

Appunti sui sistemi dinamici

Walter Nadalin

18 marzo 2020

Sommario

Questi appunti sono una raccolta di argomenti trattati durante il corso di sistemi dinamici tenuto dai professori Michele Cirafici e Salvatore Giorgio Tondo nella primavera del 2020.

Queste note non includono la parte introduttiva che consiglio di reperire perchè tratta definizioni ed esempi qui non presenti. Inoltre in esse sono probabilmente presenti errori, mancanze, sviste e, in generale, parti da migliorare o correggere. A questo proposito invito chi legge a prestare attenzione mettendo in dubbio i concetti qui espressi.

Indice

1	Sistemi dinamici unidimensionali continui	4
1.1	Ritratto in fase	5
1.2	Analisi lineare	7
1.3	Biforcazioni	9
1.3.1	Biforcazione tangente	10
1.3.2	Biforcazione transcritica	13
1.3.3	Biforcazione a forchetta (Pitchfork)	15
1.3.4	Biforcazione imperfetta	17
1.4	Flussi sul cerchio	24
2	Sistemi dinamici unidimensionali discreti	26
2.1	Orbite di sistemi discreti	30
2.2	Serie temporale	31
2.3	Punti fissi	33
2.4	Rappresentazione a gradini	33
2.5	Stabilità dei punti fissi	35
2.5.1	Stabilità dei punti fissi di mappe lineari	36
2.5.2	Studio della stabilità	36
2.6	Biforcazioni	39
2.7	Orbite monotone	42
2.8	Orbite periodiche	42
2.9	Mappa logistica	44
2.9.1	Ordinamento di Sarkowsky e teorema di Li-Yorke	47
3	Sistemi dinamici lineari	52
3.1	Autovalori reali e distinti	53
3.2	Autovalori complessi	55
3.3	Caso generale	58
3.4	Analisi qualitativa dei sistemi lineari planari	58
3.4.1	Autovalori reali e distinti	59
3.4.2	Autovalori complessi	62
3.4.3	Autovalori ripetuti	64
3.5	Il piano traccia determinante	66
3.6	Oscillatori armonici disaccoppiati	67
3.7	Esponenziale di una matrice	70
3.7.1	Stabilità per sistemi lineari	75
3.7.2	Scomposizione di Jordan-Chevalley	77
3.7.3	Forma canonica di Jordan	85
4	Sistemi dinamici non lineari in dimensione arbitraria	87
4.1	Studio degli equilibri e delle isocline (null - cline)	87
4.2	Linearizzazione	88
4.3	Stabilità	91
4.3.1	Insiemi limite	95
4.4	Sistemi gradiente	97
4.5	Sistemi Hamiltoniani	99
4.6	Equivalenza tra sistemi dinamici non lineari	103

4.6.1	Coniugazione topologica	103
4.7	Piano delle fasi	110

1 Sistemi dinamici unidimensionali continui

I sistemi dinamici unidimensionali di tipo continuo sono caratterizzati dal parametro rispetto a cui le funzioni evolvono, che per i nostri scopi possiamo pensare essere il tempo t , continuo. Questo significa che abbiamo equazioni del tipo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

dove $x = x(t)$ è una funzione di una variabile reale a valori in \mathbb{R} e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. In generale, si prende f funzione liscia, ovvero sia di classe $C^\infty(I)$.

Esempio 1.1. Consideriamo l'equazione:

$$\dot{x} = \sin(x)$$

risolvibile attraverso la tecnica della separazione delle variabili:

$$t = -\log \left| \frac{1}{\sin(x)} + \cotan(x) \right| + c$$

dove la costante c si fissa ponendo le condizioni iniziali che possono essere, ad esempio, $x = x_0$ a $t = 0$.

A questo punto, volendo la soluzione si dovrebbe esplicitare $x = x(t)$ e studiarne l'andamento. Tuttavia è difficile arrivare ad una scrittura semplice. Cambiamo quindi approccio andando a discutere la stessa equazione differenziale da un punto di vista qualitativo. In questo modo otteniamo meno informazioni rispetto a quelle fornite dalla soluzione esatta ma sperabilmente più facili da capire.

Osserviamo che quest'equazione definisce un campo vettoriale, in questo caso sull'asse reale. Ciò significa che ad ogni punto x viene associato il vettore \dot{x} . Il campo vettoriale ha direzione verso x crescenti (decrescenti) se $\dot{x} > 0$ (< 0), perchè significa che la variazione di x è positiva (negativa). In figura 1 se ne può vedere una rappresentazione grafica. Così disegniamo il flusso, che possiamo pensare sia orientato o verso destra o verso sinistra.

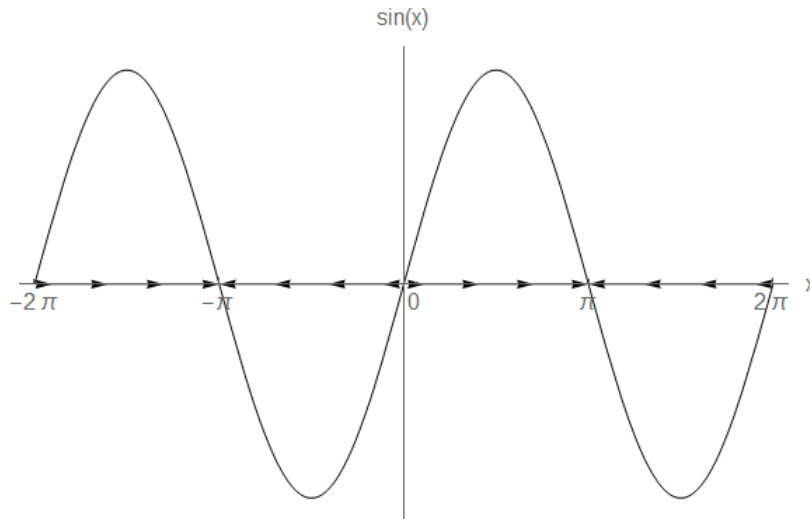


Figura 1: rappresentazione grafico del campo vettoriale

Notiamo che ponendosi in un punto iniziale $x = x_0$ è possibile seguire la direzione del flusso per intuire l'evoluzione del sistema. Inoltre sono presenti dei punti dove $\dot{x} = \sin(x) = 0$ e non si ha movimento. Questi prendono il nome di punti fissi, anche detti critici o di equilibrio, e si distinguono in:

- stabili, attrattivi o pozzi: il flusso vi entra da entrambi le direzioni;
- instabili, repulsivi o sorgenti: il flusso vi esce da entrambi le direzioni;
- di sella: il flusso vi entra da una direzione ed esce dall'altra.

Proseguiamo l'analisi qualitativa. Studiamo il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale partendo dalle osservazioni fatte. Notiamo che partendo da punto fisso, dove non c'è variazione, la soluzione rimane in quel punto, quindi è costante. Invece, se il punto di partenza non è un punto fisso la soluzione evolve seguendo il flusso verso un punto attrattivo. Nel caso dell'esempio, prendendo il punto iniziale $\pi/4$ la soluzione si muoverà asintoticamente verso il punto fisso π , con derivata crescente fino al punto $\pi/2$ e decrescente per valori maggiori di quest'ultimo. Scegliendo altri punti iniziali possiamo intuire l'andamento delle diverse soluzioni, mostrato in figura 2.

