

notas de aula

# Matemática Discreta

Prof. Walner Mendonça

Universidade Federal do Ceará

Setembro de 2025



# Capítulo 1

## Lógica proposicional

Uma *proposição* é simplesmente uma afirmação que é ou *verdadeira* ou *falsa*. Dizemos que uma proposição tem o *valor-verdade*  $V$  se ela for verdadeira; do contrário, a proposição é falsa e dizemos que ela tem o valor-verdade  $F$ . Em geral, usamos letras minúsculas tais como  $p$ ,  $q$  e  $r$  para indicar proposições.

**Exemplo 1.** As seguintes afirmações são proposições:

$p$  : *Uma hora tem 60 minutos.*

$q$  : *Futebol é uma religião.*

$r$  : *Tomate é uma fruta.*

$s$  : *O mundo acabará em 2100.*

$t$  : *Três é um número par.*

As proposições  $p$  e  $r$  são verdadeiras, logo têm o valor-verdade  $V$ . Já as proposições  $q$  e  $t$  são falsas, portanto têm o valor-verdade  $F$ . Não conseguimos estabelecer se a proposição  $s$  é verdadeira ou falsa, pois ela é uma afirmação cuja veracidade não temos como verificar. De qualquer forma,  $s$  tem um valor-verdade, seja ele  $V$  ou  $F$ . Mas só seremos capazes de determinar o valor-verdade de  $s$  quando o ano de 2100 tiver se passado.

*Nota 1.* Na escrita de textos matemáticos, é comum enunciar certos fatos matemáticos que são verdadeiros como *proposições*, embora nem toda proposição precisa ser verdadeira.

**Exemplo 2.** Frases que não afirmam nada não podem ser consideradas proposições. Por exemplo,

$p$  : *Lembre-se de beber água.*

$q$  : *Qual é o seu nome?*

$r$  : *Você só estuda?!*

$s$  : *Bom dia!*

A frase  $p$  não faz nenhuma afirmação, trata-se apenas de um lembrete. Aliás, beba uma aguinha agora! A frase  $q$  é apenas uma pergunta, não uma afirmação. Quanto à frase  $r$ , ainda que seja verdade que “você só estuda”, ela também trata-se de uma pergunta. Mesmo que o seu dia esteja sendo bom, a frase  $s$  não tem o propósito de fazer uma afirmação, mas sim um desejo.

### Definição 1

A *negação* de uma proposição  $p$  é a proposição a qual denotamos por  $\neg p$  e que correspondente a seguinte afirmação:

$\neg p$  : **Não** é verdade que  $p$ .

O valor-verdade de  $\neg p$  é o oposto ao valor-verdade de  $p$ .

Em geral, podemos reafirmar a proposição  $\neg p$  simplesmente negando o verbo da oração que define  $p$ . A proposição obtida desta forma afirma a mesma coisa que a proposição definida acima.

**Exemplo 3.** Se  $p$  é a proposição dada no Exemplo 1, então  $\neg p$  corresponde à afirmação

$\neg q$  : **Não é verdade que** uma hora tem 60 minutos.

Que também pode ser reescrita da seguinte forma.

$\neg q$  : Uma hora **não** tem 60 minutos.

Da mesma forma, a negação da proposição  $q$  dada no Exemplo 1 é a seguinte:

$\neg s$  : **Não é verdade que** o mundo acabará em 2100.

Ou, de forma equivalente,

$\neg s$  : O mundo **não** acabará em 2100.

A Tabela 1.1 lista as possibilidades para os valores-verdade de  $p$  e  $\neg p$ . Tabelas desse tipo são chamadas de *tabela verdade*. O propósito de uma tabela verdade é listar todas as possibilidades dos valores-verdade de um conjunto de proposições. Em geral, as proposições representadas na tabela verdade são dependentes uma da outra, no sentido de que o valor-verdade de uma pode depender do valor-verdade de outra. Desta forma, apenas listamos os valores-verdade que cada proposição pode obter quando levamos em conta as dependências com as demais proposições envolvidas. Por isso que na Tabela 1.1 apenas temos duas linhas, e não quatro, pois  $\neg p$  não pode assumir o valor-verdade V quando  $p$  tem o valor-verdade V; nem pode  $\neg p$  ter o valor-verdade F, quando  $p$  tem o valor-verdade F.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 1.1: Tabela verdade de  $\neg p$ .

