chybienie w pamięci podręcznej danych/instrukcji



P(AET > MTET) $\le \varepsilon$
AET – *actual execution time* $\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$
MTET – *maximum tolerable execution time*

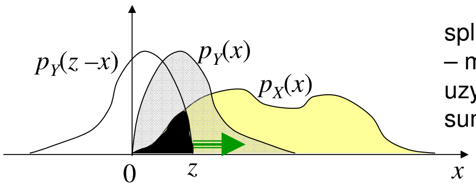
- $F_Z(z) = P(\underline{X} + \underline{Y} < z) = \ldots$ rozbijamy względem układu zupełnego $P(x \le \underline{X} < x + dx)$, $0 \le x \le szczelina$

$$F_Z(z) = P(\underline{X} + \underline{Y} < z) = \int_x P\big((\underline{Y} < z - x)(x \le \underline{X} < x + dx)\big)$$

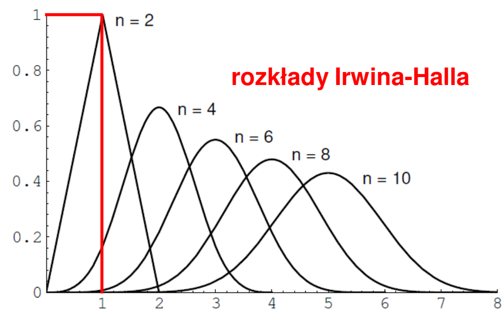
$$= \int_x P(\underline{Y} < z - x) P(x \le \underline{X} < x + dx) = \int_x F_Y(z - x) p_X(x) dx$$

Stąd: $p_Z(z) = F'_Z(z) = \int p_X(x) \cdot p_Y(z - x) dx$ splot ciągły

Sploty rozkładów



splot ma własność łączności
– można splatać wielokrotnie,
uzyskując gęstości prawdopodobieństwa
sum wielu składników losowych



suma z *n*-krotnego zwrotu `random` [0,1)
(*n*-krotny splot czerwonej funkcji ze sobą)

Funkcje charakterystyczne i tworzące

Bardziej efektywne podejście do wyznaczania rozkładów sum wielkości losowych opiera się na zdefiniowaniu dla w.l. $\underline{X}$ przekształcenia:

$$g(X) = \begin{cases} e^{\mathrm{j}\upsilon X}, \ X \text{ ciagla o zbiorze realizacji } x \in [a,b] \\ z^X, \ X \text{ dyskretna o zbiorze realizacji } x \in \{0,1,2,\ldots\} \end{cases}$$

gdzie:
$\mathrm{j}^2 = -1$
$|z| \leq 1$

Zainteresujemy się $Eg(\underline{X})$.

zmienne zespolone
traktujemy w obliczeniach
jak zwykłe zmienne :)

Wartość średnia: uogólnienie

- Dla dowolnego deterministycznego przekształcenia $g(\cdot)$:

$$Eg(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p(x)dx \\ \sum_{x_k} g(x_k)\cdot P(\underline{X} = x_k) \end{cases}$$

Funkcje charakterystyczne i tworzące

Bardziej efektywne podejście do wyznaczania rozkładów sum wielkości losowych opiera się na zdefiniowaniu dla w.l. $\underline{X}$ przekształcenia:

$$g(\underline{X}) = \begin{cases} e^{\mathrm{j}\upsilon \underline{X}},\ \underline{X} \text{ ciagla o zbiorze realizacji } x \in [a,b] \\ z^{\underline{X}},\ \underline{X} \text{ dyskretna o zbiorze realizacji } x \in \{0,1,2,\ldots\} \end{cases}$$

gdzie:
$\mathrm{j}^2 = -1$
$|z| \le 1$

zmienne zespolone traktujemy w obliczeniach zwyczajnie :)

Zainteresujemy się $Eg(\underline{X})$.

Funkcja charakterystyczna

$$\varphi_X(\upsilon) = Ee^{\mathrm{j}\upsilon \underline{X}} = \int_a^b e^{\mathrm{j}\upsilon x} p_X(x)dx$$

Funkcja tworząca

$$G_X(z) = Ez^{\underline{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(\underline{X} = k) = P(\underline{X} = 0) + zP(\underline{X} = 1) + z^2 P(\underline{X} = 2) + \ldots$$

Funkcje charakterystyczne i tworzące

- Czy dają tyle informacji, co rozkład prawdopodobieństwa? Tak.
  - – twierdzenie o jednoznaczności: $p_X(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\upsilon x} \cdot \varphi_X(\upsilon) d\upsilon$
  - – rozwinięcie w szereg potęgowy: $P(\underline{X} = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Funkcje charakterystyczne i tworzące

- Czy dają tyle informacji, co rozkład prawdopodobieństwa? Tak.
  - – twierdzenie o jednoznaczności: $p_X(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\upsilon x} \cdot \varphi_X(\upsilon) d\upsilon$
  - – rozwinięcie w szereg potęgowy: $P(\underline{X} = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

- W czym mogą pomóc? W obliczaniu **momentów rozkładu**, np.

$$E\underline{X} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b x p_X(x) dx = \frac{\varphi_X'(0)}{\mathrm{j}} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kP(\underline{X} = k) = G_X'(1) \end{cases}$$

$$V\underline{X} = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (x - E\underline{X})^2 p_X(x) dx = [\varphi_X'(0)]^2 - \varphi_X''(0) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k - E\underline{X})^2 P(\underline{X} = k) = G_X''(1) + G_X'(1)[1 - G_X'(1)] \end{cases}$$

Funkcje charakterystyczne i tworzące

- Kluczowa własność:

$$\underline{X}, \underline{Y} \text{ niezależne} \Rightarrow \varphi_{X+Y}(\upsilon) = \varphi_X(\upsilon) \cdot \varphi_Y(\upsilon)$$
$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