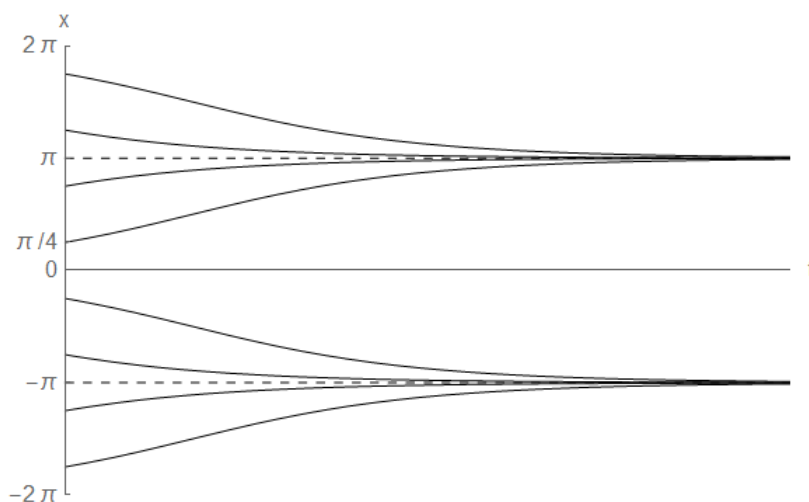


Figura 2: grafico di soluzioni aventi diverse condizioni iniziali

Osserviamo infine che, in questo esempio e in casi analoghi, l'asse reale rappresenta lo spazio della fasi.

1.1 Ritratto in fase

Il diagramma in figura 1 viene chiamato ritratto in fase (phase portrait). In generale, per disegnarlo si considera un'equazione del tipo (1) e si studia il grafico di \dot{x} in funzione di x . Quando la funzione f è positiva (negativa) la derivata di x è anch'essa positiva (negativa) quindi il flusso è crescente (decrescente) e quando si annulla è presente un punto fisso. Dunque $f(x)$ misura la velocità del flusso e il suo segno ne determina la direzione.

Volendo risolvere qualitativamente l'equazione differenziale si prende una condizione iniziale x_0 e se ne segue l'evoluzione lungo il flusso. Si ottiene così la traiettoria con origine in x_0 .

Osservazione. Il ritratto di fase contiene tutte le traiettorie qualitative nello spazio delle fasi, cioè contiene l'informazione su come sono fatte tutte le soluzioni dell'equazione differenziale. In particolare, aiuta a intuire se i punti fissi, ovvero i punti x^* tali che $f(x^*) = 0$, sono stabili o instabili. Perciò studiandolo è possibile capire l'andamento delle soluzioni al variare dei dati iniziali, pur non avendo risolto analiticamente l'equazione differenziale.

Esercizio 1.1. Ricavare il ritratto di fase per le equazioni differenziali:

1. $\dot{x} = x^2 - 1$

2. $\dot{x} = x - \cos(x)$

Suggerimento: per trovare i punti critici dell'equazione 2. studiare la due funzioni x e $\cos(x)$ separatamente e poi vederne graficamente i punti d'intersezione.

Esempio 1.2 (Equazione logistica). Consideriamo l'equazione logistica, basata sul modello di Malthus, per lo studio della dinamica delle popolazioni:

$$\dot{N} = \varepsilon N$$

dove N rappresenta il numero di individui di una popolazione e supponiamo sia una funzione continua. L'equazione è semplice e ha solo soluzioni poco realistiche caratterizzate da una crescita, o un decadimento, esponenziale.

Un modo più realistico per descrivere l'andamento di una popolazione è quello di assumere che le risorse siano limitate e quindi il tasso di crescita per persona diminuisca all'aumentare di N . Per semplicità supponiamo che la diminuzione sia lineare ottenendo così un'equazione logistica della forma:

$$\dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{k} \right)$$

dove r e k sono dei parametri positivi.

Esaminiamo il ritratto di fase di questo problema. Per prima cosa notiamo che, siccome $N \geq 0$, lo spazio delle fasi è la semiretta reale positiva. Dopodichè osserviamo che i punti fissi sono $N = 0$ e $N = k$ e studiamo il segno della derivata guardando dov'è positiva. Questo ci porta alla disequazione:

$$1 - \frac{N}{k} > 0$$

che è equivalente alla condizione $N < k$. Quindi nell'intervallo $(0, k)$ il flusso è crescente mentre nella restante parte della semiretta, esclusi i punti fissi, decrescente. Ciò suggerisce che il punto $N = 0$ è instabile mentre il punto $N = k$ stabile. In conclusione, se il dato iniziale è tale che $N(0) \neq 0$ allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k$$

cioè la popolazione tende alla cosiddetta capacità portante k .

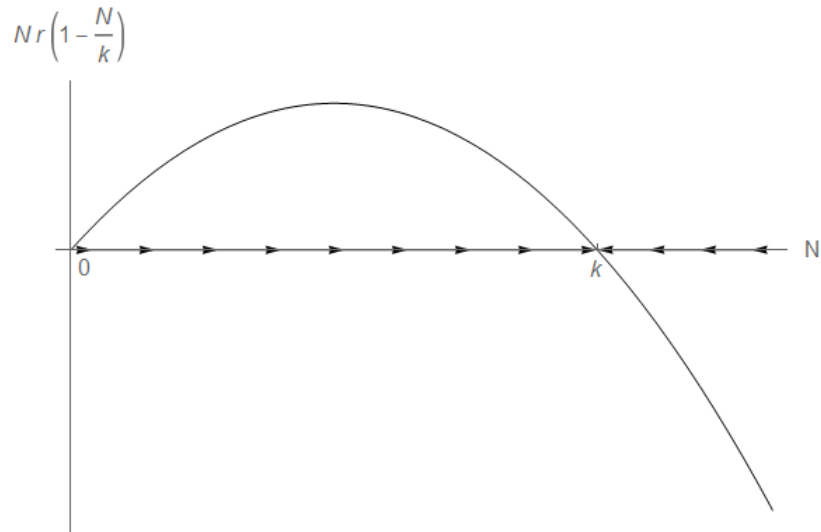


Figura 3: ritratto di fase di N

Fatto ciò abbiamo tutte le informazioni necessarie per poter fare un'analisi più diretta delle soluzioni ponendoci nel piano (N, t) , mostrata graficamente nella seguente figura 4.

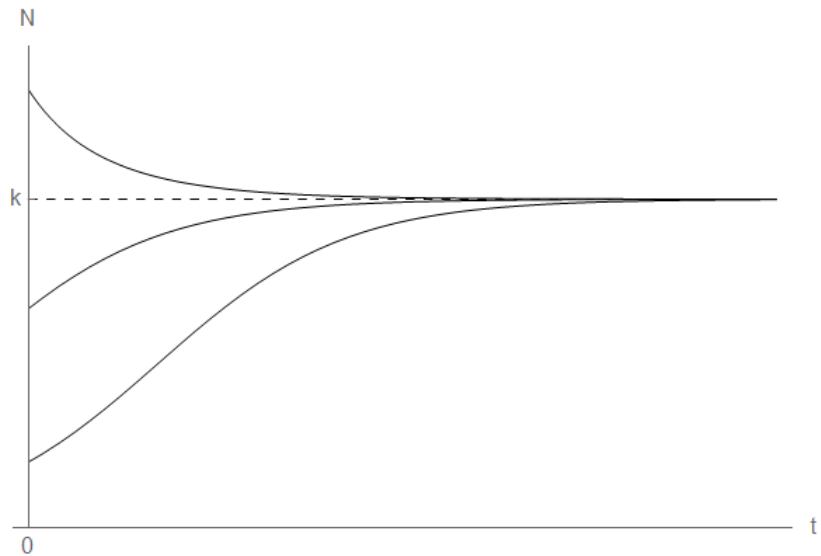


Figura 4: grafico di x in funzione di t per varie condizioni iniziali

1.2 Analisi lineare

Avendo un punto fisso x^* è possibile linearizzare in prossimità d'esso per ottenere informazioni sulla struttura locale del flusso. Supponiamo di avere $x(t) = x^* + \eta(t)$ dove η è una perturbazione (fluttuazione) della configurazione di equilibrio. Derivando otteniamo l'equazione:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x^* + \eta) = \frac{d\eta}{dt}$$

la quale può essere riscritta introducendo un'opportuna funzione f , che assumiamo regolare, tale che $\dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$:

$$\frac{d\eta}{dt} = f(x^* + \eta)$$

e espandendo in serie attorno a $\eta = 0$ arriviamo a:

$$\frac{d\eta}{dt} = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

dove, siccome x^* è un punto fisso, $f(x^*) = 0$. Inoltre ipotizziamo che η sia una piccola perturbazione, così da poter fermarci al primo ordine in η , e che $f'(x^*) \neq 0$, in modo che il primo termine non banale sia $\eta f'(x^*)$. Sotto queste assunzioni, l'equazione che governa la perturbazione è:

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \eta(t) f'(x^*)$$

dove $f'(x^*)$ è una costante, in quanto è la derivata prima della funzione f calcolata nella configurazione di equilibrio. Questa è un'equazione elementare che ha come soluzione degli esponenziali. In particolare, la perturbazione nell'intorno del punto fisso cresce (decade) esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$ (< 0). Dunque se $f'(x^*)$ non si annulla è il suo segno a determinare la stabilità locale. Se invece $f'(x^*) = 0$ bisogna studiare termini di ordine più elevato per avere qualcosa da dire. Inoltre notiamo che, siccome le soluzioni sono esponenziali:

$$\eta(t) \sim e^{f'(x^*)t}$$

la quantità:

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

fissa la scala temporale del problema. Cioè determina il tempo durante il quale la soluzione x varia in modo significativo in un intorno del punto fisso.

Esempio 1.3 (Equazione logistica). Si consideri nuovamente l'equazione logistica:

$$f(N) = r N \left(N - \frac{N}{k} \right)$$

allora:

$$f'(N) = r N \left(1 - 2 \frac{N}{k} \right)$$

dunque, osservando che $f'(0) = r > 0$ ($f'(k) = -r < 0$), si ritrova che $N = 0$ ($N = k$) è un punto instabile (stabile) in quanto piccole perturbazioni in un suo intorno crescono (diminuiscono) esponenzialmente.

Definizione 1.1 (Punto fisso iperbolico). Un punto di equilibrio (fisso) x^* tale che $f'(x^*) \neq 0$ è detto iperbolico (non-degenere).

Definizione 1.2 (Sistema dinamico iperbolico). Un sistema dinamico si dice iperbolico se tutti i suoi punti fissi sono iperbolici.

Per concludere alcuni commenti:

- sistemi dinamici unidimensionali continui del tipo descritto dall'equazione (1), con f a valori in \mathbb{R} , non hanno soluzioni periodiche perchè le loro traiettorie sono monotone. Quest'ultime infatti possono solo tendere verso infinito, un punto critico oppure essere costanti. Quindi lavorando su \mathbb{R} non ci possono essere oscillazioni in quanto la presenza di un'oscillazione sarebbe in contraddizione con la direzione del flusso. Questa è una proprietà topologica dello spazio delle fasi dovuta alla scelta di lavorare su \mathbb{R} ;
- supponiamo di avere un potenziale, ossia una funzione V tale che:

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

o, equivalentemente:

$$V = V(x) = -\int^x f(s) ds$$

esso decresce lungo le traiettorie, infatti:

$$\frac{d}{dt}V(x) = \frac{d}{dt}x(t) \frac{d}{dx}V(x)$$

il quale ricordando (1) diventa:

$$\frac{d}{dt}V(x) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

che, in particolare, è uguale a 0 se e solo se dV/dx è nullo. Quindi disegnando il potenziale possiamo immaginare che l'equazione differenziale descriva il moto di una particella che tende a muoversi verso il basso, rotolando lungo la linea tracciata dal grafico. Ciò fornisce un'idea qualitativa della traiettoria. Inoltre i punti di equilibrio coincidono con i punti critici del potenziale:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

e i minimi locali di V sono degli equilibri stabili verso i quali tenderà la soluzione.

1.3 Biforcazioni

Introduciamo una variabile μ che parametrizza la funzione f :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), \mu) = f_\mu(x(t))$$

e studiamo l'andamento qualitativo delle soluzioni in funzione della sua variazione. Pensiamo cioè a μ come ad un parametro di controllo la cui modifica comporta il conseguente cambiamento del nostro sistema.

Innanzitutto vediamo per quali condizioni la variazione non porta a nessuna modifica. Supponiamo esista un certo valore μ^* tale che:

$$\begin{cases} f_{\mu^*}(x^*) = 0 \\ f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0 \end{cases}$$

ovvero per cui x^* è un punto fisso iperbolico. In questo caso il teorema della funzione implicita implica che tale punto fisso sia strutturalmente stabile, ovvero non può essere rimosso con una variazione dei parametri.

Osservazione. Il teorema della funzione implicita fornisce le condizioni sotto le quali un'equazione del tipo:

$$g(x, \mu) = 0$$

può essere risolta univocamente per x , cioè sia possibile determinare una funzione $x = x(\mu)$. In altre parole esprime le condizioni sotto le quali la funzione $g(x, \mu)$ definisce implicitamente una funzione $x = x(\mu)$. Riferendoci al nostro caso esso implica l'esistenza di un'unica funzione regolare $\bar{x}(\mu)$ tale che valgano:

$$\begin{cases} \bar{x}(\mu^*) = x^* \\ f_{\mu^*}(\bar{x}(\mu)) = 0 \end{cases}$$

per $\mu \in U$ con U intorno aperto di μ^* . In termini semplici questo significa che i punti critici iperbolici permangono per piccole variazioni del parametro μ . Quindi possiamo definire un intorno U in cui il sistema dinamico si comporta, intuitivamente, sempre allo stesso modo e in maniera continua.

Considerando invece i valori in cui il punto critico cessa di essere iperbolico, ovvero sia quando $f_{\mu^*}(x^*) = f'_{\mu^*}(x^*) = 0$, si hanno fenomeni interessanti detti biforcazioni.

1.3.1 Biforcazione tangente

Assumiamo che la nostra equazione differenziale abbia la forma:

$$\dot{x} = r + x^2 = f_r(x) = f(x, r) \quad (2)$$

e analizziamola utilizzando il formalismo finora studiato. Cominciamo con lo studio dei punti critici:

$$f_r(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -r$$

osserviamo che si hanno 3 casi possibili al variare del segno di r :

- $r < 0$: l'equazione ha 2 soluzioni quindi sono presenti 2 punti d'equilibrio, uno stabile e l'altro instabile;
- $r = 0$: il flusso è sempre diretto verso destra e l'unico punto critico $x^* = 0$ viene detto mezzo stabile (mezzo instabile);
- $r > 0$: l'equazione non ha soluzioni reali, dunque non ci sono punti fissi.