## 1.1 Proposições compostas

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , podemos construir uma terceira proposição com base nas proposições  $p$  e  $q$  de diversas formas possíveis e dizemos que a proposição resultante é uma *composição* de  $p$  e  $q$ . Algumas dessas formas de compor proposições são bem comuns e recebem notações especiais, os quais chamamos de *conectivos binários*. Os conectivos binários mais importantes são:  $\wedge$  (conjunção),  $\vee$  (disjunção),  $\rightarrow$  (condicional) e  $\leftrightarrow$  (bicondicional).

*Nota 2.* A negação  $\neg$  também é considerada um conectivo, mas ela não é um conectivo binário, pois ela não atua como uma composição de duas proposições.

### Definição 2

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , a *conjunção* de  $p$  e  $q$ , o qual denotamos por  $p \wedge q$ , é a proposição que corresponde a seguinte afirmação:

$p \wedge q$ : É verdade que  $p$  e que  $q$ .

O valor-verdade de  $p \wedge q$  é V quando ambos  $p$  e  $q$  são verdadeiros; caso contrário, é F (vide Tabela 1.2).

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.2: Tabela verdade de  $p \wedge q$ .

Em geral, escrevemos a proposição  $p \wedge q$  simplesmente juntando as duas orações que definem  $p$  e  $q$  e as conectando com a conjunção *e*.

**Exemplo 4.** Considere as seguintes proposições.

$p$  : *Estudei para a prova.*

$q$  : *Fui aprovado na disciplina.*

A conjunção de  $p$  e  $q$  corresponde a seguinte afirmação:

$p \wedge q$  : ***É verdade que estudei para a prova e que fui aprovado na disciplina.***

Que também pode ser expressa da seguinte forma:

$p \wedge q$  : *Estudei para a prova e fui aprovado na disciplina.*

Na Língua Portuguesa, a conjunção *mas* também tem a mesma função que a conjunção *e*. Entretanto, usamos a primeira, em geral, para expressar ideias adversativas e a segunda para expressar ideias aditivas. Por exemplo, do ponto de vista lógico, a seguinte afirmação é equivalente à proposição  $p \wedge q$  descrita no Exemplo 4:

$p \wedge q$  : *Estudei para a prova, mas fui aprovado na disciplina.*

Você provavelmente deve achar a frase acima estranha. De fato, o uso da conjunção *mas* sugere que a segunda oração, a qual corresponde à proposição  $q$ , expressa algo que contrasta com a primeira proposição. Mas este não é o caso na frase acima. A proposição  $q$  do exemplo em questão não contrasta com a proposição  $p$ . Contudo, a frase não está errada; podemos, de fato, escrever desta forma para expressar  $p \wedge q$ . Mas isso apenas tornaria a frase confusa. Portanto, reservamos o uso do *mas* para a conjunção de proposições antagonistas.

### Definição 3

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , a *disjunção* de  $p$  e  $q$ , a qual denotamos por  $p \vee q$ , é a proposição que corresponde a seguinte afirmação:

$p \vee q$  : *É verdade que ***p*** ou que *q*.*

O valor-verdade de  $p \vee q$  é F quando ambos  $p$  e  $q$  são falsos; caso contrário, é V (vide Tabela 1.3).

É comum alunos se confundirem com os dois símbolos  $\vee$  e  $\wedge$ . De fato, à primeira vista a escolha destes símbolos parece um pouco arbitrária, mas eles são baseados nos dois símbolos  $\cup$  e  $\cap$  que representam a união e a interseção de dois conjuntos, respectivamente. Veremos mais à frente, quando tratarmos de conjuntos, como se dá essa conexão entre os conectivos lógicos e as operações entre conjuntos.

Em geral, escrevemos a proposição  $p \vee q$  simplesmente juntando as duas orações que definem  $p$  e  $q$  e as conectando com a conjunção *ou*.

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.3: Tabela verdade de  $p \vee q$ .

**Exemplo 5.** Considere as seguintes proposições.

$p$  : Hoje temos aula de Matemática Discreta.

$q$  : Hoje temos aula de Cálculo.

A disjunção de  $p$  e  $q$  corresponde à afirmação

$p \vee q$  : **É verdade que** hoje temos aula de Matemática Discreta  
**ou que** hoje temos aula de Cálculo.

Ou, simplificando, podemos também escrever da seguinte forma:

$p \vee q$  : Hoje temos aula de Matemática Discreta **ou** de Cálculo.