Dowód dla funkcji charakterystycznej (dla funkcji tworzącej podobny):

$$\varphi_{X+Y}(\upsilon) = E[e^{j\upsilon(\underline{X}+\underline{Y})}] = E[e^{j\upsilon\underline{X}} \cdot e^{j\upsilon\underline{Y}}] = Ee^{j\upsilon\underline{X}} \cdot Ee^{j\upsilon\underline{Y}} = \varphi_X(\upsilon) \cdot \varphi_Y(\upsilon)$$

$\underline{X}, \underline{Y}$ niezależne $\Rightarrow g(\underline{X})$ i $g(\underline{Y})$ też

Funkcje charakterystyczne i tworzące

- Kluczowa własność:

$$\underline{X}, \underline{Y} \text{ niezależne} \Rightarrow \varphi_{X+Y}(\upsilon) = \varphi_X(\upsilon) \cdot \varphi_Y(\upsilon)$$
$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z)$$

Dowód dla funkcji charakterystycznej (dla funkcji tworzącej podobny):

$$\varphi_{X+Y}(\upsilon) = E[e^{j\upsilon(\underline{X}+\underline{Y})}] = E[e^{j\upsilon\underline{X}} \cdot e^{j\upsilon\underline{Y}}] = Ee^{j\upsilon\underline{X}} \cdot Ee^{j\upsilon\underline{Y}} = \varphi_X(\upsilon) \cdot \varphi_Y(\upsilon)$$

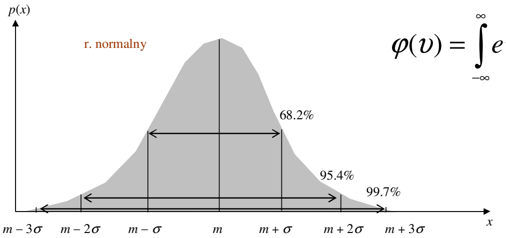
$\underline{X}, \underline{Y}$ niezależne $\Rightarrow g(\underline{X})$ i $g(\underline{Y})$ też

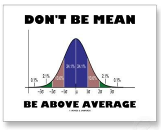
operacja na wielkościach losowych	operacja na rozkładach prawdopodobieństwa	operacja na funkcjach charakterystycznych / tworzących
dodawanie	**splot**	**mnożenie**

Funkcje charakterystyczne i tworzące

- Przykład: **rozkład normalny** $N(m,\sigma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$

$$\varphi(\upsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{j}\upsilon x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\ldots=e^{\mathrm{j}\upsilon m}e^{-\sigma^2\upsilon^2/2}$$

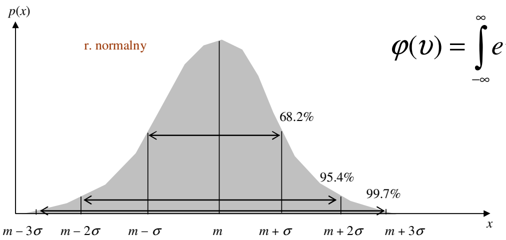




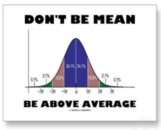
Funkcje charakterystyczne i tworzące

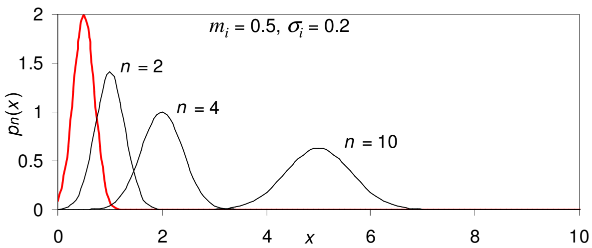
- Przykład: **rozkład normalny** $N(m,\sigma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$

$$\varphi(\upsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{j}\upsilon x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx=\ldots=e^{\mathrm{j}\upsilon m}e^{-\sigma^2\upsilon^2/2}$$



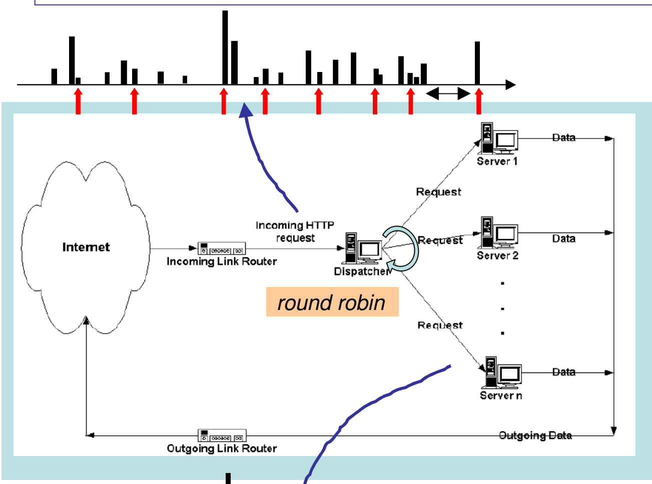
$\Rightarrow$ splot $N(m_1,\sigma_1),\ldots,N(m_n,\sigma_n)$ =
$N(m_1+\ldots+m_n,\sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2})$



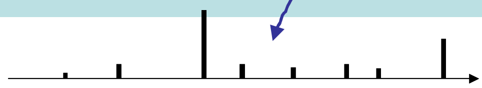


suma niezależnych wielkości losowych o rozkładach normalnych: **rozkład normalny**

Równoważenie obciążenia: *round robin*



interwały w wejściowym strumieniu wywołań: $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \ldots$
- **iid** (*niezależne o wspólnym rozkładzie*)
- $\sim I$, $p_I(x)$, $x \in (0, \infty)$



interwał w strumieniu wywołań dla serwera 1: $\underline{J} = \underline{I}_1 + \ldots + \underline{I}_n$

Równoważenie obciążenia: *round robin*

Obliczmy rozkład $\underline{J} = \underline{I}_1 + \ldots + \underline{I}_n$, gdy

$p_I(x)$ – **rozkład wykładniczy** o wartości średniej a.