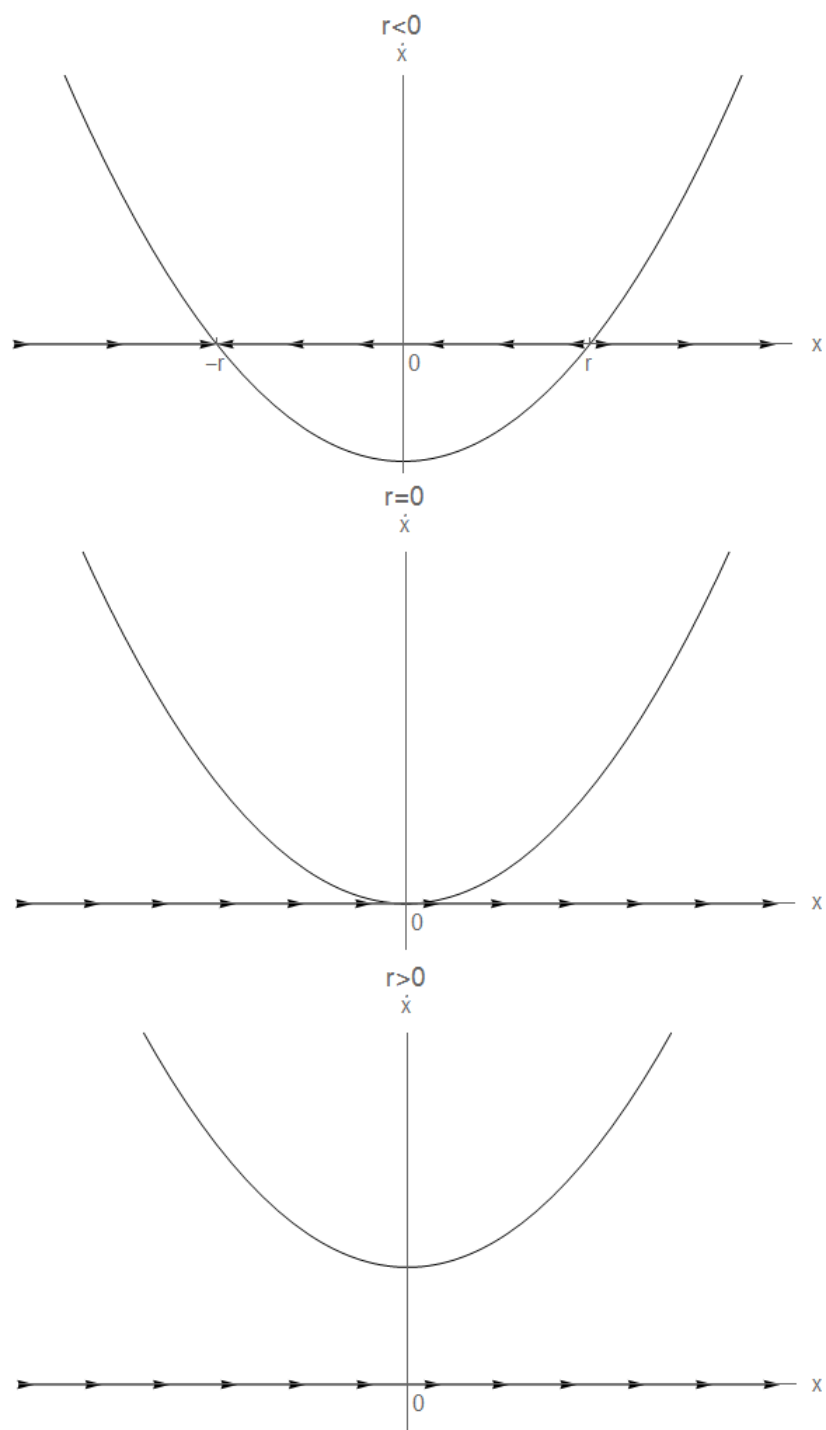


Figura 5: ritratti di fase dei 3 casi

Abbiamo quindi una differenza qualitativa tra i casi $r < 0$ e $r > 0$ e per questo diciamo che è avvenuta una biforcazione in $r = 0$. Studiamola convogliando tutta l'informazione in un unico grafico disegnato nel piano (x, r) , detto diagramma di biforcazione. Questo grafico fornisce informazioni sul numero di punti critici e sulla loro stabilità al variare di r , spiegando intuitivamente l'andamento del ritratto di fase di fase al variare del parametro r , ed è riportato in figura 6.

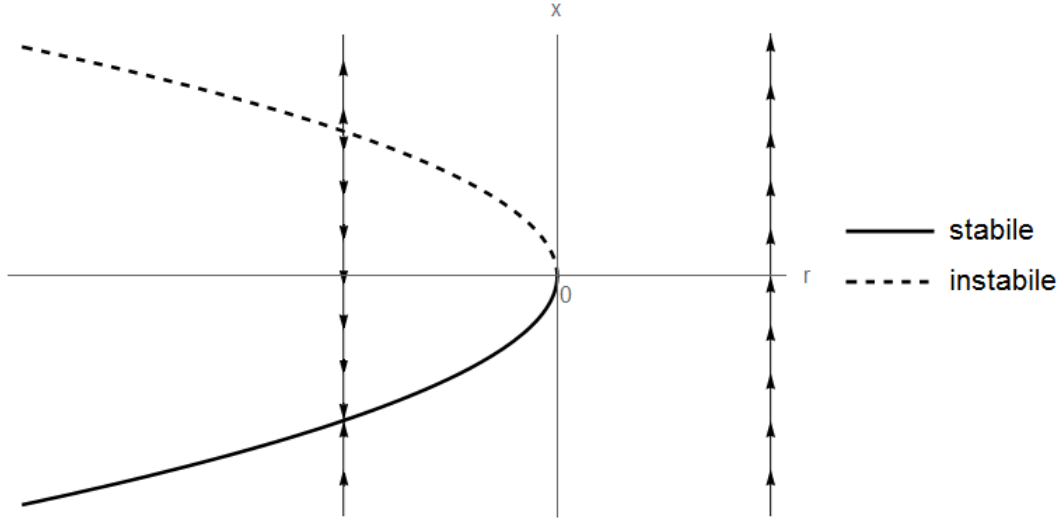


Figura 6: diagramma di biforcazione tangente

In generale, si ha una biforcazione tangente quando:

$$\begin{cases} f(x^*, r_c) = 0 \\ f'(x^*, r_c) = 0 \end{cases}$$

dove la prima equazione impone la condizione che x^* sia un punto critico mentre la seconda esprime la tangenza. A parole, si ha una biforcazione tangente quando esiste un valore r_c in cui la funzione f diventa tangente all'asse x e dove i due punti critici che si hanno per $r > r_c$ collassano in uno solo per poi scomparire quando $r < r_c$, come mostrato in figura 7.

Consideriamo ora $\dot{x} = f(x, r)$ e supponiamo che per:

$$\begin{cases} x = x^* \\ r = r_c \end{cases}$$

ci sia una biforcazione tangente. Verifichiamo che la linearizzazione del problema in un intorno di tale biforcazione fornisce l'esempio da cui siamo partiti, ossia l'equazione (2). Studiamo quindi cosa succede localmente espandendo $f(x, r)$ attorno a (x^*, r_c) :

$$f(x, r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, r_c} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{x^*, r_c} + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x^*, r_c} + \dots$$

da cui, trascurando i termini proporzionali a $(r - r_c)^n$ o $(x - x^*)^m$ con $n > 1$ e $m > 2$ numeri interi, otteniamo:

$$f(x, r) = (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{x^*, r_c} + (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x^*, r_c}$$

infatti i termini f e $\partial f / \partial x$ calcolati in (x^*, r_c) si annullano per ipotesi. Quindi, introducendo α e β con chiaro significato dei simboli, l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x, r)$ diventa:

$$\dot{x} = \alpha (r - r_c) + \beta (x - x^*)^2 \quad (3)$$

che generalizza (2).

In tal senso l'esempio visto è canonico, ossia rappresenta la struttura generale che appare nella biforcazione tangente al primo ordine non banale, e (3) è detta forma canonica. Le forme canoniche, che classificheremo, permettono di capire il tipo di biforcazione posseduto da un certo problema.