Note que mesmo que hoje tenhamos, de fato, aula de Matemática Discreta, ao afirmarmos que  $p \vee q$  é uma proposição verdadeira, não impedimos que também tenhamos aula de Cálculo hoje.

Veja que o *ou* em lógica expressa a possibilidade de que pelo menos uma das proposições sejam verdadeiras, o que também inclui o caso em que ambas as proposições são verdadeiras. Por isto, também dizemos que  $\vee$  é uma *disjunção inclusiva*. Na linguagem coloquial, entretanto, muitas das vezes o *ou* expressa a possibilidade de que apenas uma das proposições seja verdadeira. Por exemplo, imagine que você está em um restaurante e o garçom explica as opções do prato do dia:

— O prato de hoje é filé de frango grelhado. Como acompanhamento, o senhor prefere purê de batata *ou* salada?

Neste contexto, o *ou* indica que as opções apresentadas são mutuamente exclusivas, isto é, apenas uma delas deve ser escolhida. Do ponto de vista lógico, não estaria errado responder que você prefere os dois. Contudo, a intenção do garçom era lhe apresentar as duas únicas opções de acompanhamento e ele espera que apenas uma dentre as duas opções fosse escolhida. Também não estaria errado você responder o garçom da seguinte forma:

— *Isso, prefiro purê de batata ou salada.*

Ao responder desta forma, você estaria indicando que a afirmação “você prefere purê de bata ou salada” está correta, pois você de fato prefere ter um destas duas opções como acompanhamento, ao invés de ter uma terceira opção, mesmo que esta não tenha sido apresentada.

Outro exemplo, imagine que você pediu instruções a um matemático de como chegar na Biblioteca Central do campus do pici. Você então pergunta:

— *Quando eu chegar na rotatória, eu devo seguir na primeira saída da rotatória ou na segunda?*

E o matemático então responde:

— *Exatamente, você deve seguir em uma das duas primeiras saídas.*

Obviamente, ao fazer a pergunta você utilizou o *ou* de forma exclusiva, e portanto, você esperaria que o matemático indicasse quais dentre as duas possibilidades apresentadas está correta. Mas matemáticos, em geral, assumem que o *ou* é inclusivo. Para indicar um *ou* exclusivo, eles em geral diriam a frase de uma forma um pouco diferente.

#### Definição 4

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , a *disjunção exclusiva* de  $p$  e  $q$ , a qual denotamos por  $p \oplus q$ , é a proposição que corresponde a seguinte afirmação:

$p \oplus q$ : *É verdade que **ou**  $p$  **ou**  $q$ , mas não ambos.*

O valor-verdade de  $p \oplus q$  é **V** quando  $p$  e  $q$  possuem valores-verdade distintos; caso contrário, é **F** (vide Tabela 1.4).

$p$	$q$	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.4: Tabela verdade de  $p \oplus q$  (ou exclusivo).

Em geral, escrevemos a proposição  $p \oplus q$  de uma das seguintes formas possíveis:



“Ou  $p$  ou  $q$ .”

“Ou  $p$  ou  $q$ , mas não ambos.”

**Exemplo 6.** Considere as proposições  $p$  e  $q$  do Exemplo 5. A disjunção exclusiva de  $p$  e  $q$  corresponde à afirmação

$p \oplus q$  : **Ou** hoje temos aula de Matemática Discreta  
**ou** hoje temos aula de Cálculo.

Ou, simplificando, podemos também escrever da seguinte forma:

$p \oplus q$  : Hoje temos aula de **ou** Matemática Discreta **ou** Cálculo.

Note que se for constatado que hoje teremos aula de Matemática Discreta, ao afirmarmos que  $p \oplus q$  é uma proposição verdadeira, impedimos que também tenhamos aula de Cálculo hoje.

#### Definição 5

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , a proposição *condicional* de  $p$  e  $q$ , a qual denotamos por  $p \rightarrow q$ , é a proposição que corresponde a seguinte afirmação:

$p \rightarrow q$  : **Se** é verdade que  $p$ , **então** é verdade que  $q$ .

A proposição  $p$  é chamada de *hipótese* (ou *premissa*) e  $q$  é a *tese* (ou *consequência*). O valor-verdade de  $p \rightarrow q$  é F quando  $p$  é verdadeiro e  $q$  é falso; caso contrário, é V (vide Tabela 1.5).