1) Funkcja charakterystyczna $\underline{I}$: $$\varphi_I(\upsilon) = \int_0^\infty e^{j\upsilon x} \frac{e^{-x/a}}{a} dx = \frac{1}{1 - ja\upsilon}$$

2) Funkcja charakterystyczna $\underline{J}$: $$\varphi_J(\upsilon) = [\varphi_I(\upsilon)]^n = \left(\frac{1}{1 - ja\upsilon}\right)^n$$

3) Z twierdzenia o jednoznaczności: $$p_J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\upsilon x} \cdot \varphi_J(\upsilon) d\upsilon$$

trudne…

Równoważenie obciążenia: *round robin*

…ale pamiętając, że $\int_0^\infty e^{-cx} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{1}{c^n}$

mamy (c := 1 – j$a\upsilon$, ax := x): $\varphi_J(\upsilon) = \int_0^\infty e^{j\upsilon x} \frac{(1/a)^n x^{n-1} e^{-x/a}}{(n-1)!} dx = \left(\frac{1}{1-ja\upsilon}\right)^n$

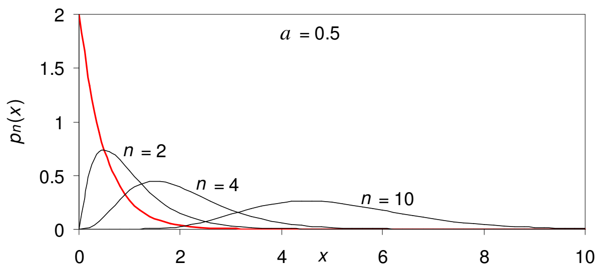
Równoważenie obciążenia: *round robin*

$$\varphi_X(\upsilon) = \int_a^b e^{j\upsilon x} p_X(x) dx = \left(\frac{1}{1-ja\upsilon}\right)^n$$

…ale pamiętając, że $\int_0^\infty e^{-cx} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{1}{c^n}$

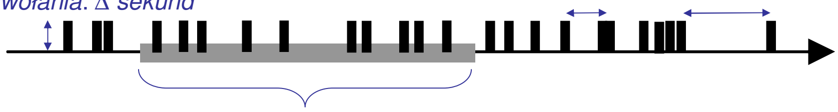
gęstość rozkładu $\underline{J}$

mamy (c := 1 – j$a\upsilon$, ax := x): $\varphi_J(\upsilon) = \int_0^\infty e^{j\upsilon x} \frac{(1/a)^n x^{n-1} e^{-x/a}}{(n-1)!} dx = \left(\frac{1}{1-ja\upsilon}\right)^n$



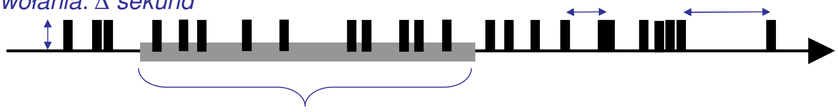
suma n niezależnych wielkości losowych o rozkładach wykładniczych: **rozkład Erlanga-n**

Zaległości w obsłudze



Systemy IT i sumy niezależnych wielkości losowych

Zaległości w obsłudze



- Niech $\underline{N}_t$ – liczba wywołań w okresie obserwacji.
- Łączny czas przetwarzania tych wywołań = $\underline{N}_t \cdot \Delta$.
- Jakie jest prawdopodobieństwo naruszenia reżimu czasu rzeczywistego przez procesor przetwarzający wywołania, tj. powstania "zaległości" w chwili t ?

$$P(\underline{N}_t \cdot \Delta \geq t) = P\left(\underline{N}_t \geq \left\lceil \frac{t}{\Delta} \right\rceil \right) = ?$$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Zaległości w obsłudze

10 wywołań, 9 interwałów

Zauważmy, że $P(\underline{N}_t \geq n + 1) = P(\underline{I}_1 + \ldots + \underline{I}_n < t) = F_n(t)$

dystrybuanta n-krotnego splotu rozkładu $p_I(\cdot)$ z samym sobą – metoda funkcji charakterystycznej!

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Zaległości w obsłudze

10 wywołań, 9 interwałów

Zauważmy, że $P(\underline{N}_t \geq n + 1) = P(\underline{I}_1 + \ldots + \underline{I}_n < t) = F_n(t)$

dystrybuanta n-krotnego splotu rozkładu $p_I(\cdot)$ z samym sobą – metoda funkcji charakterystycznej!

- $\underline{I}$ ~ rozkład wykładniczy ze średnią a (tj. $p_I(x) = e^{-x/a}/a$)

$$F_n(t) = 1 - e^{-t/a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t/a)^k}{k!}$$

dystrybuanta rozkładu Erlanga-n

- $\underline{I}$ ~ rozkład równomierny w przedziale [0,1)

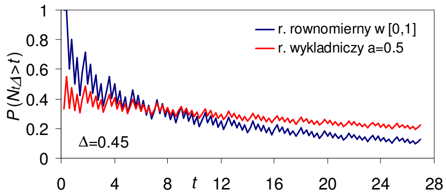
$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{\min\{t,n\}} (-1)^k \frac{(t-k)^n}{k!(n-k)!}$$

