Лабораторная работа №1 "Симплекс-метод"

> Работу выполнили: Шевченко Валерий, Иванов Александр M33001

Постановка задачи

Задача линейного программирования - задача, которая имеет вид:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max(\min)$$
$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, i = 1, \dots, m \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = m+1, \dots, m+p \\ x_i \ge 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

где c_i - коэффициенты целевой функции, a_{ij} - коэффициенты ограничений, b_i - правые части ограничений, x_i - переменные

Описание симплекс метода

Алгоритм симплекс метода состоит из нескольких шаков

1. Построение опорного плана
   1. Выбор базиса
   2. Построение базисного решения
2. Построение оптимального плана
   1. Поиск переменной для вхождения в базис (ведущего столбца)
   2. Поиск переменной для вымещения из базиса (ведущей строки)
   3. Вычисление базисного решения, при его неоптимальности повторяем процесс

Решение задач из примеров

Пример 1

$$f(x) = -6x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, f(x) = -4$

Пример 2

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, f(x) = -6$

Пример 3

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, f(x) = -11$

Пример 4

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 7, f(x) = -10$

Пример 5

$$f(x) = -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 10x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 10x_4 = 0 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Ответ:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, f(x) = -4$$

Пример 6

$$f(x) = -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3 \\ 2_x1 + 3x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2\frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{2}{3}, x_5 = 0, x_6 = 0, f(x) = -3$

Пример 7

$$f(x) = -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20 \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 10, x_4 = 0, x_5 = 0, f(x) = 10$

Ответы на вопросы

1. Общая и каноническая форма задачи линейного программирования.

Задача линейного программирования в произвольной (общей) форме - задача, в которой требуется минимизировать или максимизировать линейную форму при заданных ограничениях (как равенствах, так и неравенствах).

Задача ЛП в канонической форме - задача вида:

$$\begin{cases} c^T \cdot \overline{x} \to min(max) \\ A \cdot \overline{x} = \overline{b} \\ \overline{x} \geq \overline{0} \end{cases}$$

2. Двойственная задача ЛП.

Двойственная задача ЛП - задача, которая получается их исходной задачи ЛП следующим образом:

- Каждая переменная из исходной задачи становится ограничением в двойственной задачи.
- Каждое ограничение из исходной задачи становится переменной в двойственной задачи.
- Направление решенея задачи изменяется, максимум на минимум и наоборот.

$$\begin{cases} \overline{c}^T \cdot \overline{x} \to min(max) \\ A \cdot \overline{x} = \overline{b} \\ \overline{x} \geq \overline{0} \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \overline{b}^T \cdot \overline{y} \to max(min) \\ A^T \cdot \overline{y} = \overline{c} \\ \overline{y} \geq \overline{0} \end{cases}$$

3. Метод искусственного базиса.

Метод искусственного базиса используется для нахождения базисного решения задачи ЛП. В ограничения и в функцию вводят "искусственные" переменные следующим образом:

$$\begin{cases} \overline{c}^T \cdot \overline{x} - m \cdot \overline{r} \to min(max) \\ A \cdot \overline{x} + \overline{r} = \overline{b} \\ \overline{x} \geq \overline{0} \end{cases}$$

Для данной системы строится симплекс таблица и делаются такие же преобразования, как и в при обычном решением симплекс методом. Цель - свести переменные r к 0, когда это произойдёт их можно будет исключить из таблицы и продолжить решение уже без "искусственных" переменных.

4. Доказать, что ОДР является выпуклым множеством.

Предположим, что в области есть хотя бы две угловые точки, возьмём любые две. Пусть это $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, они же - два допустимых решения, они же - два вектора. Пусть ограничения задачи в матричной форме: $A \cdot \overline{x}_1 = \overline{b}$ и $A \cdot \overline{x}_2 = \overline{b}$.

Пусть $\overline{x}_3 = \alpha\overline{x}_1 + (1-\alpha)\overline{x}_2$ - произвольная линейная комбинация векторов $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$.