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.5: Tabela verdade de  $p \rightarrow q$ .

É comum expressar uma proposição condicional  $p \rightarrow q$  de diversas formas distintas. A seguinte lista contém apenas algumas das possíveis expressões que você poderá encontrar em muitos dos textos matemáticos.

<i>“Se <math>p</math>, então <math>q</math>.”</i>	<i>“<math>q</math>, se <math>p</math>.”</i>
<i>“<math>p</math> implica <math>q</math>.”</i>	<i>“<math>q</math> segue de <math>p</math>.”</i>
<i>“Sempre que <math>p</math>, <math>q</math>.”</i>	<i>“<math>q</math> sempre que <math>p</math>.”</i>
<i>“<math>p</math> é suficiente para <math>q</math>.”</i>	<i>“<math>q</math> é necessário para <math>p</math>.”</i>
<i>“Uma condição necessária para <math>p</math> é <math>q</math>.” “uma condição suficiente para <math>q</math> é <math>p</math>.”</i>	

**Exemplo 7.** Considere as seguintes proposições.

$p$  : *Guilherme passou em Matemática Discreta.*

$q$  : *Guilherme irá fazer Combinatória no próximo semestre.*

A proposição condicional de  $p$  e  $q$  corresponde à afirmação

$p \rightarrow q$  : ***Se*** *Guilherme passou em Matemática Discreta,*  
***então*** *ele irá fazer Combinatória no próximo semestre.*

Podemos também escrever a proposição resultante da seguinte forma:

$p \rightarrow q$  : *Guilherme irá fazer Combinatória no próximo semestre,*  
***se*** *ele passou em Matemática Discreta.*

Ou ainda,

$p \rightarrow q$  : ***A fim de que*** *Guilherme faça Combinatória no próximo semestre,*  
***é suficiente que*** *ele tenha passado em Matemática Discreta.*

Note que ao afirmarmos que  $p \rightarrow q$  é uma proposição verdadeira, não impedimos que a conclusão  $q$  seja verdadeira quando a hipótese  $p$  é falsa. Portanto, mesmo que Guilherme não tenha passado em Matemática Discreta, ele ainda poderá fazer Combinatória no próximo semestre. Agora, caso seja verdade que Guilherme passou em Matemática Discreta, devemos ter que é verdade que ele irá fazer Combinatória no próximo semestre; do contrário, a proposição  $p \rightarrow q$  será falsa.

A *recíproca* de uma proposição condicional  $p \rightarrow q$  é a proposição  $q \rightarrow p$  obtida trocando-se a hipótese pela tese. Em geral, a veracidade de  $p \rightarrow q$  não garante a veracidade de  $q \rightarrow p$ , como podemos ver no exemplo seguinte.

**Exemplo 8.** Considere a seguinte proposição condicional verdadeira:

$p \rightarrow q$  : *Se um polígono é um quadrado, então ele é um retângulo.*

A recíproca da proposição condicional acima é a seguinte:

$q \rightarrow p$  : Se um polígono é um retângulo, então ele é um quadrado.

Esta proposição é falsa. Nem todo retângulo é um quadrado. Isso exemplifica que podemos ter proposições condicionais verdadeiras cuja recíproca seja falsa.

Podemos entender a proposição  $p \rightarrow q$  como uma afirmação de que  $p$  é uma condição *mais forte* que  $q$ . O sentido de *força* aqui é que, se a condicional for verdadeira, a veracidade de  $p$  garante a veracidade de  $q$ . É importante notar que essa relação de força não é, necessariamente, mútua. A veracidade de  $p \rightarrow q$  não implica na veracidade de  $q \rightarrow p$ . De fato, a situação em que ambas as condicionais são verdadeiras é descrita pelo próximo conectivo lógico.

### Definição 6

Dado duas proposições  $p$  e  $q$ , a *bicondicional* de  $p$  e  $q$ , a qual denotamos por  $p \leftrightarrow q$ , é a proposição que corresponde a seguinte afirmação:

$p \leftrightarrow q$  : É verdade que  $p$  **se, e somente se**, é verdade que  $q$ .

O valor-verdade de  $p \leftrightarrow q$  é V quando  $p$  e  $q$  possuem o mesmo valor-verdade; caso contrário, é F (vide Tabela 1.6).

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.6: Tabela verdade de  $p \leftrightarrow q$ .