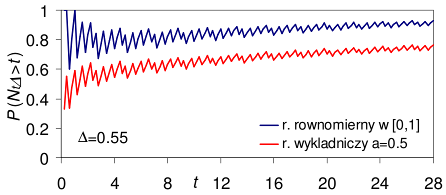
dystrybuanta rozkładu Irwina-Halla

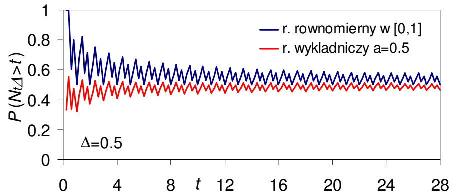
Zaległości w obsłudze

$P(\underline{N}_t \geq n+1) = F_n(t)$

Zatem $P(\underline{N}_t \geq n) = F_{n-1}(t) \quad \Rightarrow \quad P\left(\underline{N}_t \geq \left\lceil \frac{t}{\Delta} \right\rceil\right) = F_{\lceil t/\Delta \rceil - 1}(t)$





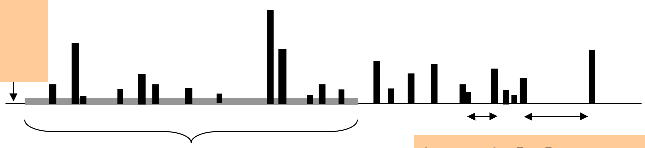


skąd ta jakościowa różnica?

**jak wyznaczyć rozkład wielkości zaległości?*

Utracone wywołania

czasy przetwarzania $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots$:
iid, rozkład wykładniczy
o wartości średniej c
$p_Y(y) = e^{-y/c}/c$

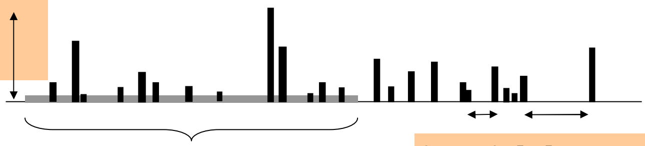


czas trwania awarii procesora $\underline{T}$:
rozkład wykładniczy o wartości średniej b
$p_T(t) = e^{-t/b}/b$

interwały $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \ldots$:
iid, rozkład wykładniczy
o wartości średniej a
$p_I(x) = e^{-x/a}/a$

Utracone wywołania

czasy przetwarzania $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots$:
iid, rozkład wykładniczy
o wartości średniej c
$p_Y(y) = e^{-y/c}/c$



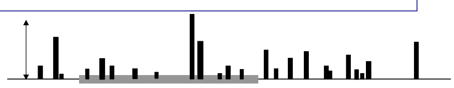
czas trwania awarii procesora $\underline{T}$:
rozkład wykładniczy o wartości średniej b
$p_T(t) = e^{-t/b}/b$

interwały $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \ldots$:
iid, rozkład wykładniczy
o wartości średniej a
$p_I(x) = e^{-x/a}/a$

- Problem 1: Ile wywołań utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?
  - oznaczmy tę wielkość losową $\underline{N}_T$ ("podwójna" losowość!)
- Problem 2: Ile czasu przetwarzania utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?
  - wielkość losowa $\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}_T}$ ("potrójna" losowość!)

Systemy IT i sumy niezależnych wielkości losowych

Utracone wywołania

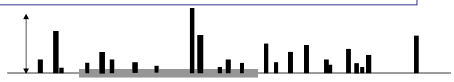


- Problem 1: Ile wywołań utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?
  - ze wzoru na **prawdopodobieństwo całkowite**:

$$P(\underline{N}_T = n) = \int_0^\infty P(\underline{N}_T = n \mid t \le \underline{T} < t + dt) P(t \le \underline{T} < t + dt)$$

$$= \int_0^\infty P(\underline{N}_t = n) p_T(t) dt$$

Utracone wywołania



• Problem 1: Ile wywołań utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?

- ze wzoru na **prawdopodobieństwo całkowite**:

$$P(\underline{N}_{\underline{T}} = n) = \int_0^\infty P(\underline{N}_{\underline{T}} = n \mid t \le \underline{T} < t + dt) P(t \le \underline{T} < t + dt)$$

$$= \int_0^\infty P(\underline{N}_t = n) p_T(t) dt$$

$$P(\underline{N}_t \ge n) - P(\underline{N}_t \ge n+1) = F_{n-1}(t) - F_n(t)$$

z przykładu o zaległościach w obsłudze mamy $F_n(t)$, tj. $P(\underline{I}_1 + \ldots + \underline{I}_n < t)$

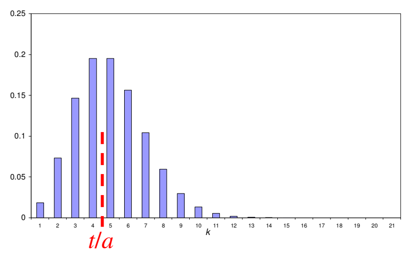
Utracone wywołania

$$F_n(t) = 1 - e^{-t/a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t/a)^k}{k!}$$

• Dla rozkładu wykładniczego $\underline{I}$:

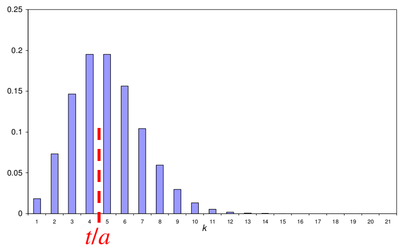
$$P(\underline{N}_t = n) = \frac{(t/a)^n}{n!} e^{-t/a}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

rozkład Poissona



Utracone wywołania

$$F_n(t) = 1 - e^{-t/a}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t/a)^k}{k!}$$