Покажем, что $\overline{x}_3$ - тоже допустимое решение.

$$A \cdot \overline{x}_3 = A \cdot (\alpha\overline{x}_1 + (1-\alpha)\overline{x}_2)$$
$$A \cdot \overline{x}_3 = \alpha A \cdot \overline{x}_1 + A \cdot (1-\alpha)\overline{x}_2$$
$$A \cdot \overline{x}_3 = \alpha\overline{b} + \overline{b} - \alpha\overline{b} = \overline{b}$$

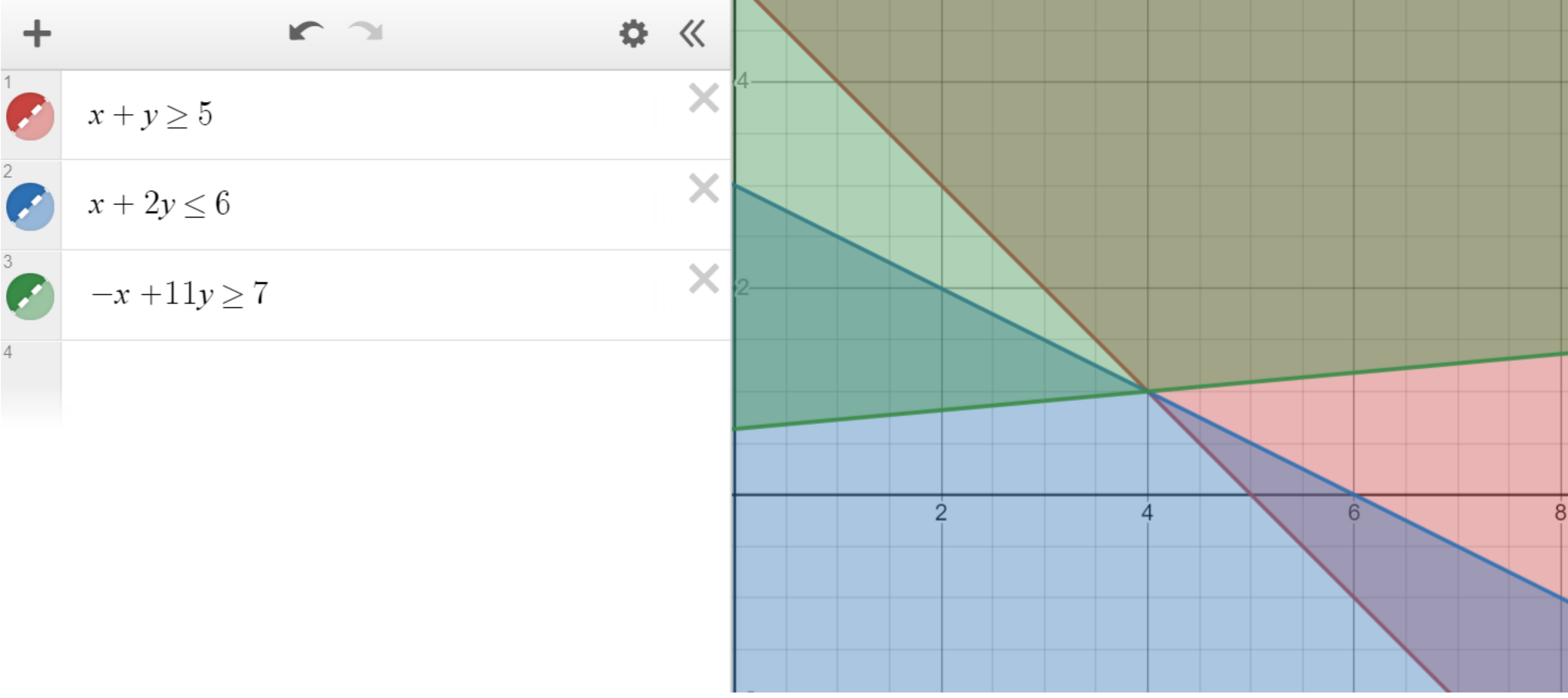
Так как результат линейной комбинации двух любых положительных компонент $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ и каких-то неотрицательных коэфициентов α и $1-\alpha$ является допустимым решением, то множество допустимых решений - выпуклое.

5. Может ли ОДР в задаче ЛП состоять из одной единственной точки? Если да, то привести пример.

Если результатом пересечения ограничений будет одна точка, то множество ОДР будет состоять из одной точки.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 >= 5 \\ x_1 + 2x_2 <= 6 \\ -x_1 + 11x_2 >= 7 \end{cases}$$