Assim como a condicional, a proposição bicondicional  $p \leftrightarrow q$  também pode ser expressa de diversas formas. A seguinte lista contém algumas das expressões mais comuns.

“ $p$  se, e somente se,  $q$ .”

“ $p$  se, e só se,  $q$ .”

“ $p$  é equivalente a  $q$ .”

“Se  $p$  então  $q$ , e reciprocamente.”

“ $p$  é condição necessária e suficiente para  $q$ .”

**Exemplo 9.** Considere as duas proposições  $p$  e  $q$  do Exemplo 7. A proposição bicondicional de  $p$  e  $q$  corresponde à afirmação:

$p \leftrightarrow q$  : *Guilherme passou em Matemática Discreta **se, e somente se,** ele irá fazer Combinatória no próximo semestre.*

Podemos também escrever a proposição resultante da seguinte forma:

$p \leftrightarrow q$  : *Ter passado em Matemática Discreta é **condição necessária e suficiente** para Guilherme fazer Combinatória no próximo semestre.*

Ou ainda, de forma mais direta:

$p \leftrightarrow q$  : *Guilherme ter passado em Matemática Discreta é **equivalente a** ele fazer Combinatória no próximo semestre.*

Note que ao afirmarmos que  $p \leftrightarrow q$  é uma proposição verdadeira, criamos uma ligação muito mais forte do que na condicional. Agora, as duas proposições são inseparáveis: elas devem ter sempre o mesmo valor-verdade. Portanto, se Guilherme não passou em Matemática Discreta ( $p$  é Falso), ele obrigatoriamente não poderá fazer Combinatória no próximo semestre ( $q$  também deve ser Falso) para que a proposição bicondicional seja verdadeira. Da mesma forma, caso seja verdade que Guilherme passou em Matemática Discreta, devemos ter que é verdade que ele irá fazer Combinatória no próximo semestre. Qualquer combinação em que uma proposição seja verdadeira e a outra falsa tornaria a proposição  $p \leftrightarrow q$  falsa.

É possível definir alguns outros conectivos lógicos (tais como *NAND* ou *NOR*), mas os cinco apresentados acima são os mais usados e serão suficientes para os nossos propósitos. Veremos na próxima seção como eles se relacionam entre si. A Tabela 1.7 reúne os valores-verdade dos cinco conectivos.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Tabela 1.7: Tabela-verdade resumo dos conectivos lógicos.

## 1.2 Equivalência proposicional

Agora que sabemos como compor proposições, podemos formar proposições complexas envolvendo vários conectivos lógicos e outras proposições. Por exemplo, suponha que  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são proposições. Considere a seguinte proposição:

$$q : (\neg(p_1 \rightarrow p_2)) \wedge (\neg p_2 \vee p_3).$$

Veja que usamos os parênteses para indicar a ordem em que os conectivos devem ser consideradas. No caso, os parênteses indicam que a fim de determinarmos o valor-verdade da proposição  $r$ , precisamos determinar o valor-verdade da conjunção entre as seguintes duas proposições:

$$\begin{aligned} r &: \neg(p_1 \rightarrow p_2), \\ s &: \neg p_2 \vee p_3, \\ q &: r \wedge s. \end{aligned}$$

Agora, a fim de determinarmos o valor-verdade da proposição  $r$ , precisamos determinar o valor-verdade da negação da seguinte proposição.

$$\begin{aligned} t &: p_1 \rightarrow p_2, \\ r &: \neg t. \end{aligned}$$

Quanto à proposição  $s$ , note que a princípio, poderíamos interpretar que o conectivo  $\neg$  está negando a proposição  $p_2 \vee p_3$ . Mas se este fosse o caso, escreveríamos  $\neg(p_2 \vee p_3)$  no lugar de  $\neg p_2 \vee p_3$ . Portanto, para determinarmos o valor-verdade de  $s$ , precisamos determinar o valor verdade da seguinte disjunção.

$$\begin{aligned} u &: \neg p_2, \\ s &: u \vee p_3. \end{aligned}$$

Agora só nos restas considerar os possíveis valores-verdades de  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  para determinarmos  $u$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $r$  e por fim,  $q$ .

Mais geralmente, se uma proposição  $q$  é dada como composições de proposições  $p_1, \dots, p_n$  por meio de conectivos lógicos, então dizemos que  $q$  é uma *expressão lógica* e que  $p_1, \dots, p_n$  são as suas *variáveis proposicionais*.