• Dla rozkładu wykładniczego $\underline{I}$:

$$P(\underline{N}_t = n) = \frac{(t/a)^n}{n!}e^{-t/a}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

rozkład Poissona

• Zatem: $$P(\underline{N}_T = n) = \int_0^\infty \frac{(t/a)^n}{n!}e^{-t/a}\frac{e^{-t/b}}{b}dt = \ldots = (1-r)^n r, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

rozkład geometryczny

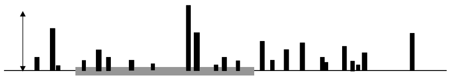
gdzie $r = \dfrac{a}{a+b}$

wartość średnia: $$E\underline{N}_T = \sum_{n=0}^{\infty} nP(\underline{N}_T = n) = \frac{1-r}{r} = \frac{b}{a}$$

Utracone wywołania

• Problem 2: Ile czasu przetwarzania utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?

$$\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}_T}$$



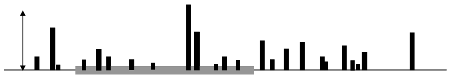
$\underline{N}_T$: r. geometryczny $(1-r)^n \cdot r$ $(r = {}^a/_{a+b})$; $\quad G_{\underline{N}_T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\underline{N}_T = n) = \dfrac{r}{1-(1-r)z}$

$\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots$: $\varphi_Y(\upsilon) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{j}c\upsilon}$

Utracone wywołania

- Problem 2: Ile czasu przetwarzania utracimy w czasie awarii $\underline{T}$?

$$\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}_T}$$



$\underline{N}_T$: r. geometryczny $(1 - r)^n \cdot r$ (gdzie $r = b/a$); $G_{N_T}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(\underline{N}_T = n) = \dfrac{r}{1-(1-r)z}$

$\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots$: $\varphi_Y(\upsilon) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{j}c\upsilon}$

- Korzystając z kluczowej własności funkcji charakterystycznych oraz na podstawie **twierdzenia o średniej warunkowej** nietrudno udowodnić, że

jeżeli $\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_N$, gdzie $\underline{Y}_i \sim \underline{Y}$ są iid

to $\varphi_S(\upsilon) = G_N[\varphi_Y(\upsilon)]$

suma losowa wielkości losowych iid

Gdyż: $\varphi_S(\upsilon) = Ee^{\mathrm{j}\upsilon\underline{S}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{|\underline{N}=n}{E} e^{\mathrm{j}\upsilon\underline{S}} P(\underline{N} = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{|\underline{N}=n}{E} e^{\mathrm{j}\upsilon(\underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_n)} P(\underline{N} = n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_Y(\upsilon)]^n P(\underline{N} = n) = G_N[\varphi_Y(\upsilon)]$

Utracone wywołania

- Zatem: $\varphi_S(\upsilon) = \left.\underbrace{\dfrac{r}{1-(1-r)z}}_{G_{N_T}(z)}\right|_{z = \underbrace{\frac{1}{1-\mathrm{j}c\upsilon}}_{\varphi_Y(\upsilon)}} = \ldots = r + (1-r) \cdot \dfrac{1}{1 - \mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon} = r \cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0} + (1-r) \cdot \dfrac{1}{1 - \mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon}$

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Utracone wywołania

- Zatem: $\varphi_S(\upsilon) = \left.\frac{r}{1-(1-r)z}\right|_{z=\frac{1}{1-\mathrm{j}c\upsilon}} = \ldots = r + (1-r)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon} = \overbrace{r\cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0} + (1-r)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon}}^{\int_0^\infty e^{\mathrm{j}\upsilon s}\left(p_1(s)+p_2(s)\right)ds}$

$p_2(s)$: kształt wykładniczy

jakie $p_1(s)$ odpowiada $r\cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0}$?

POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Utracone wywołania

- Zatem: $\varphi_S(\upsilon) = \left.\frac{r}{1-(1-r)z}\right|_{z=\frac{1}{1-\mathrm{j}c\upsilon}} = \ldots = r + (1-r)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon} = \overbrace{r\cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0} + (1-r)\cdot\frac{1}{1-\mathrm{j}\frac{c}{r}\upsilon}}^{\int_0^\infty e^{\mathrm{j}\upsilon s}\left(p_1(s)+p_2(s)\right)ds}$

$p_2(s)$: kształt wykładniczy

jakie $p_1(s)$ odpowiada $r\cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0}$?

$r\cdot e^{\mathrm{j}\upsilon 0} = r = \int_0^\infty e^{\mathrm{j}\upsilon s} p_1(s)ds$ $\Rightarrow$ funkcja skupiona w $s = 0$

$\upsilon = 0 \Rightarrow$ całka $= r$

Utracone wywołania

$$\int_0^\infty e^{j\upsilon s}\big(p_1(s)+p_2(s)\big)ds$$

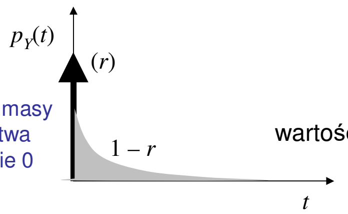
• Zatem: $\varphi_S(\upsilon) = \left.\dfrac{r}{1-(1-r)z}\right|_{z=\frac{1}{1-jc\upsilon}} = \ldots = r + (1-r)\cdot\dfrac{1}{1-j\frac{c}{r}\upsilon} = \underbrace{r\cdot e^{j\upsilon 0} + (1-r)\cdot\dfrac{1}{1-j\frac{c}{r}\upsilon}}$

$p_2(s)$: kształt wykładniczy

jakie $p_1(s)$ odpowiada $r\cdot e^{j\upsilon 0}$?

$r\cdot e^{j\upsilon 0} = r = \int_0^\infty e^{j\upsilon s}p_1(s)ds \Rightarrow$ funkcja skupiona w $s = 0$

$\upsilon = 0 \Rightarrow$ całka = r



część r całkowitej masy prawdopodobieństwa skupiona w punkcie 0

wartość średnia: $E\underline{S} = \dfrac{\varphi_S'(0)}{j} = \dfrac{b}{a}\cdot c$

Opróżnianie stosu

www.gettyimages.com

Do pustego stosu przybywa przerwanie.
Czy stos opróżni się ponownie?

