





Entregar as soluções dos exercícios  para o email `walner+comb@mat.ufc.br`.

 **Exercício 1.** Mostre que qualquer subconjunto  $A \subset [2n]$  de tamanho  $n+1$  contém dois números coprimos.


 **Exercício 2.** Seja  $\mathcal{A}$  uma família de subconjuntos de  $[n]$  tal que  $A \cap B \neq \emptyset$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ . Conclua que  $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-1}$ .


 **Exercício 3.** Mostre que em qualquer coloração das arestas de  $K_7$  usando apenas duas cores (vermelho e azul), existe um triângulo vermelho ou um  $C_4$  azul. Mostre que o mesmo não ocorre em  $K_6$ .


 **Exercício 4.** Seja  $G$  um grafo simples. Mostre que existem dois vértices  $u, v \in V(G)$  com  $d_G(u) = d_G(v)$ .


 **Exercício 5.** Mostre que um grafo e seu complemento não podem ser ambos desconexos.


 **Exercício 6.** Mostre que  $e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .

 **Exercício 7.** Mostre que se  $G$  é um grafo com pelo menos  $v(G)$  arestas, então  $G$  possui um ciclo.

 **Exercício 8.** Prove que uma árvore  $T$  tem ao menos  $\Delta(T)$  folhas.


 **Exercício 9.** Mostre que todo grafo com  $n$  vértices e pelo menos  $\binom{n-1}{2} + 1$  arestas é conexo.


 **Exercício 10.** Mostre que toda floresta com exatamente  $k$  árvores tem  $n - k$  arestas.


 **Exercício 11.** Seja  $k \in \mathbb{N}$  e seja  $T$  uma árvore com  $k+1$  vértices. Prove que se  $G$  é um grafo com  $\delta(G) \geq k$ , então  $T \subset G$ .

 **Exercício 12.** Prove que se  $G$  é um grafo conexo, então  $G$  possui um caminho de comprimento

$$k = \min \{2\delta(G), n-1\}.$$

 **Exercício 13.** Prove que se  $G$  é um grafo com  $\alpha(G) \leq k$ , então existem  $k$  caminhos em  $G$  que são disjuntos em vértices e que cobrem todos os vértices de  $G$ .

 **Exercício 14.** Dados  $1 \leq k \leq n$  inteiros positivos, considere o grafo  $G_{n,k}$  obtido a partir de  $K_n$  removendo todas as arestas dentro de um conjunto de vértices qualquer de tamanho  $k$ . Determine  $\chi(G_{n,k})$ .

 **Exercício 15.** Mostre que em qualquer coloração das arestas de  $K_n$  com duas cores, existem dois caminhos monocromáticos  $P$  e  $Q$  que são disjuntos em vértices e que  $V(K_n) = V(P) \cup V(Q)$ .