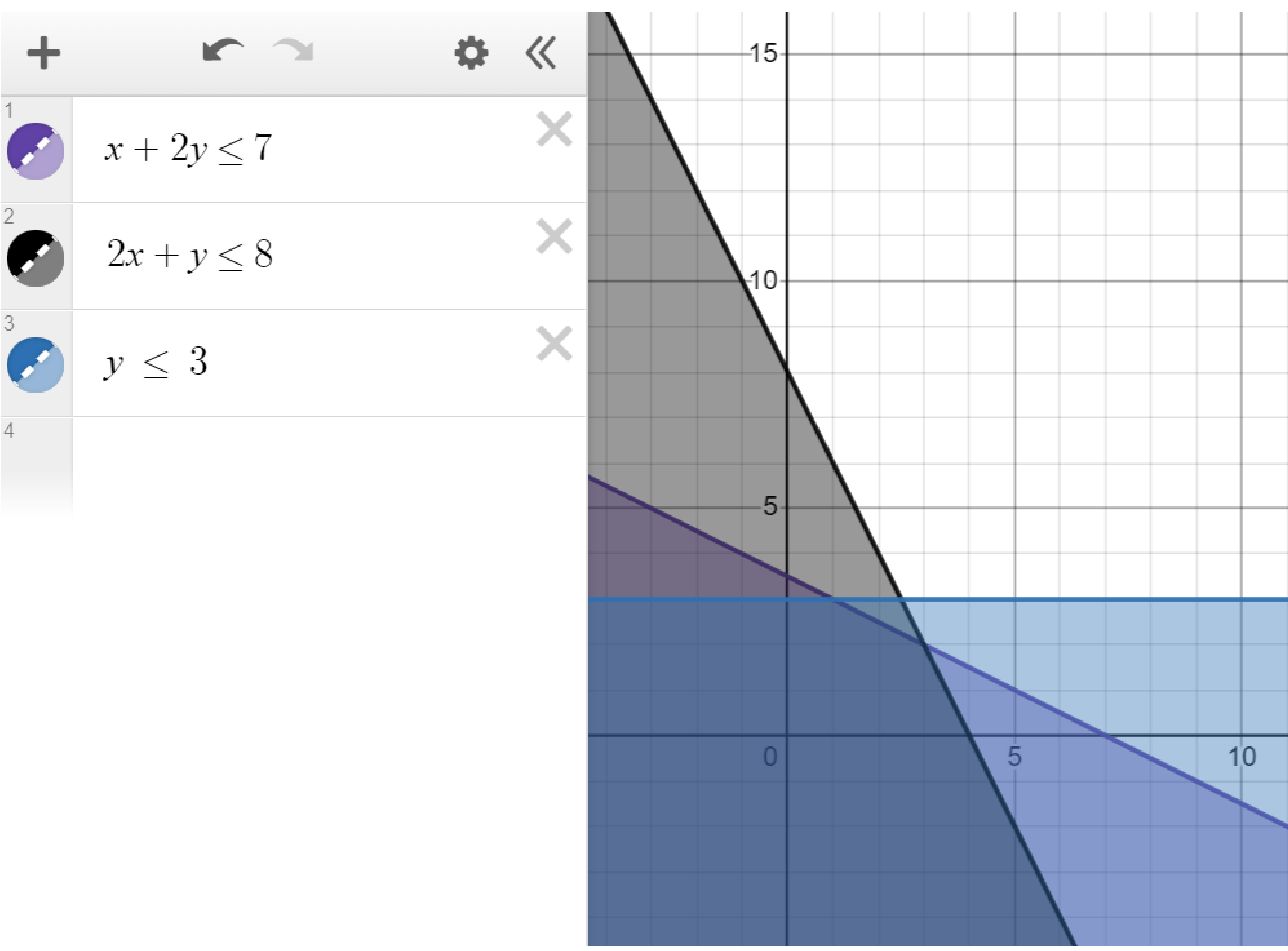
6. В чём заключается графический метод решения задачи ЛП?

В случае если в задаче размерность $\overline{x}$ равна двум, на плоскости строится область допустимых решений. Потом строится прямая, отвечающая значению функции F равно нулю и вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции. Будем параллельно двигать прямую до первого или последнего касания ОДР (в случае с минимизацией последнее, в случае максимизации - последнее). Угловая точка, в которой будет пересечение - минимальное/максимальное решение.