W tym celu musi zakończyć się obsługa pierwszego przerwania oraz wszystkich jego potomków.

Do potomków przerwania zaliczamy przerwania przybyłe w trakcie jego obsługi oraz wszystkich potomków tych przerwań.

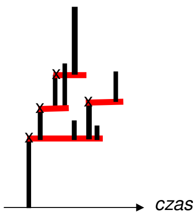
Opróżnianie stosu

www.gettyimages.com

Do pustego stosu przybywa przerwanie. Czy stos opróżni się ponownie?

W tym celu musi zakończyć się obsługa pierwszego przerwania oraz wszystkich jego <u>potomków</u>.

Do <u>potomków</u> przerwania zaliczamy przerwania przybyłe w trakcie jego obsługi oraz wszystkich <u>potomków</u> tych przerwań.



Opróżnianie stosu

www.gettyimages.com

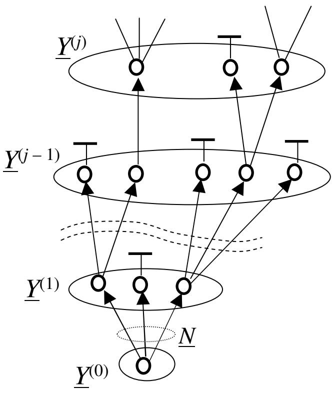
Do pustego stosu przybywa przerwanie. Czy stos opróżni się ponownie?

W tym celu musi zakończyć się obsługa pierwszego przerwania oraz wszystkich jego <u>potomków</u>.

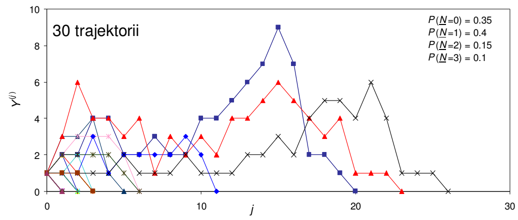
Do <u>potomków</u> przerwania zaliczamy przerwania przybyłe w trakcie jego obsługi oraz wszystkich <u>potomków</u> tych przerwań.

- Niech $\underline{N} \in \{0,1,2,\ldots\}$ reprezentuje liczbę bezpośrednich potomków przerwania.
- Załóżmy, że interwały w strumieniu przerwań oraz czasy obsługi przerwań są iid.
- Jeśli znamy rozkłady: interwałów i czasów obsługi przerwań, to znamy także rozkład $\underline{N}$ i jego funkcję tworzącą $G_N(z)$.
- Mamy $G_N(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\underline{N} = k) = 1$
- Przyjmijmy $P(\underline{N} = 0) < 1$ i $P(\underline{N} = 1) < 1$ – inaczej problem jest trywialny…

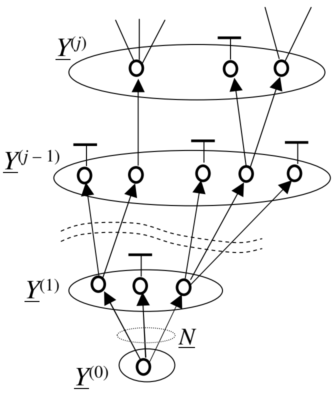
Opróżnianie stosu



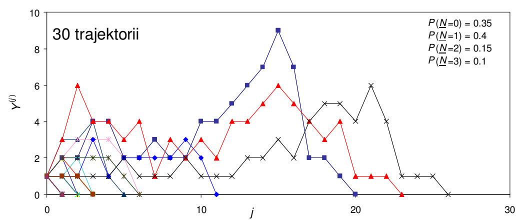
- Niech $\underline{Y}^{(j)}$: liczebność <u>pokolenia</u> numer j
- $\underline{Y}^{(0)} = 1$, $\underline{Y}^{(1)} \sim \underline{N}$

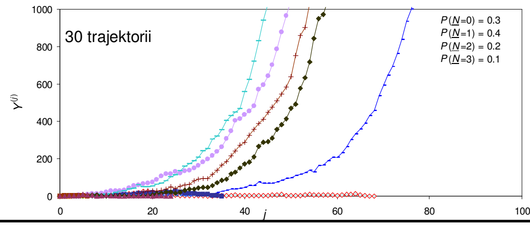


Opróżnianie stosu

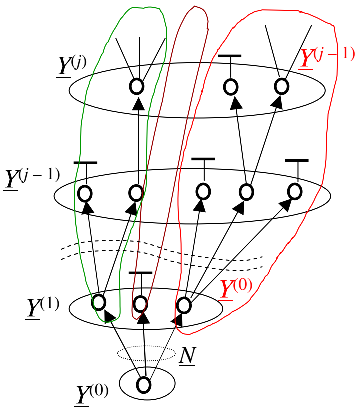


- Niech $\underline{Y}^{(j)}$: liczebność <u>pokolenia</u> numer j
- $\underline{Y}^{(0)} = 1$, $\underline{Y}^{(1)} \sim \underline{N}$
- dla $j > 0$: $\underline{Y}^{(j)} \in \{0,1,2,\ldots\}$ – możliwe jest $\underline{Y}^{(\infty)} = \infty$





Opróżnianie stosu



- Niech $\underline{Y}^{(j)}$: liczebność <u>pokolenia</u> numer j
- $\underline{Y}^{(0)} = 1$, $\underline{Y}^{(1)} \sim \underline{N}$
- dla $j > 0$: $\underline{Y}^{(j)} \in \{0,1,2,\ldots\}$, gdyż możliwy jest nieograniczony rozrost populacji
- Z rysunku widać, że:

$$\underline{Y}^{(j)} = \underline{Y}_1^{(j-1)} + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}}^{(j-1)}$$