### Definição 7

Uma *tautologia* é uma expressão lógica cujo valor-verdade é sempre V, seja qual for o valor-verdade das variáveis proposicionais. Uma *contradição* é uma expressão lógica cuja negação é uma tautologia.

**Exemplo 10.** A expressão  $p \vee \neg p$  é uma tautologia. De fato, o famoso dilema de Hamlet sobre a vida e a morte era, em sua essência, uma tautologia:

— *Ser ou não ser, eis a questão.*

Já a expressão  $p \wedge \neg p$  é uma contradição, fundamentada no princípio de que é impossível que algo, ao mesmo tempo, *seja e não seja*.

### Definição 8

Duas expressões lógicas  $p$  e  $q$  são ditas *logicamente equivalentes* se  $p \leftrightarrow q$  for uma tautologia. Denotamos  $p \equiv q$  para indicar que  $p$  e  $q$  são logicamente equivalentes.

Podemos verificar que duas proposições  $p$  e  $q$  são logicamente equivalentes analisando a tabela-verdade das proposições e das variáveis proposicionais que as definem. Se as colunas correspondentes à  $p$  e à  $q$  são iguais, então é porque elas são equivalentes.

**Exemplo 11.** As expressões  $p \rightarrow q$  e  $\neg p \vee q$  são logicamente equivalentes. Podemos verificar esta equivalência construindo uma tabela-verdade e comparando os resultados de cada expressão para todas as combinações de valores-verdade das variáveis proposicionais  $p$  e  $q$ . Como as colunas finais para  $p \rightarrow q$  e  $\neg p \vee q$  na Tabela 1.8 são idênticas, as duas proposições são logicamente equivalentes.

$p$	$q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tabela 1.8: Tabela-verdade comparando  $p \rightarrow q$  e  $\neg p \vee q$ .

**Exemplo 12.** As expressões  $p \rightarrow q$  e  $\neg q \rightarrow \neg p$  também são logicamente equivalentes. Dizemos que a expressão  $\neg q \rightarrow \neg p$  é a *contrapositiva* da proposição  $p \rightarrow q$ . Por exemplo, considere a proposição dada no Exemplo 9:

$p \rightarrow q$ : *Se um polígono é um quadrado, então ele é um retângulo.*

Sua contrapositiva corresponde à seguinte proposição:

$\neg q \rightarrow \neg p$  : Se um polígono **não** é um retângulo, então ele **não** é um quadrado.

A Tabela 1.9 contém uma lista de equivalências lógicas que são comumente utilizadas para simplificar a análise de expressões lógicas complexas. Encorajamos o leitor a verificar formalmente cada uma das propriedades.

Tabela 1.9: Equivalências Lógicas.

Propriedade	Equivalências
Elemento neutro	$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$
	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Dominação	$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Idempotência	$p \vee p \equiv p$
	$p \wedge p \equiv p$
Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Comutatividade	$p \vee q \equiv q \vee p$
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Associatividade	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributividade	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negação	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$
	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

## 1.3 Predicados e Quantificadores

Até agora, lidamos com proposições, que são afirmações com um valor-verdade fixo, seja ele V ou F. Contudo, a lógica proposicional é limitada para analisar afirmações cuja veracidade depende de *variáveis*. Por exemplo, considere a seguinte afirmação:

$P(x)$  : O número inteiro positivo  $x$  é um número par.

Indicamos a afirmação acima por  $P(x)$  porque  $x$  é um número que a princípio não conhecemos ou que não foi explicitado e a afirmação depende totalmente do valor que  $x$  pode assumir. De modo que para cada valor de  $x$ , a afirmação  $P(x)$  assume um valor-verdade e portanto se torna uma proposição. Por exemplo,  $P(2)$  é uma proposição verdadeira, enquanto que  $P(3)$  é uma proposição falsa. A seguinte definição estende esse conceito para proposições mais gerais.

### Definição 9

Um *predicado* é uma afirmação que contém uma ou mais *variáveis* e que se torna uma proposição (ou seja, adquire um valor-verdade V ou F) quando valores ou objetos específicos são atribuídos às suas variáveis. O *domínio* de uma variável é o conjunto de valores ou objetos que a variável pode assumir.