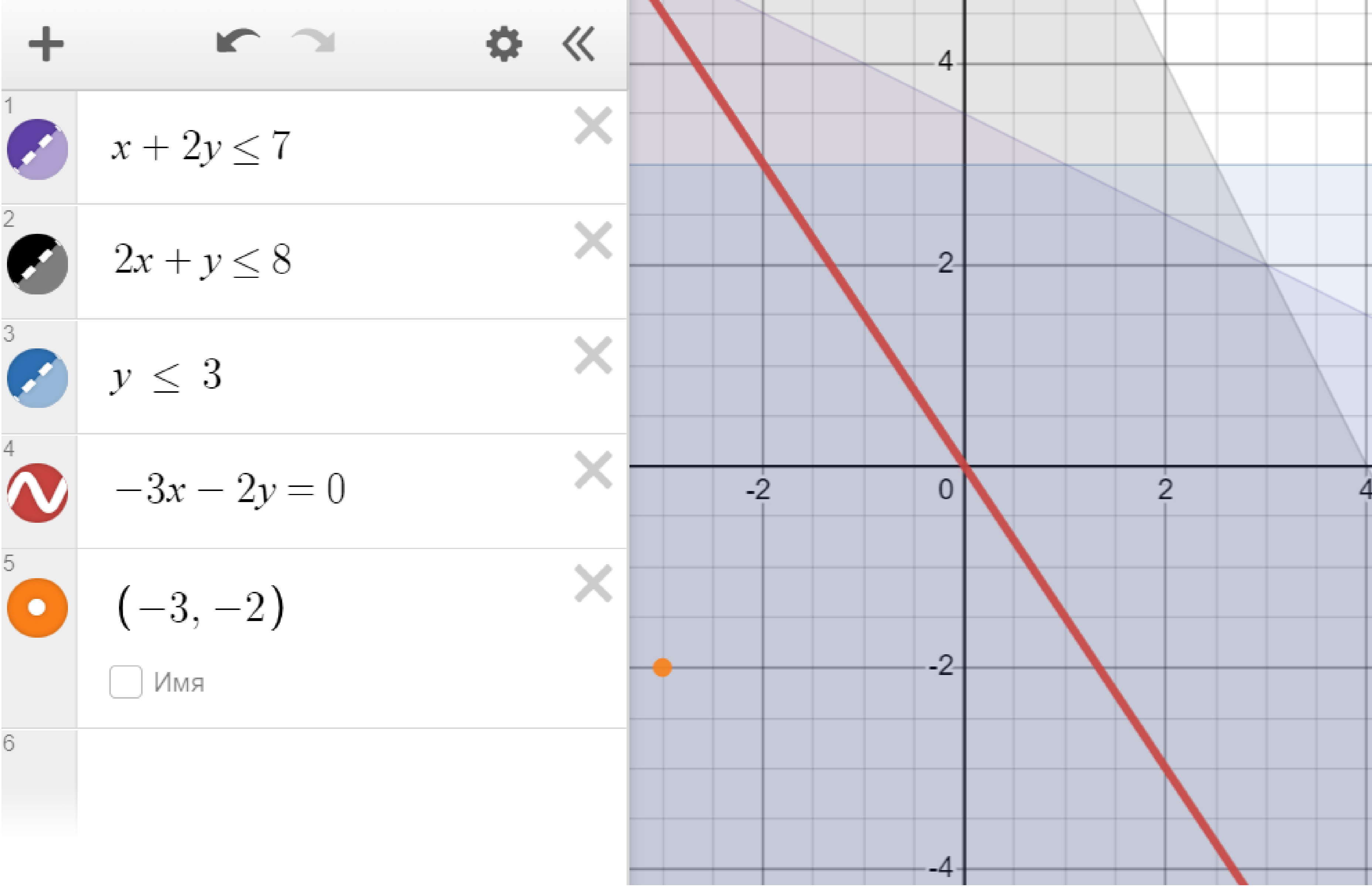
7. Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