= łączna liczebność pokoleń numer j – 1 wywodzących się od bezpośrednich potomków pierwszego przerwania

- $\underline{Y}_k^{(j-1)}$ są iid

Opróżnianie stosu

- Korzystając z z kluczowej własności funkcji tworzących oraz z **twierdzenia o średniej warunkowej** nietrudno udowodnić, że

jeżeli $\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}}$, gdzie $\underline{Y}_k \sim \underline{Y}$ są iid

to $G_S(z) = G_N[G_Y(z)]$

suma losowa dyskretnych wielkości losowych iid

Gdyż: $G_S(z) = Ez^{\underline{S}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\underline{N}=k}{E} z^{\underline{S}} P(\underline{N}=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\underline{N}=k}{E} z^{\underline{Y}_1+\ldots+\underline{Y}_k} P(\underline{N}=k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [G_Y(z)]^k P(\underline{N}=k) = G_N[G_Y(z)]$$

Opróżnianie stosu

• Korzystając z z kluczowej własności funkcji tworzących oraz z **twierdzenia o średniej warunkowej** nietrudno udowodnić, że

jeżeli $\underline{S} = \underline{Y}_1 + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}}$, gdzie $\underline{Y}_k \sim \underline{Y}$ są iid

to $G_S(z) = G_N[G_Y(z)]$

suma losowa dyskretnych wielkości losowych iid

Gdyż: $G_S(z) = Ez^{\underline{S}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\underline{N}=k}{E} z^{\underline{S}} P(\underline{N}=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\underline{N}=k}{E} z^{\underline{Y}_1+\ldots+\underline{Y}_k} P(\underline{N}=k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [G_Y(z)]^k P(\underline{N}=k) = G_N[G_Y(z)]$$

• Ponieważ w naszym problemie mamy $\underline{Y}^{(j)} = \underline{Y}_1^{(j-1)} + \ldots + \underline{Y}_{\underline{N}}^{(j-1)}$, więc

$$G_{Y^{(j)}}(z) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(z)], \quad j = 1,2,\ldots$$

oraz $G_{Y^{(0)}}(z) = z$

Opróżnianie stosu

• Przykład: $P(\underline{N}=0) = 0.3,\ P(\underline{N}=1) = 0.4,\ P(\underline{N}=2) = 0.2,\ P(\underline{N}=3) = 0.1$

$$G_{Y^{(0)}}(z) = z$$

$$G_{Y^{(1)}}(z) = G_N[G_{Y^{(0)}}(z)] = G_N(z) = 0.3 + 0.4z + 0.2z^2 + 0.1z^3$$

Opróżnianie stosu

• Przykład: $P(\underline{N}=0)=0.3,\ P(\underline{N}=1)=0.4,\ P(\underline{N}=2)=0.2,\ P(\underline{N}=3)=0.1$

$$G_{Y^{(0)}}(z)=z$$

$$G_{Y^{(1)}}(z)=G_N[G_{Y^{(0)}}(z)]=G_N(z)=0.3+0.4z+0.2z^2+0.1z^3$$

$$\begin{aligned}G_{Y^{(2)}}(z)&=G_N[G_{Y^{(1)}}(z)]\\&=G_N(0.3+0.4z+0.2z^2+0.1z^3)\\&=0.3\\&\quad+0.4(0.3+0.4z+0.2z^2+0.1z^3)\\&\quad\quad+0.2(0.3+0.4z+0.2z^2+0.1z^3)^2\\&\quad\quad\quad+0.1(0.3+0.4z+0.2z^2+0.1z^3)^3\\&=0.4407+0.2188z+\ldots+0.0024z^7+0.0006z^8+0.0001z^9\end{aligned}$$

Opróżnianie stosu

• Π = P(stos opróżni się ponownie) = P(populacja ostatecznie wymrze)

$$=P(\underline{Y}^{(\infty)}=0)=G_{Y^{(\infty)}}(0)$$

$G_{Y^{(j)}}(z)=G_N[G_{Y^{(j-1)}}(z)],\quad j=1,2,\ldots$

• Podstawiając z = 0 otrzymujemy w granicy

$$G_{Y^{(\infty)}}(0)=G_N\left[G_{Y^{(\infty)}}(0)\right]\ \Leftrightarrow\ \boxed{\Pi=G_N[\Pi]}$$

na przykład:

$\Pi = 0.35 + 0.4\Pi + 0.15\Pi^2 + 0.1\Pi^3$

$\Pi = 0.3 + 0.4\Pi + 0.2\Pi^2 + 0.1\Pi^3$

Opróżnianie stosu

- Π = P(stos opróżni się ponownie) = P(populacja ostatecznie wymrze)

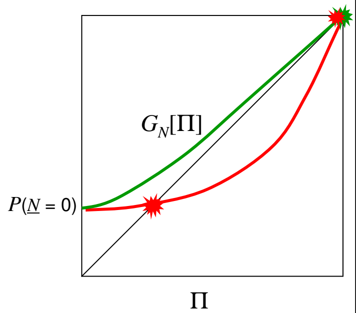
  $= P(\underline{Y}^{(\infty)} = 0) = G_{Y^{(\infty)}}(0)$

  $G_{Y^{(j)}}(z) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(z)], \quad j = 1,2,\ldots$

- Podstawiając z = 0 otrzymujemy w granicy

$$G_{Y^{(\infty)}}(0) = G_N\left[G_{Y^{(\infty)}}(0)\right] \Leftrightarrow \boxed{\Pi = G_N[\Pi]}$$

- $G_N(z)$: niemalejąca i wypukła funkcja z (wielomian o współczynnikach ≥ 0!)
  - 1 jest zawsze jednym z rozwiązań
  - …jedynym, gdy $G'_N(1) = E\underline{N} \le 1$



- **Jeżeli $E\underline{N} \le 1$, to stos opróżni się ponownie z prawdopodobieństwem 1 (prawie na pewno)**
- Co gdy $E\underline{N} > 1$? Które rozwiązanie?

