

Entregar para a monitora as soluções de 8 problemas a sua escolha.

**Problema 1.** Prove que a soma de três números inteiros consecutivos é divisível por 3.

**Problema 2.** Mostre que o produto de quatro números inteiros consecutivos mais 1 é um quadrado perfeito.

**Problema 3.** Prove que para todo inteiro  $n$ ,  $n^3 - n$  é divisível por 6.

**Problema 4.** Mostre que se a soma dos dígitos de um número inteiro  $n$  é divisível por 3, então  $n$  também é divisível por 3.

**Problema 5.** Prove que todo número primo, com exceção do 2 e do 3, pode ser escrito na forma  $6k + 1$  ou  $6k + 5$ , onde  $k$  é um número inteiro.

**Problema 6.** Para cada um dos pares de números abaixo  $a$  e  $b$ , calcule o máximo divisor comum  $d = \text{mdc}(a, b)$  e determine inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $ax + by = d$ .

$$(a) \ a = 56, b = 15 \quad (d) \ a = 1001, b = 77 \quad (g) \ a = 7919, b = 787$$

$$(b) \ a = 345, b = 299 \quad (e) \ a = -34, b = 432 \quad (h) \ a = 636, b = 96$$

$$(c) \ a = 101, b = -23 \quad (f) \ a = 1422, b = 342 \quad (i) \ a = 462, b = 1071$$

**Problema 7.** Seja  $a$  um inteiro. Prove que  $2a + 1$  e  $4a^2 + 1$  são primos entre si.

**Problema 8.** Prove que se  $a$  e  $b$  são números inteiros primos entre si, então  $a + b$  e  $a - b$  são primos entre si.

**Problema 9.** Prove que se  $a$  e  $b$  são números inteiros tais que  $a + b$  e  $a - b$  são primos entre si se, então  $a^2 - b^2$  e  $ab$  são primos entre si.

**Problema 10.** Mostre que se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números inteiros positivos tais que  $\text{mdc}(a, b) = 1$  e  $a|bc$ , então  $a|c$ .

**Problema 11.** Prove que se  $a$  e  $b$  são números inteiros, então  $2^a$  e  $2^b - 1$  são primos entre si.

**Problema 12.** Prove que se  $a$  e  $b$  são números inteiros tais que  $3a + 5b$  é divisível por 7, então  $a$  e  $b$  são primos entre si.

**Problema 13.** Sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $\mathbb{Z}_p$ , com  $p$  primo. Prove que se  $a \otimes b = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

**Problema 14.** Um número inteiro  $n$  é chamado de *número perfeito* se ele é igual à soma de seus divisores positivos (excluindo ele mesmo). Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois seus divisores próprios são 1, 2 e 3, e  $1 + 2 + 3 = 6$ . Prove que se  $2^a - 1$  é um número primo, então  $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$  é um número perfeito.

**Problema 15.** Recorde que  $\varphi(n)$  é a função totiente de Euler, que conta o número de inteiros positivos menores ou iguais a  $n$  que são primos com  $n$ . Prove que se  $p$  é um número primo e  $k$  é um inteiro positivo, então  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ .

**Problema 16.** Seja  $(G, *)$  um grupo. O centro de  $G$ , denotado por  $Z(G)$ , é o conjunto de todos os elementos de  $G$  que comutam com todos os outros elementos de  $G$ ; ou seja,

$$Z(G) = \{z \in G \mid z * g = g * z \text{ para todo } g \in G\}.$$

Prove que  $Z(G)$  é um subgrupo de  $G$ .

**Problema 17.** Prove que o centro do grupo  $(S_n, \circ)$  é trivial para  $n \geq 3$ , ou seja,  $Z(S_n) = \{\iota\}$ , onde  $\iota$  é a permutação identidade.

**Problema 18.** Prove que em um grupo finito, o número de elementos de ordem 2 é par.

**Problema 19.** Seja  $G$  um grupo abeliano finito. Prove que o conjunto dos elementos de ordem 2 em  $G$  forma um subgrupo de  $G$ .

**Problema 20.** Prove que se  $G$  é um grupo finito de ordem  $n$ , então para qualquer elemento  $g \in G$ ,  $g^n = e$ , onde  $e$  é o elemento identidade de  $G$ . Ademais, mostre que a ordem de qualquer elemento  $g$  divide  $n$ .

**Problema 21.** Dados dois subgrupos  $H$  e  $K$  de um grupo  $G$ , prove que a interseção  $H \cap K$  também é um subgrupo de  $G$ .

**Problema 22.** Dados dois grupos  $(G_1, *_1)$  e  $(G_2, *_2)$ , considere o produto cartesiano  $G = G_1 \times G_2$  equipado com a operação  $*$  definida por  $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2)$ . Mostre que  $(G, *)$  é um grupo.

**Problema 23.** Considere o grupo  $(\mathbb{Z}_2^3, +)$ , onde  $+$  é a adição componente a componente módulo 2. Liste todos os subgrupos deste grupo.

**Problema 24.** Mostre que todo grupo com 5 elementos é isomorfo ao grupo  $(\mathbb{Z}_5, +)$ .

**Problema 25.** Prove que todo grupo com 6 elementos é isomorfo ao grupo  $(\mathbb{Z}_6, +)$  ou ao grupo  $(S_3, \circ)$ .

**Problema 26.** Seja  $p$  um número primo. Mostre que se  $x^2 \equiv x \pmod{p}$ , então  $x \equiv 0 \pmod{p}$  ou  $x \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Problema 27.** Seja  $p$  um número primo. Mostre que se  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , então  $x \equiv 1 \pmod{p}$  ou  $x \equiv -1 \pmod{p}$ .

**Problema 28.** Seja  $p$  um número primo. Mostre que  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ . (Dica: Use o exercício anterior para argumentar que os elementos de  $\mathbb{Z}_p^*$  podem ser agrupados em pares de inversos, exceto pelos elementos 1 e  $p-1$ .)