Frequentemente, representamos um predicado por uma letra maiúscula seguida das variáveis entre parênteses, como  $P(x)$  ou  $Q(x, y)$ . A fim de que um predicado esteja bem definido, é preciso explicitar o domínio de suas variáveis. Por exemplo, o predicado  $P(x)$  dado como exemplo no início desta seção tem como domínio de suas variáveis o conjunto dos inteiros positivos.

**Exemplo 13.** Considere o seguintes predicados:

$P(x, y)$  : Os números reais  $x$  e  $y$  são tais que  $x = y/2$ .

$Q(A)$  : O conjunto  $A$  contém dois elementos.

$R(x)$  :  $x^2 \neq 2$ .

O predicado  $P$  explicita o seu domínio como o conjunto dos pares de números reais  $(x, y)$ . Já o predicado  $Q$  não deixa claro o seu domínio, mas podemos assumir que é a classe dos conjuntos. Da mesma forma,  $R$  não define o seu domínio. E neste caso, há diversas possibilidades razoáveis para a escolha do domínio de  $R$ . Por exemplo, podemos assumir que o domínio é o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números racionais. No primeiro caso,  $R(x)$  é sempre falso, qualquer que seja o valor de  $x$ . No segundo caso,  $x = \sqrt{2}$  é um valor para o qual  $R(x)$  é verdadeiro. Portanto, é importante deixar claro na definição de um predicado o seu domínio:



$R(x) :$  O número real  $x$  é tal que  $x^2 \neq 2$ .

Em lógica, predicados expressam propriedades ou relações. Contudo, para determinar a extensão em que uma propriedade é válida – se para todos os elementos de um conjunto ou para ao menos um – é necessário o uso de *quantificadores*.

#### Definição 10

Seja  $P(x)$  um predicado e  $D$  o domínio de  $x$ . A *quantificação universal* de  $P(x)$ , o qual denotamos por  $\forall x P(x)$ , corresponde à proposição dada pela seguinte afirmação:

$\forall x P(x) :$  **Para todo**  $x \in D$ , é verdade que  $P(x)$ .

Quando queremos deixar claro o domínio de  $x$ , podemos denotar também  $\forall x \in D, P(x)$ .

Note que  $\forall x P(x)$  é uma proposição falsa se, e somente se, houver algum  $x \in D$  para o qual  $P(x)$  é falso. Um elemento  $x \in D$  para o qual  $P(x)$  é falso é chamado de *contraexemplo*.

**Exemplo 14.** Considere o seguinte predicado  $P(x)$ , cujo o domínio de  $x$  é o conjunto  $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ :

$P(x) :$   $x$  é um número primo.

Então a proposição  $\forall x P(x)$  é verdadeira, pois todo número  $x \in D$  é de fato um número primo. Agora suponha que o domínio de  $x$  é o conjunto dos números inteiros positivos. Então, neste caso, a proposição  $\forall x P(x)$  passa a ser falsa, pois  $x = 4$  é um exemplo de um elemento no domínio de  $x$  para o qual  $P(x)$  é falso.

Um outro quantificador importante é o seguinte.

#### Definição 11

Seja  $P(x)$  um predicado e  $D$  o domínio de  $x$ . A *quantificação existencial* de  $P(x)$ , o qual denotamos por  $\exists x P(x)$ , corresponde à proposição dada pela seguinte afirmação:

$\exists x P(x) :$  **Existe**  $x \in D$  para o qual é verdade que  $P(x)$ .

Quando queremos deixar claro o domínio de  $x$ , podemos denotar também  $\exists x \in D, P(x)$ .

Note que  $\exists xP(x)$  é uma proposição falsa se, e somente se,  $\forall x(\neg P(x))$  for verdadeiro.

**Exemplo 15.** Considere o seguinte predicado  $P(x)$ , cujo o domínio de  $x$  é o conjunto  $D = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ :

$P(x) : x \text{ é um número composto.}$

Então a proposição  $\exists xP(x)$  é verdadeira, pois se tomarmos  $x = 8$ , então temos que  $P(x)$  é verdadeiro. Agora suponha que o domínio de  $x$  é o conjunto dos números primos. Então, neste caso, a proposição  $\exists xP(x)$  passa a ser falsa, pois todo número  $x$  não é composto, e portanto  $\forall(\neg P(x))$  é verdadeiro.