Opróżnianie stosu

- Jeżeli w jest <u>jakąkolwiek</u> liczbą z przedziału [0,1] spełniającą równanie $w = G_N(w)$,

  to dla każdego j zachodzi: $G_{Y^{(j)}}(0) \le w$

Dowód przez indukcję zupełną względem j:

$$G_{Y^{(0)}}(0) = 0 \le w$$

$$G_{Y^{(j-1)}}(0) \le w \Rightarrow G_{Y^{(j)}}(0) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(0)] \le G_N(w) = w$$

Opróżnianie stosu

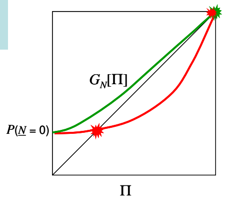
• Jeżeli w jest <u>jakąkolwiek</u> liczbą z przedziału [0,1] spełniającą równanie $w = G_N(w)$,

to dla każdego j zachodzi: $G_{Y^{(j)}}(0) \le w$

Dowód przez indukcję zupełną względem j:

$$G_{Y^{(0)}}(0) = 0 \le w$$

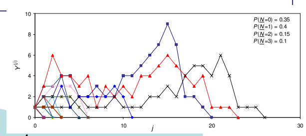
$$G_{Y^{(j-1)}}(0) \le w \;\Rightarrow\; G_{Y^{(j)}}(0) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(0)] \le G_N(w) = w$$



• Zatem jeżeli $E\underline{N} > 1$, to prawdopodobieństwo ponownego opróżnienia stosu jest <u>najmniejszym</u> rozwiązaniem ww. równania
(czyli istnieje niezerowe prawdopodobieństwo, że stos nie opróżni się już nigdy)

Opróżnianie stosu

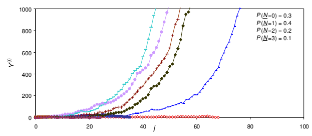
$$\Pi = G_N[\Pi]$$



na przykład:

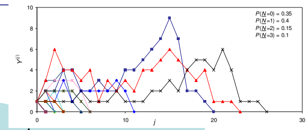
$\Pi = 0.35 + 0.4\Pi + 0.15\Pi^2 + 0.1\Pi^3$ ($E\underline{N} = 1.0$) $\Rightarrow \Pi = 1$

$\Pi = 0.3 + 0.4\Pi + 0.2\Pi^2 + 0.1\Pi^3$ ($E\underline{N} = 1.1$) $\Rightarrow \Pi = 0.791$ lub $\Pi = 1$



Opróżnianie stosu

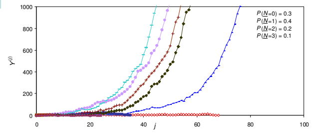
$$\Pi = G_N[\Pi]$$



na przykład:

$\Pi = 0.35 + 0.4\Pi + 0.15\Pi^2 + 0.1\Pi^3$ ($E\underline{N} = 1.0$) $\Rightarrow \Pi = 1$

$\Pi = 0.3 + 0.4\Pi + 0.2\Pi^2 + 0.1\Pi^3$ ($E\underline{N} = 1.1$) $\Rightarrow \Pi = 0.791$ lub $\Pi = 1$



spróbujemy ambitniej?

Jaki rozkład prawdopodobieństwa ma $\underline{Y}^{(\infty)}$?

Opróżnianie stosu

Jaki rozkład prawdopodobieństwa ma $\underline{Y}^{(\infty)}$?

Wracamy do równania $G_{Y^{(j)}}(z) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(z)], \quad j = 1,2,\ldots$

– co możemy z niego wywnioskować?

Jeżeli istnieje granica $G_{Y^{(\infty)}}(z)$, to spełnia równanie

$$G_{Y^{(\infty)}}(z) = G_N[G_{Y^{(\infty)}}(z)]$$

na przykład:

$$G_{Y^{(\infty)}}(z) = 0.3 + 0.4G_{Y^{(\infty)}}(z) + 0.2\left(G_{Y^{(\infty)}}(z)\right)^2 + 0.1\left(G_{Y^{(\infty)}}(z)\right)^3$$

Opróżnianie stosu

Jaki rozkład ma $\underline{Y}^{(\infty)}$?

Wracamy do równania $G_{Y^{(j)}}(z) = G_N[G_{Y^{(j-1)}}(z)], \quad j = 1,2,...$

– co możemy z niego wywnioskować?

Jeżeli istnieje granica $G_{Y^{(\infty)}}(z)$, to spełnia równanie

$$G_{Y^{(\infty)}}(z) = G_N[G_{Y^{(\infty)}}(z)]$$

na przykład:

$$G_{Y^{(\infty)}}(z) = 0.3 + 0.4G_{Y^{(\infty)}}(z) + 0.2\left(G_{Y^{(\infty)}}(z)\right)^2 + 0.1\left(G_{Y^{(\infty)}}(z)\right)^3$$

$$\Rightarrow G_{Y^{(\infty)}}(z) = const.$$

$$G_{Y^{(\infty)}}(z) = P(\underline{Y}^{(\infty)} = 0) + P(\underline{Y}^{(\infty)} = 1)z + P(\underline{Y}^{(\infty)} = 2)z^2 + P(\underline{Y}^{(\infty)} = 3)z^3 + P(\underline{Y}^{(\infty)} = 4)z^4 + ...$$

a zatem…?!