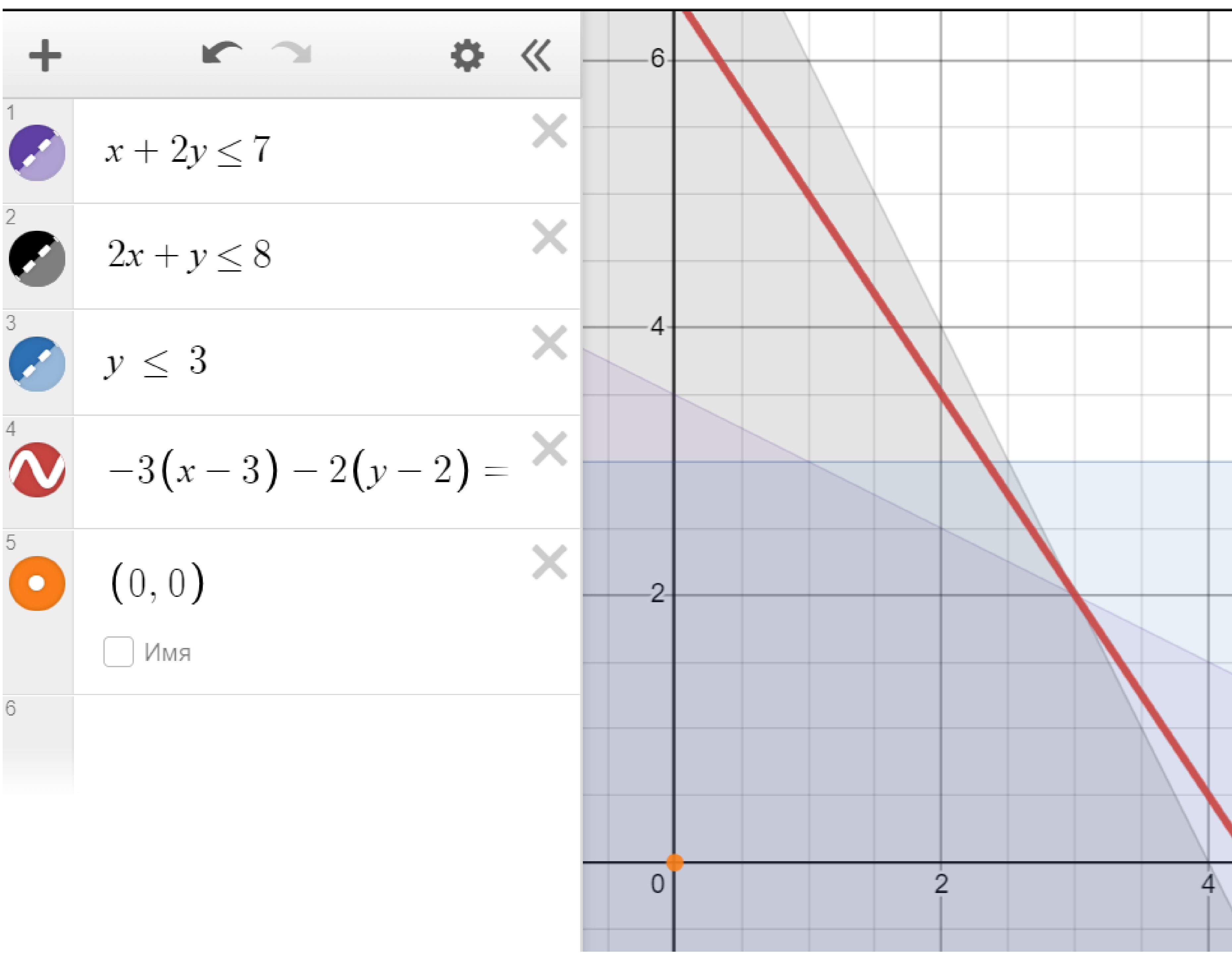
Построим ОДР.



Построим прямую и вектор-градиент (на рисунке обозначен точкой).



Параллельно переносим прямую до касания ОДР.



Прямая касается ОДР в угловой точке $(3, 2)$. Найдём минимальное значение функции $f(x) = -3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -13$

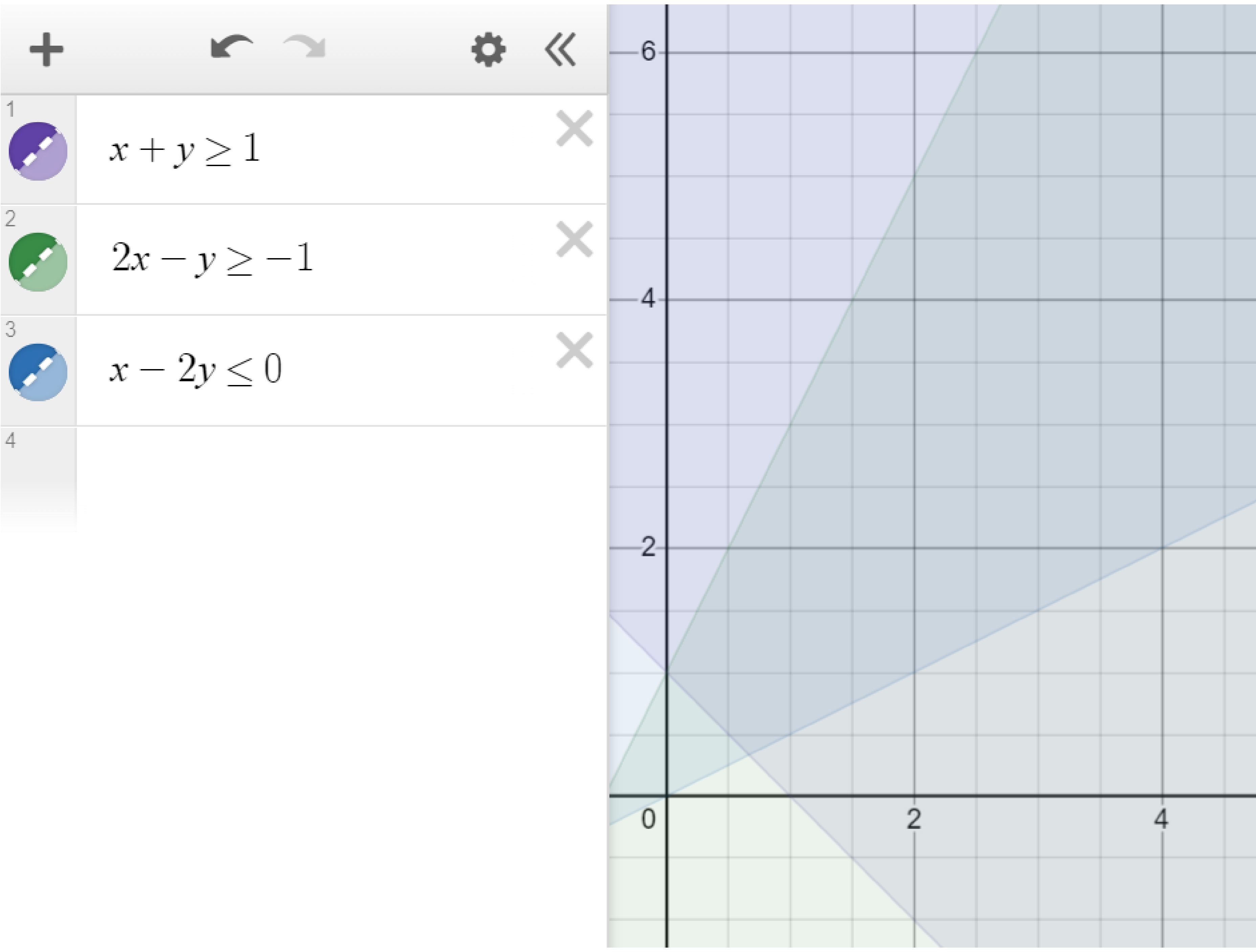
Ответ: $\overline{x} = (3, 2), f(x)_{min} = -13$

8. Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования:

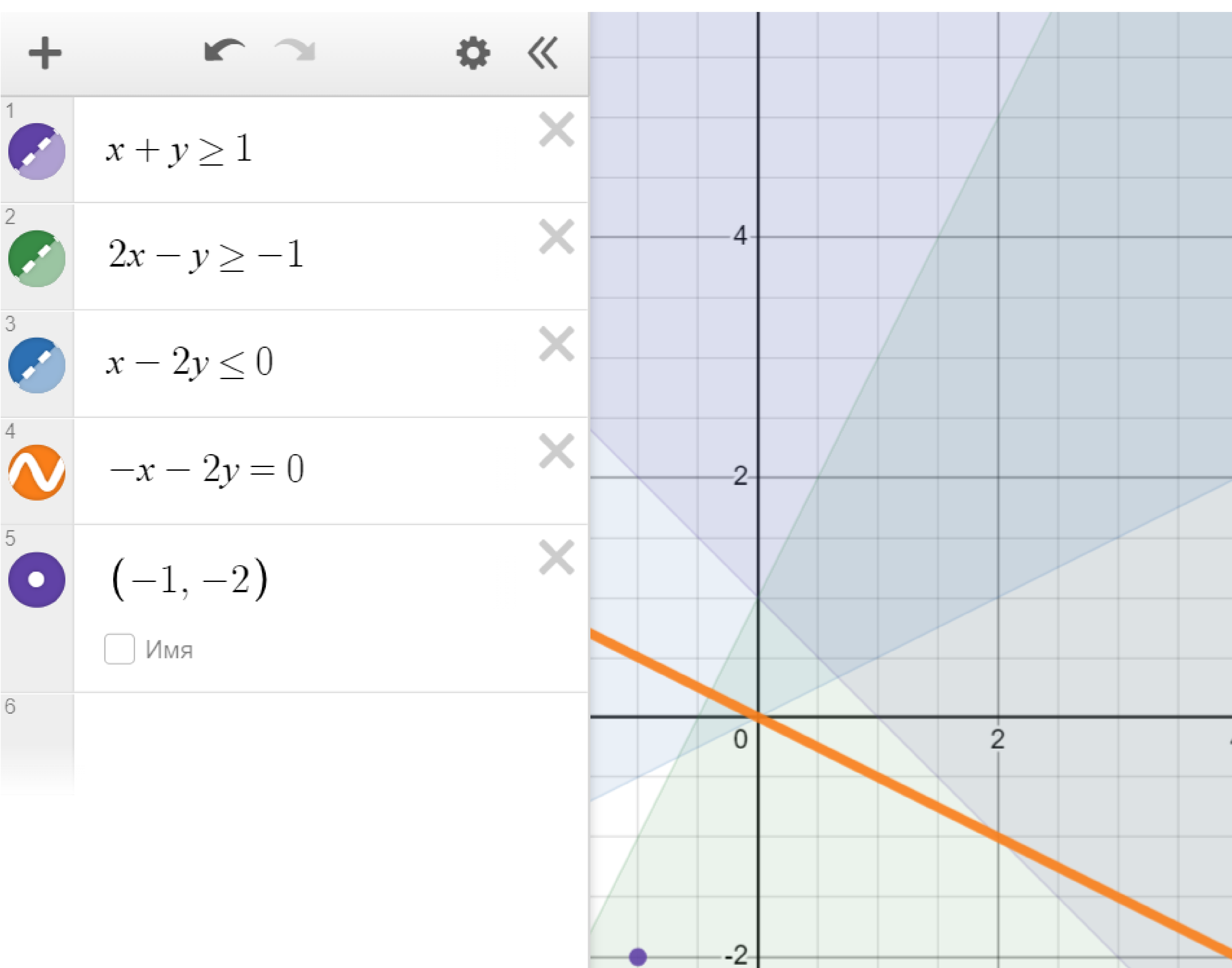
$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