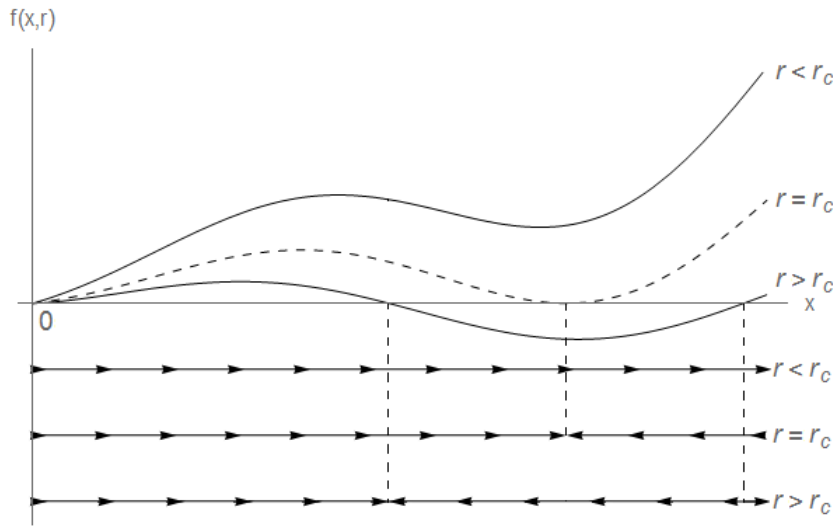


Figura 7: andamento di $f(x, r)$ al variare del parametro r

Ricapitolando, nella biforcazione tangente 2 punti critici collassano in uno solo al variare di un parametro. In particolare, ciò avviene quando la curva f è tangente all'asse x .

1.3.2 Biforcazione transcritica

Questo tipo di biforcazione si ha quando cambia la stabilità di uno o più punti fissi, ossia essi mutano da stabili a instabili o viceversa. Essa è definita dalla forma normale:

$$\dot{x} = r x - x^2 = x(r - x) \quad (4)$$

dalla quale intuiamo che sono presenti due punti critici: $x_1^* = 0$ e $x_2^* = r$, rispettivamente indipendente e dipendente dal valore di r . Il secondo punto fisso è strettamente negativo (positivo) se $r < 0$ (> 0) e coincide con $x_1^* = 0$ quando $r = 0$.

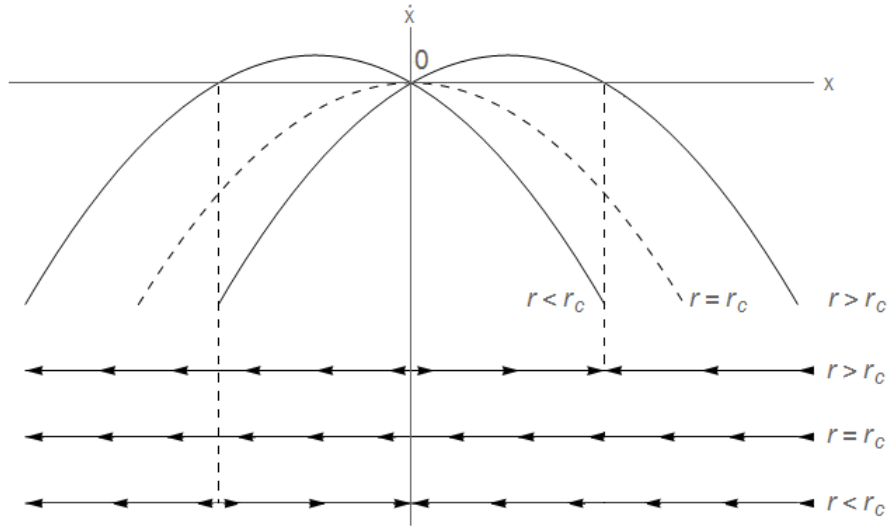


Figura 8: sovrapposizione dei ritratti di fase

Osserviamo che per $r < 0$ i punti critici x_1^* e x_2^* sono rispettivamente stabile e instabile. Variando r positivamente il sistema attraversa una biforcazione nel valore critico $r_c = 0$ dove i due punti fissi coincidono. Quando $r > 0$ i punti x_1^* e x_2^* sono rispettivamente instabile e stabile.

Notiamo inoltre che se immaginiamo la forma normale (4) derivata da una funzione $f = f(x, r)$ abbiamo che $f(x^*, r_c)$ e $f'(x^*, r_c)$ sono entrambe nulle e quindi il punto di equilibrio è iperbolico.

In figura 9 è riportato il diagramma di biforcazione dove si vede che al raggiungimento del valore r_c entrambi i punti fissi x_1^* e x_2^* cambiano la loro stabilità.

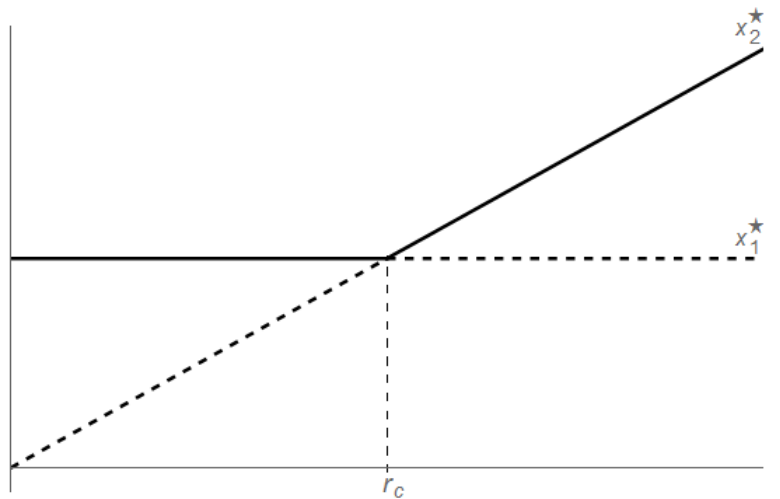


Figura 9: diagramma di biforcazione transcritica

Per chiarire le idee, Vediamo ora un esempio di biforcazione transcritica.

Esempio 1.4. Considerando l'equazione differenziale:

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$$

notiamo essere presente una biforcazione transcritica che coinvolge in particolare il punto fisso $x_1^* = 0$ e ci chiediamo per quali valori dei parametri a e b avviene.

Innanzitutto espandiamo l'esponenziale vicino allo zero:

$$\dot{x} = x - a \left(bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 \right) + O(x^3) = (1 - ab)x + \left(\frac{1}{2} ab^2 \right) x^2 + O(x^3) \quad (5)$$

e poniamo nulla la somma dei termini al massimo quadratici:

$$(1 - ab)x + \left(\frac{1}{2} ab^2 \right) x^2 = 0$$

ottenendo così il secondo punto fisso:

$$x_2^* \approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2}$$

che è un'approssimazione perchè abbiamo trascurato termini d'ordine superiore al secondo.

A questo punto dal confronto dell'equazione (5) con la (4) ricaviamo:

$$r = (1 - ab)$$

da cui, ricordando che nella forma normale $r_c = 0$, intuimmo che la biforcazione avviene per $ab = 1$, cioè si verifica per una cosiddetta curva di biforcazione.

Osservazione. Dobbiamo assumere che il valore dei parametri sia vicino al valore di biforcazione allo scopo giustificare l'espansione fatta.

1.3.3 Biforcazione a forchetta (Pitchfork)

La biforcazione a forchetta può essere di due tipi: super-critica o sub-critica. La forma normale per la tipologia super-critica è:

$$\dot{x} = rx - x^3$$

che ha la particolarità di essere invariante per $x \rightarrow -x$ in quanto entrambi i membri dell'equazione cambiano segno quando x lo fa. Questa caratteristica comporta certe proprietà di equivarianza del campo vettoriale.

Osserviamo ora che è presente un punto di equilibrio nello zero per ogni valore di r . In particolare, per $r \leq 0$ è stabile ed è l'unico punto fisso. Questo può essere facilmente visto riscrivendo l'equazione come:

$$rx - x^3 = x(r - x^2)$$

e osservando che il termine $(r - x^2)$ non ammette radici reali per $r \leq 0$. Notiamo inoltre che la sua stabilità è più debole nel caso $r = 0$ rispetto al caso $r < 0$ in quanto per $r = 0$ la linearizzazione intorno a $x = 0$ è nulla. Considerando invece $r > 0$ l'origine diventa instabile e appaiono 2 nuovi punti fissi in $\pm\sqrt{r}$, entrambi stabili.