Observe que, de maneira mais geral, a negação da proposição  $\exists xP(x)$  é a proposição  $\forall x(\neg P(x))$ . Pois a fim de que  $\exists xP(x)$  seja falso, devemos ter  $P(x)$  falso para todo  $x$  em seu domínio. Por outro lado, a negação da proposição  $\forall xP(x)$  é a proposição  $\exists x(\neg P(x))$ . Pois agora, a fim de que  $\forall xP(x)$  seja falso, devemos ter  $P(x)$  falso para algum  $x$  em seu domínio. O símbolo  $\nexists$  é uma notação bastante comum para a negação do quantificador existencial. O equivalente para o quantificador universal já não é tão comum.

Podemos combinar os quantificadores lógicos para formular expressões lógicas mais complexas. Por exemplo, se  $P(x, y)$  é um predicado com duas variáveis  $x$  e  $y$  cujos domínios são  $X$  e  $Y$ , respectivamente, então podemos considerar a seguinte proposição

$\forall x \exists y P(x, y) : \text{Para todo } x \in X, \text{ existe } y \in Y \text{ para o qual é verdade que } P(x, y).$

De forma similar, podemos considerar a proposição  $\exists x \forall y P(x, y)$ , ou a proposição  $\forall x \forall y P(x, y)$ , ou ainda a proposição  $\exists x \exists y P(x, y)$ . Essas duas últimas, no caso em que as variáveis  $x$  e  $y$  possuem o mesmo domínio, é comum escrevermos apenas  $\forall x, y P(x, y)$  ou  $\exists x, y P(x, y)$ , por exemplo.

**Exemplo 16.** A definição de limite de uma função real é comumente formulada com a ajuda de quantificadores lógicos. Por exemplo, suponha que  $f$  é uma função real definida em um intervalo aberto contendo o número real  $a$ . Então dizemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se for verdade que para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe um número real  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ , sempre que  $x$  é um número real satisfazendo  $|x - a| \leq \delta$ . Podemos escrever isso da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} (|x - a| \leq \delta \rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

A negação da proposição acima então toma a seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L : \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} (|x - a| \leq \delta \wedge |f(x) - L| > \varepsilon).$$

Em particular, dizemos que o limite de  $f$  em  $a$  existe se  $\exists L \in \mathbb{R} (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L)$ . Portanto, o simples fato de que existe o limite de uma função em um ponto específico envolve quatro quantificadores lógicos.

Por fim, definimos um último quantificador que é uma variante do quantificador existencial.

### Definição 12

Seja  $P(x)$  um predicado e  $D$  o domínio de  $x$ . A *quantificação de unicidade* de  $P(x)$ , o qual denotamos por  $\exists!xP(x)$ , corresponde à proposição dada pela seguinte afirmação:

$$\exists!xP(x) : \textbf{Existe um único } x \in D \text{ para o qual é verdade que } P(x).$$

Quando queremos deixar claro o domínio de  $x$ , podemos denotar também  $\exists!x \in D, P(x)$ .

Em outras palavras,  $\exists!xP(x)$  significa que  $\exists xP(x)$  é uma proposição verdadeira e, adicionalmente, se  $x$  e  $y$  são variáveis para os quais  $P(x)$  e  $P(y)$  são ambos verdadeiros, então devemos ter  $x = y$ . Podemos expressar isto da seguinte forma:

$$\exists!xP(x) : (\exists xP(x)) \wedge (\forall x, y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y))).$$

**Exemplo 17.** Considere o seguinte predicado  $P(x)$ , cujo o domínio de  $x$  é o conjunto  $D = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ :

$$P(x) : x \text{ é um número primo.}$$

Então a proposição  $\exists!xP(x)$  é verdadeira, pois existe apenas um número primo pertencente ao conjunto  $D$ , a saber,  $x = 2$ . Agora suponha que o domínio de  $x$  é o conjunto dos números inteiros positivos. Então, neste caso, a proposição  $\exists!xP(x)$  passa a ser falsa, pois 2 e 3 são dois elementos no domínio de  $x$  para o qual  $P(x)$  é verdadeiro.

Note que a negação de  $\exists!xP(x)$  é equivalente a dizer que  $P(x)$  é falso, para todo  $x$ , ou que existem dois elementos distintos  $x$  e  $y$  no domínio para os quais temos  $P(x)$  e  $P(y)$  ambos verdadeiros. Isto é,

$$\neg \exists!xP(x) : (\forall x \neg P(x)) \vee (\exists x, y(P(x) \wedge P(y) \wedge (x \neq y))).$$