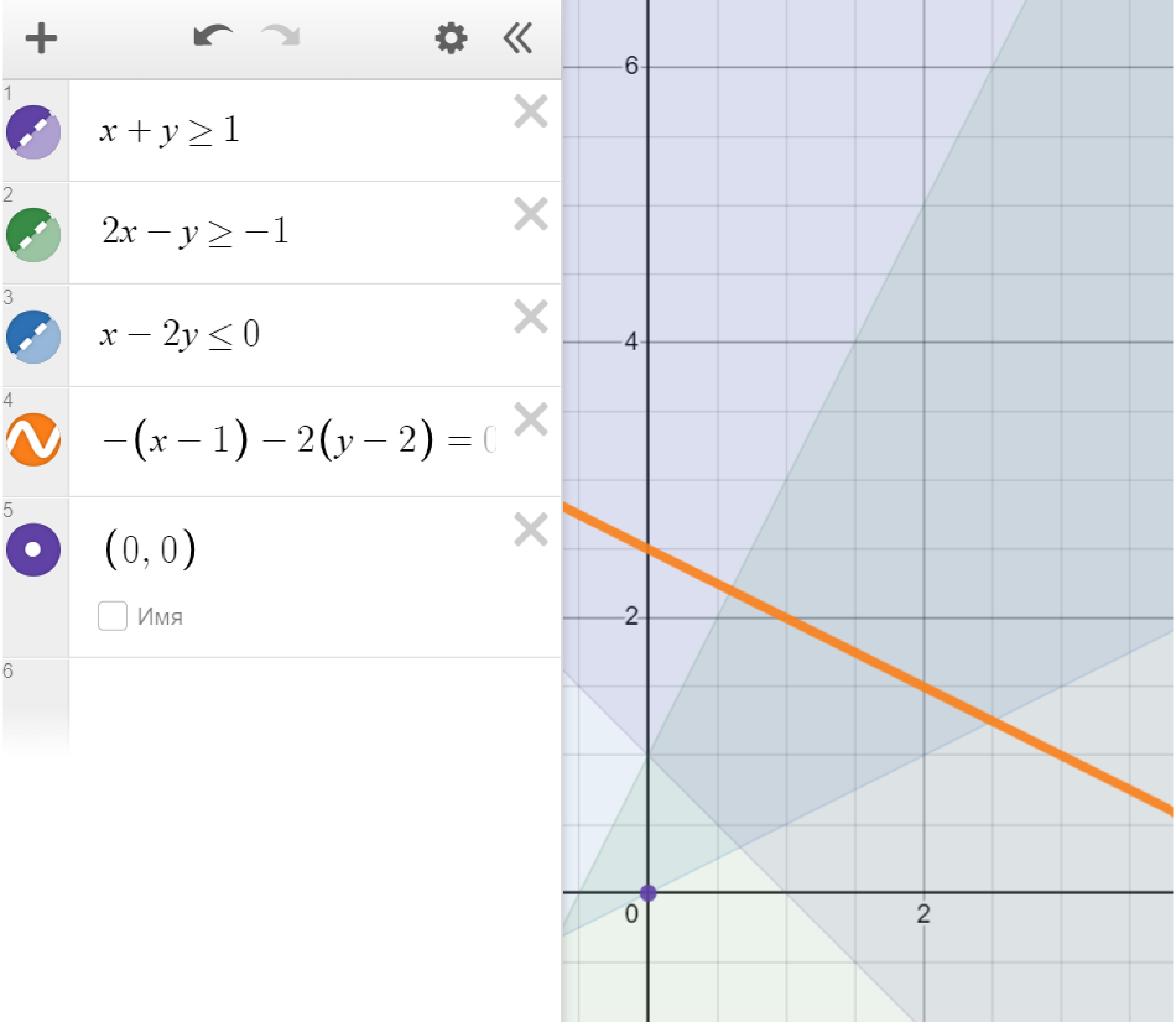
Построем ОДР.