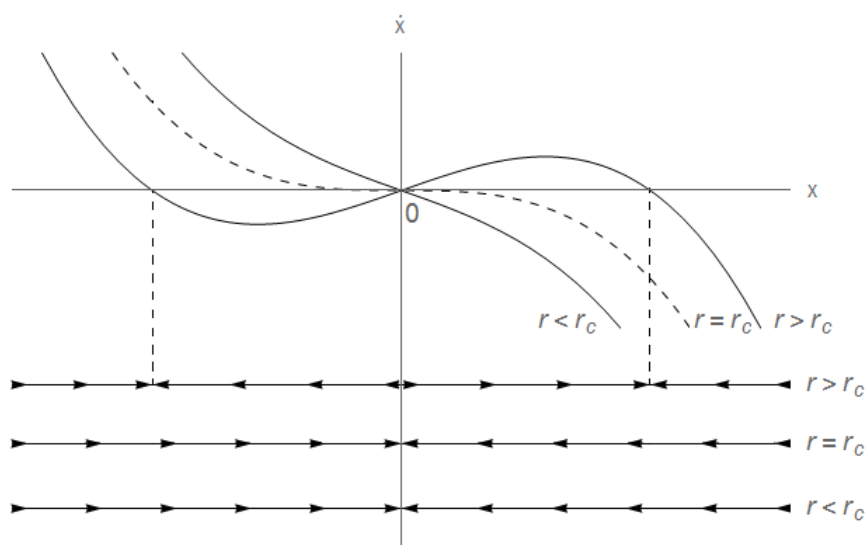


Figura 10: sovrapposizione dei ritratti di fase

Possiamo riassumere i concetti spiegati disegnando il diagramma di fase, riportato in figura 11. Esso spiega visivamente quanto detto: per r negativi si ha un solo punto fisso stabile in zero mentre per r strettamente positivi ci sono due nuovi punti fissi stabili, rappresentati dai due rami, e lo zero diventa instabile.

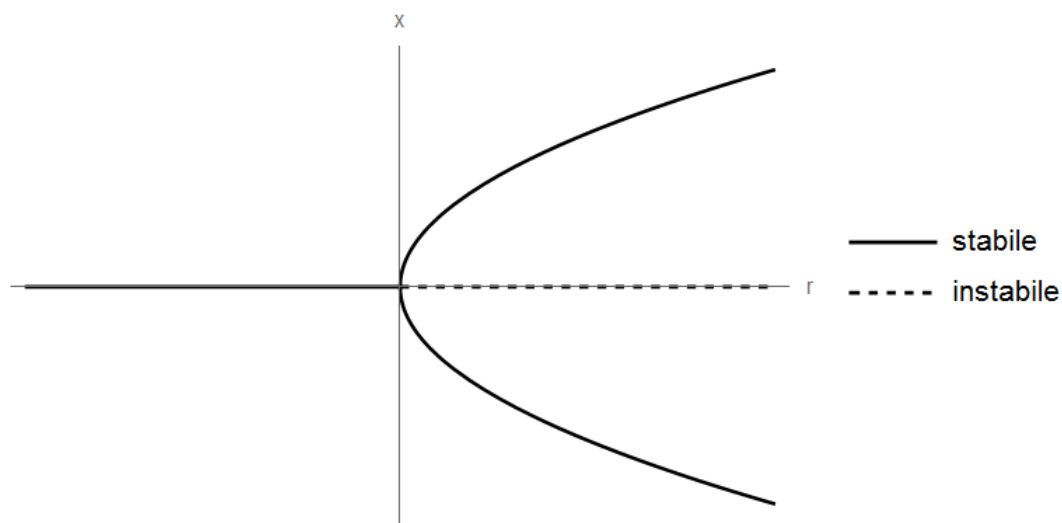


Figura 11: diagramma di biforcazione a forchetta di tipo super-critico

Osservazione. Prendendo la forma normale:

$$\dot{x} = r x - x^3$$

questa possiede un potenziale $V(x)$. Ricordiamo che, avendo $\dot{x} = f(x)$, la funzione f può essere associata a un potenziale dalla relazione:

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

che fornisce in questo caso:

$$V(x) = -\frac{1}{2} r x + \frac{1}{4} x^4$$

dove abbiamo trascurato le costanti arbitrarie perchè il potenziale è definito a meno di una costante. Questo è quindi il potenziale associato alla biforcazione a forchetta. Si può facilmente vedere che per $r \leq 0$ esso ha solamente un minimo assoluto in zero mentre $r > 0$ possiede due minimi assoluti nei punti $\pm\sqrt{r}$ e lo zero diventa un massimo locale.

Proprietà simili valgono per la biforcazione sub-critica definita da:

$$\dot{x} = r x + x^3$$

della quale il diagramma di biforcazione è riportato in figura 12.

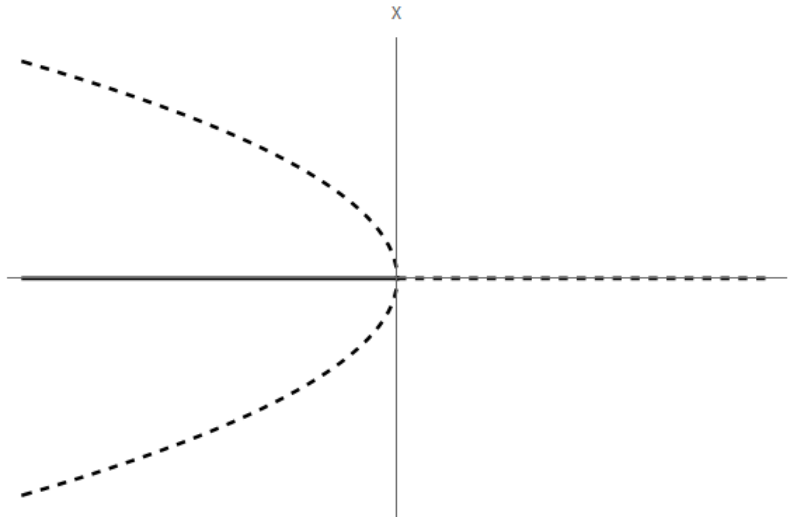


Figura 12: diagramma di biforcazione a forchetta di tipo sub-critico

In questo caso $x^* = \pm\sqrt{-r}$ sono punti instabili ed esistono solamente per $r < 0$.

Esercizio 1.2. Ricavare il diagramma di biforcazione per la seguente equazione differenziale:

$$\dot{x} = r x + x^3 - x^5 = x(r + x^2 - x^4)$$

1.3.4 Biforcazione imperfetta

Consideriamo l'equazione:

$$\dot{x} = r x - x^3 - h \tag{6}$$

che possiede due parametri di biforcazione: r e h . Questa restituisce la forma normale della biforcazione a forchetta di tipo super-critico quando $h = 0$:

$$\dot{x} = r x - x^3$$

la quale, come visto, ha una simmetria per $x \rightarrow -x$. Questa simmetria viene rotta quando $h \neq 0$ e quindi h è un parametro di controllo la cui variazione determina proprietà diverse del sistema. Come si può immaginare, la situazione ora è più complicata rispetto ai tipi di biforcazione precedenti che chiamiamo a codimensione 1 perchè avvengono solamente modificando un parametro.

