Verslag bij practicum Numerieke Wiskunde

2024-04-02

Mara Levrau, Simeon Duwel

Opdracht 1

Stelling. Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en zijn $A, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices. Veronderstel dat L onderdriehoekig is, dat U bovendriehoekig is en dat $\forall i \in \{1, ..., n\} : L_{ii} = 1$. Veronderstel bovendien dat $A = LU$. Dan geldt

$$\forall i \in \{1, ..., n\} : \begin{cases} U_{ik} = A_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} U_{jk} & \forall k \in \{i, ..., n\} \\ L_{ki} = \frac{A_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{kj} U_{ji}}{U_{ii}} & \forall k \in \{i+1, ..., n\} \end{cases} \tag{1}$$

Bewijs. We gebruiken een bewijs via inductie, over de dimensie van A, L en U.

Basisstap: $n = 1$
De kwantor $\forall i \in \{1, ..., n\}$ kan vereenvoudigd worden tot $i = 1$. Zo kunnen we ook $\forall k \in \{i, ..., n\}$ vereenvoudigen tot $k = 1$. Ingevuld leidt dit tot de volgende bewijslast:

$$U_{11} = A_{11} - \sum_{j=1}^{0} L_{1j} U_{j1} \wedge L_{11} = \frac{A_{11} - \sum_{j=1}^{0} L_{1j} U_{j1}}{U_{11}}$$

We gebruiken hier de conventie dat een som die itereert van een hogere naar een lagere index gelijk is aan nul – immers zijn er geen termen in de som, aangezien geen enkel natuurlijk getal j kan voldoen aan $j \geq 1 \wedge j \leq 0$. Dus rest ons te bewijzen dat

$$U_{11} = A_{11} \wedge L_{11} = \frac{A_{11}}{U_{11}}.$$

Gegeven dat alle diagonaalelementen van L gelijk zijn aan 1, weten we dat in het bijzonder $L_{11} = 1$. Aangezien $A = LU$ kunnen we over het element A_{11} zeggen dat het gelijk moet zijn aan $\sum_{j=1}^{1} L_{1j} U_{j1} = L_{11} \cdot U_{11}$. Omdat $L_{11} = 1$, geldt $U_{11} = A_{11}$. Dus is ook $L_{11} = \frac{A_{11}}{U_{11}}$. Hiermee is de basisstap aangetoond.

Inductiestap: als vergelijking 1 geldt voor n, dan geldt ze ook voor $n + 1$.
Zij $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ de matrix waarvoor we de bewijslast willen aantonen, en zij $A' \in \mathbb{R}^{n \times n} := A[1, 2, ..., n; 1, 2, ..., n]$ de submatrix van A waarvoor vergelijking 1 al geldt. Zijn tenslotte L en U twee matrices met dezelfde afmetingen als A, met L eenheidsonderdriehoekig en U bovendriehoekig en $LU = A$.

Merk op dat we de propositie alleen nog moeten aantonen voor $i = n + 1$. Immers, wegens de inductiehypothese geldt de uitspraak al $\forall i \in \{1, ..., n\}$; slechts over de 'buitenste schil' bestaat nog onzekerheid. Bovendien moet enkel van de meest rechtse kolom van U en onderste rij van L nog getoond worden dat hun elementen aan de gevraagde eigenschap voldoen. Van de elementen $U[n + 1; 1, ..., n]$ weten we immers dat ze nul zijn wegens het gegeven, en net zo voor $L[1, ..., n; n + 1]$.

Te bewijzen is dus:

$$\forall i \in \{1, ..., n + 1\} : U_{i,n+1} = A_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} U_{j,n+1}$$

en tevens:

$$\forall i \in \{1, ..., n + 1\} : L_{n+1,i} = \frac{A_{n+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{n+1,j} U_{j,i}}{U_{ii}}$$

We tonen de eerste deelbewijslast aan door een willekeurige $i \in \{1, ..., n+1\}$ te kiezen. Bemerk dat we $A_{i,n+1}$ kunnen schrijven als $(LU)_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} L_{i,j} U_{j,n+1}$, en bemerk bovendien dat de term van de som 0 wordt wanneer $i < j$; dan is $L_{i,j}$ immers gelijk aan nul. Dus kunnen we de som herschrijven als $\sum_{j=1}^{i} L_{i,j} U_{j,n+1}$. Wanneer $i = j$ geldt bovendien dat $L_{i,j} = L_{i,i} = 1$, waardoor we die index af kunnen scheiden om te bekomen dat $\sum_{j=1}^{i} L_{i,j} U_{j,n+1} = U_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} U_{j,n+1}$.

Dus weten we dat $A_{i,n+1} = U_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} U_{j,n+1}$. Dit vormen we om naar U om $U_{i,n+1} = A_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} U_{j,n+1}$ te bekomen. Aangezien i willekeurig gekozen was, is de gelijkheid aangetoond.