Построим прямую и вектор-градиент (на рисунке обозначен точкой).



Параллельно переносим прямую до касания ОДР.



Как мы можем заметить, прямую можно переносить бесконечное количество раз, а угловая точка так и не будет встречена, то есть значение функции будет дальше уменьшаться, значит минимального значения функции нет.

Ответ: Нет минимального значения, ОДР неограничена.

9. Решить задачу симплекс-методом, используя x_0 в качестве начальной точки.

$$f(x) = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \Rightarrow min$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5 \quad (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6 \quad (2) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \quad (3) \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$
$$\overline{x} = (0, 0, 1, 2, 1)$$

Выбираем x_3, x_4 и x_5, как базисные переменные.

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1), переменные x_4 и x_5 сократятся.

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad (4)$$

Выразим x_3 из уравнения (4) и подставим в уравнения (2) и (3).

$$3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5 \quad (5)$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 8 \quad (6)$$

Домножим уравнение (5) на 2 и вычтем из него уравнение (6).

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \quad (7)$$

Выразим из уравнения (7) x_4 и подставим в уравнение (6).

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 1 \quad (8)$$

В итоге получаем систему ограничений.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Построем симплекс-таблицу.

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
F	-5	4	-1	-3	-5	0
x_3	-1	-2	1	0	0	1
x_4	2	-1	0	1	0	2
x_5	-1	2	0	0	1	1
Δ	5	-9	0	0	0	-12

План не оптимален, так как Δ_1 положительна. Возьмём первый столбец, как разрешающий. Определим разрешающую строку. Отношения коэффициентов b к коэффициентам x_5: $(\infty, 1, \infty)$. Таким образом, разрешающая строка - вторая.

Делим вторую строку на 2 и из первой и третьей строк вычитаем вторую строку домноженную на соответствуюбщий коэффициент из разрешающего столбца.

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
F	-5	4	-1	-3	-5	0
x_3	0	-2.5	1	0.5	0	2
x_1	1	-0.5	0	0.5	0	1
x_5	0	1.5	0	0.5	1	2
Δ	0	-6.5	0	-2.5	0	-17

План оптимален, так как все Δ_i отрицательны.

Ответ: $\overline{x} = (1, 0, 2, 0, 2), f(x)_{min} = -17$

10. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

Приведём задачу к канонической форме, добавлением дополнительных переменных.

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Выбираем x_3, x_4 и x_5 в качестве базисных переменных и построим симплекс-таблицу.

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
F	-1	3	0	0	0	0
x_3	1	2	1	0	0	4
x_4	-1	1	0	1	0	-1
x_5	1	1	0	0	1	8
Δ	1	-3	0	0	0	0

В столбце свободных переменных есть отрицательный коэффициент -1 во второй строке, это будет разрешающая строка. Разрешающим столбцом будет столбец, в котором находится наименьший коэффициент в строке. Это будет первый столбец.

Делим вторую строку на -1 и из первой и второй строк вычитаем вторoю строку домноженную на соответствующий коэффициент из разрешающего столбца.

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
F	-1	3	0	0	0	0
x_3	0	3	1	1	0	3
x_1	1	-1	0	-1	0	1
x_5	0	2	0	1	1	7
Δ	0	-2	0	1	0	-1

План не оптимален, так как Δ_2 отрицательная, берём второй столбец, как разрешающий и найдём разрешающую строку. Отношения коэффициентов b к коэффициентам x_2: $(1, \infty, 3.5)$. Следовательно разрешающая строка - первая.

Делим первую строку на 3 и из второй и третьей строк вычитаем первую строку домноженную на соответствуюбщий коэффициент из разрешающего столбца.

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
F	-1	3	0	0	0	0
x_2	0	1	0.33	0.33	0	1
x_1	1	0	0.33	-0.66	0	2
x_5	0	0	-0.66	0.33	1	5
Δ	0	0	0.66	1.66	0	1

План оптимален, так как все Δ_i положительны. Можно отбросить добавочные переменные.

Ответ: $\overline{x} = (2, 1), f(x)_{min} = -1$