Individuiamo i punti fissi: annulliamo il lato destro dell'equazione e cerchiamo gli zeri graficamente. Consideriamo quindi nel piano (x, y) le curve d'equazione:

$$y = r x - x^3, \quad y = h$$

e studiamo le loro intersezioni al variare di r o di h . Distinguiamo i casi:

- $r \leq 0$: si ha un solo punto d'intersezione, che può trovarsi a y positivi o negativi, per ogni valore assunto da h ;
- $r > 0$: sono presenti due valori critici del parametro h nei quali avviene una biforcazione. Questi sono pari a $\pm h_c$, con $h_c > 0$, e quindi possiamo parlare per semplicità di un unico valore critico h_c . Esso è tale che per $|h| > h_c$ c'è una sola intersezione, per $|h| = h_c$ avviene una biforcazione e per $|h| < h_c$ ce ne sono 3. Inoltre, le rette $y = h_c$ e $y = -h_c$ intersecano rispettivamente il massimo locale e il minimo locale della curva.

La figura 13 mostra quanto appena detto a parole: studiamola in dettaglio, limitandoci per semplicità al caso in cui r è positivo. Dal grafico possiamo facilmente osservare la presenza di $h_c = h_c(r)$ nel quale due punti fissi vengono creati o distrutti, quindi la biforcazione è tangente. Per esplicitare h_c troviamo il massimo locale della cubica studiandone la derivata:

$$\frac{d}{dx}(r x - x^3) = r - 3 x^2 = 0$$

da cui otteniamo:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$$

il quale sostituito nel lato destro dell'equazione (6) fornisce:

$$r x_{max} - x_{max}^3 = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}$$

grazie a cui intuiamo che:

$$h_c(r) = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}$$

funzione di r . Un ragionamento analogo può essere fatto usando valore minimo locale della cubica che, siccome è presente una simmetria rispetto all'origine, è situato in $x_{min} = -x_{max}$.

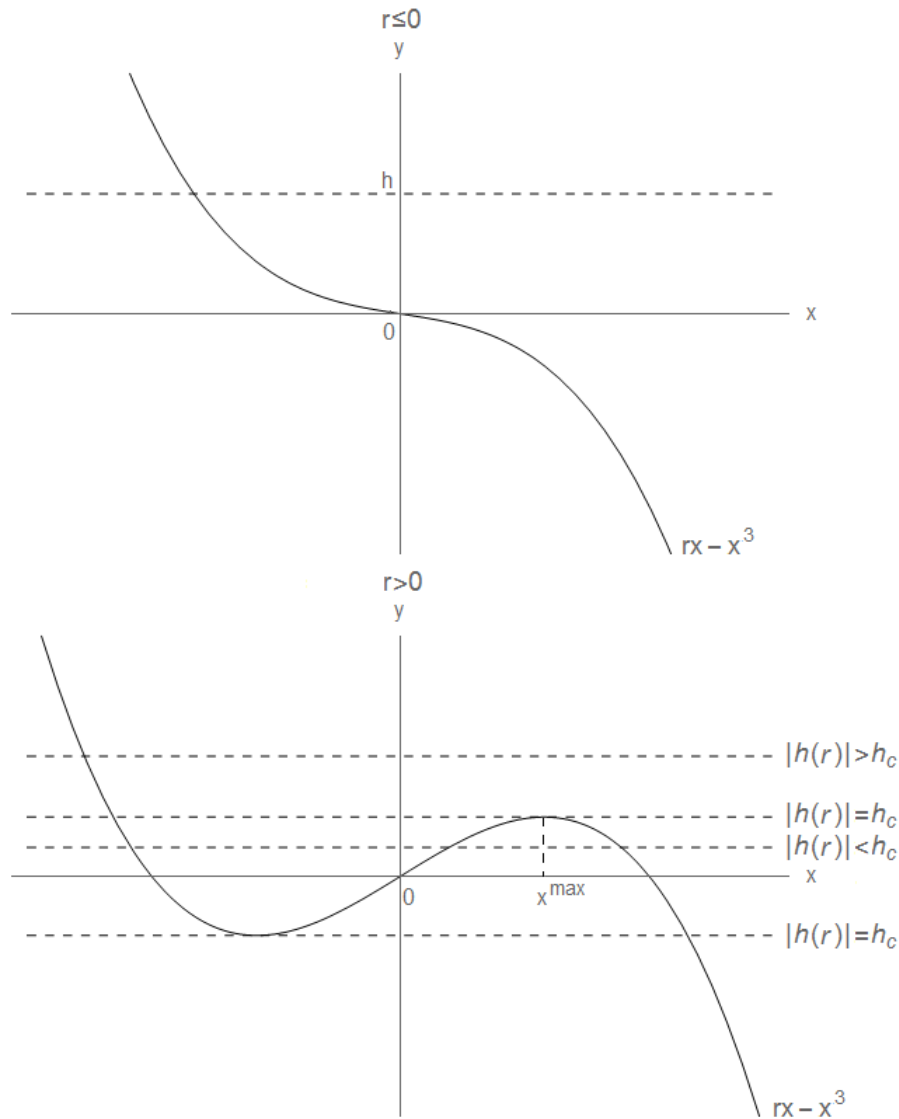


Figura 13: intersezione della cubica con la retta $y = h$ nei casi discussi

Studiamo ora la curva di biforcazione disegnata nel piano dei parametri (r, h) e riportata in figura 14. In questa vediamo due rami, rappresentanti le due curve $\pm h_c(r)$, che s'incontrano tangenzialmente nell'origine $(r, h) = (0, 0)$ formando una cuspid. Essi dividono una regione con 3 punti fissi, alla loro destra, da una regione con un punto fisso, alla loro sinistra. La biforcazione consiste nel passaggio da una regione all'altra attraversando una delle due curve.

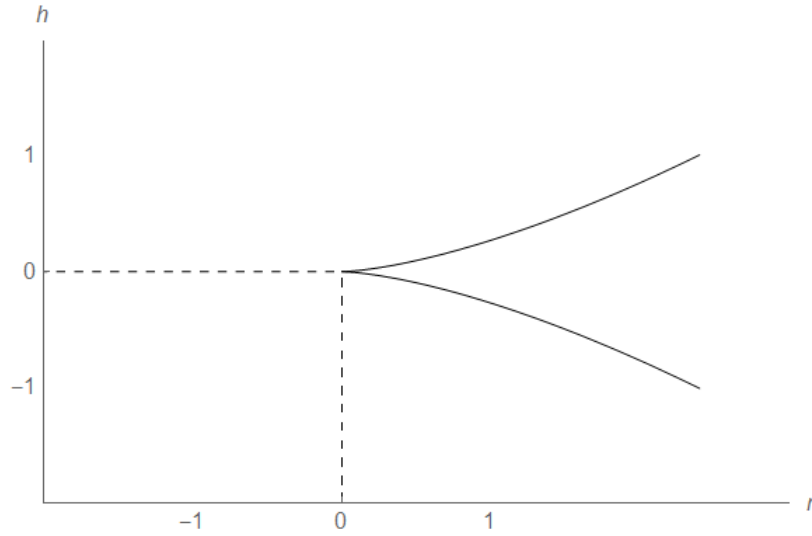


Figura 14: curva di biforcazione

Possiamo anche guardare i diagrammi di biforcazione che si ottengono ponendo h ad un valore fissato. In questo caso distinguiamo i casi $h = 0$ nel quale si ottiene un diagramma uguale a quello della biforcazione a forchetta e $h \neq 0$ per cui ha una biforcazione mancata, ossia i rami della biforcazione non si incontrano.

Disegnando tutti questi grafici assieme nello spazio tridimensionale (r, h, x) si ottiene la cosiddetta catastrofe di tipo cuspidale la cui proiezione sul piano (r, h) è appunto una cuspidale.