We tonen de tweede deelbewijslast aan door opnieuw een willekeurige $i \in \{1, ..., n+1\}$ te kiezen. Bemerk dat $A_{n+1,i}$ gelijk is aan $(LU)_{n+1,i} = \sum_{j=1}^{n+1} L_{n+1,j} U_{j,i}$. Hier kunnen we alle indices $j > i$ negeren, aangezien $U_{j,i}$ dan nul is. We splitsen dan weer één element uit de som af om te bekomen dat $A_{n+1,i} = L_{n+1,i} \cdot U_{i,i} + \sum_{j=1}^{i-1} L_{n+1,j} U_{j,i}$. Dit kunnen we weer omvormen tot $L_{n+1,i} \cdot U_{i,i} = A_{n+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} L_{n+1,j} U_{j,i}$, en na deling door $U_{i,i}$ in beide leden is de gelijkheid aangetoond.

Dus geldt de eigenschap ook voor $n + 1$.

Via het inductieve principe weten we nu dat de eigenschap geldt voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Hiermee is de volledige stelling aangetoond. ■

Opdracht 3

NB. Per de [MATLAB-documentatie] gebruiken we de standaardtolerantiewaarde van 10^{-12} bij het testen of de verwachte decompositie en berekende decompositie gelijk zijn. We gebruiken hiervoor de functie `ismembertol`. In de praktijk is de echte afwijking meestal een paar grootteordes kleiner.

Opdracht 4

Waar algoritme 5.1 een indexvariabele `k` gebruikt die van `n` tot `1` loopt, gebruiken we in de voorwaartse substitutie een variabele die van `1` tot `n` loopt, aangezien we bij de eerste rij beginnen. Verder is het idee achter de oplossingsmethode identiek: omdat de matrices driehoekig kunnen we de rijen op zo'n manier doorlopen dat elke volgende rij extra informatie geeft over één variabele van het stelsel. We nemen dan een lineaire combinatie van de al gekende waarden om die nieuwe variabele te 'isoleren'. Na een deling door het resterende element bekomen we de correcte waarde voor de variabele.

Opdracht 5

De correctheid wordt hier niet formeel bewezen, maar aan de hand van een zgh. *nothing up my sleeve*-test case[1] gemotiveerd.

Hier klopt nog iets niet want in het boek staat dat bovendriehoekige stelsels maar n^2 operaties nodig hebben en ik kom $n^2 + n$ uit

De kern van `solve_Lb` bestaat uit de volgende drie regels:

```
for k = 1:n
    y(k) = (b(k) - L(k, 1:k) * y(1:k)) / L(k, k);
end
```

welke we splitsen in

```
for k = 1:n
    y(k) = b(k);
    y(k) = y(k) - L(k, 1:k) * y(1:k); % 1 aftrekking, k verm., k opt.
    y(k) = y(k) / L(k, k);            % 1 deling
end
```

[1]hier is U de getallen van één tot zes, b_1 de eerste drie kwadraten, L de rij van Fibonacci en b_2 de eerste drie cijfers van π

In totaal levert ons dit $\sum_{k=1}^{n}(2+2k) = n^2 + 3n$ bewerkingen voor $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Voor `solve_Ub` gaan we analoog te werk:

```
for k = n:-1:1
    y(k) = (b(k) - U(k, k+1:n) * y(k+1:n)) / U(k, k);
end
```

wordt

```
for k = n:-1:1
    y(k) = b(k);
    y(k) = y(k) - U(k, k+1:n) * y(k+1:n); % 1 aftrekking, n - k verm., n - k opt.
    y(k) = y(k) / U(k, k);                % 1 deling
end
```

Zo bekomen we $\sum_{k=1}^{n}(2+2(n-k)) = n^2 + n$ bewerkingen voor $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Opdracht 6

```
L_1 =

  1.000000000000000                  0                  0                  0                  0
  0.009090909090909   1.000000000000000                  0                  0                  0
  0.009090909090909  -0.000082651458798   1.000000000000000                  0                  0
  0.009090909090909  -0.000082651458798  -0.000082658290627   1.000000000000000                  0
  0.009090909090909  -0.000082651458798  -0.000082658290627  -0.000082665123584   1.000000000000000



U_1 =

  1.100000000000000   0.010000000000000   0.010000000000000   0.010000000000000   0.010000000000000
                  0   1.099909090909091  -0.000090909090909  -0.000090909090909  -0.000090909090909
                  0                  0   1.099909083395322  -0.000090916604678  -0.000090916604678
                  0                  0                  0   1.099909075880311  -0.000090924119689
                  0                  0                  0                  0   1.099909068364057



L_2 =

  1.000000000000000                  0                  0                  0                  0
                  0   1.000000000000000                  0                  0                  0
                  0                  0   1.000000000000000                  0                  0
                  0                  0                  0   1.000000000000000                  0
  0.009090909090909   0.009090909090909   0.009090909090909   0.009090909090909   1.000000000000000



U_2 =

  1.100000000000000                  0                  0                  0   0.010000000000000
                  0   1.100000000000000                  0                  0   0.010000000000000
                  0                  0   1.100000000000000                  0   0.010000000000000
                  0                  0                  0   1.100000000000000   0.010000000000000
                  0                  0                  0                  0   1.099636363636364
```

L_1 en U_1 bevatten ieder tien nullen $(= 2n)$ en is dus niet per se spaars te noemen.
L_2 en U_2 bevatten ieder zestien nullen $(= (n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)^2)$ en is dus volgens de conventie spaars te noemen.