Esempio 1.5 (Modello di invasione di cavallette). Vediamo un modello usato per descrivere la presenza di parassiti in un ecosistema. Pensiamo a un sistema agricolo infestato da cavallette: volendo proteggere il raccolto s'introduce una specie di predatori, come degli uccelli, allo scopo mantenere gli insetti sotto controllo. Prendiamo quindi una popolazione N di cavallette che cresce seguendo il modello logistico e introduciamo un fattore $p(N)$:

$$\dot{N} = R N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - p(N)$$

il quale simula gli uccelli. In generale, ci aspettiamo che i predatori non s'interessino alle prede quando ce ne sono poche, cercando un diverso nutrimento o migrando verso un altro ecosistema, mentre quando il loro numero aumenta si nutrano principalmente d'esse. Tale comportamento è descritto abbastanza bene dalla funzione:

$$p(N) = \frac{B N^2}{A^2 + N^2}$$

dove B è il valore di saturazione a cui tende p per $N \gg 1$ e A caratterizza la transizione tra i due possibili comportamenti dei predatori, come mostrato in figura 15.

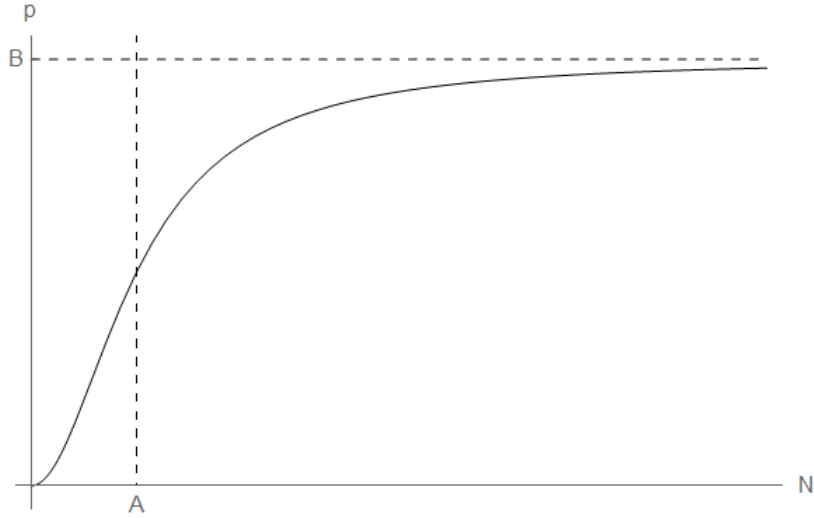


Figura 15: andamento predatori al variare dei parassiti

Convienne ora riscrivere l'equazione differenziale introducendo le variabili:

$$\tau = \frac{B}{A} t, \quad r = \frac{R A}{B}, \quad k = \frac{K}{A}, \quad x = \frac{N}{A}$$

si ottiene così:

$$\frac{dx}{d\tau} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2}$$

in questo modo si minimizza numero di fattori presenti. Cerchiamo i punti fissi: uno è $x^* = 0$ e gli altri soddisfano:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1 + x^2}$$

ovvero rappresentano intersezioni delle due curve descritte dai membri dell'equazione. In particolare, notiamo che il membro di destra è indipendente dai parametri grazie alle ridefinizioni fatte. Questo ci permette di studiare le intersezioni graficamente in modo più semplice: variando solamente la posizione di una delle due curve. Verifichiamo così che per k sufficientemente piccoli è presente solo un'intersezione mentre per k grandi ci sono 1 o 3 punti fissi al variare di r , come si vede in figura 16. Per k grandi c'è dunque una biforcazione tangente.

Guardiamo il caso in cui si hanno 3 punti critici oltre all'origine. Nel ritratto di fase, riportato in figura 17, sono presenti due punti fissi stabili detti "refuge" (riparo) e "outbreak" (epidemia) e un punto di equilibrio stabile chiamato soglia. In generale, si vuole evitare la configurazione d'epidemia in cui c'è un'esplosione nel numero di parassiti.

Studiamo ora la biforcazione nello spazio dei parametri (k, r) . Siccome c'è una biforcazione tangente per poter disegnare il grafico dobbiamo cercare l'intersezione tangenziale delle due curve:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad \frac{x}{1 + x^2}$$

che avviene sotto due condizioni:

1. le curve si intersecano:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

ottenendo così i punti fissi;

2. le curve si intersecano con stessa derivata:

$$\frac{d}{dx} \left[r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{1+x^2} \right] \Leftrightarrow -\frac{r}{k} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

che rappresenta la condizione di tangenza.

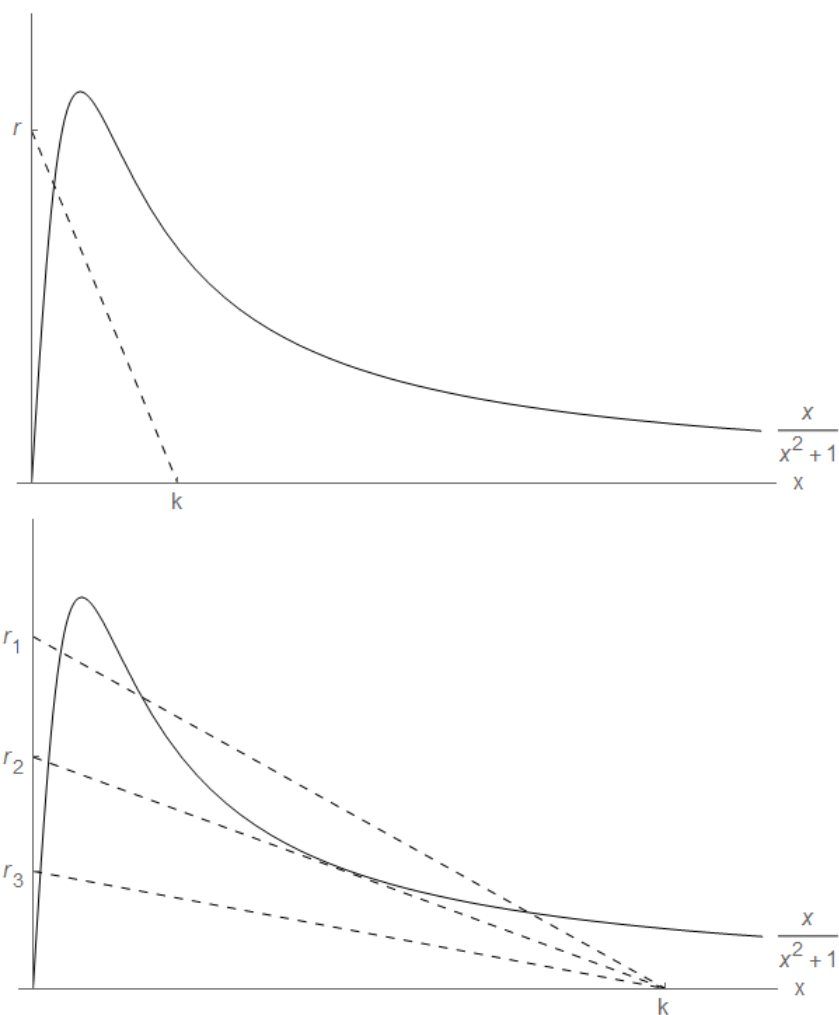


Figura 16: sovrapposizione delle due curve al variare dei parametri

Risolviemo quindi per r e per k . Dalla condizione 1. otteniamo che:

$$r = \frac{r}{k}x + \frac{x}{1+x^2} = -x \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{-x+x^3+x+x^3}{(1+x^2)^2}$$

equivalente a:

$$r(x) = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}$$

che sostituito nella condizione 2. fornisce:

$$\frac{1}{k} = -\frac{1}{r} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1+x^2)^2}{2x^3} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

ovverosia:

$$k(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

dove abbiamo assunto implicitamente che $x > 1$ in modo che il parametro k dell'equazione logistica sia positivo.

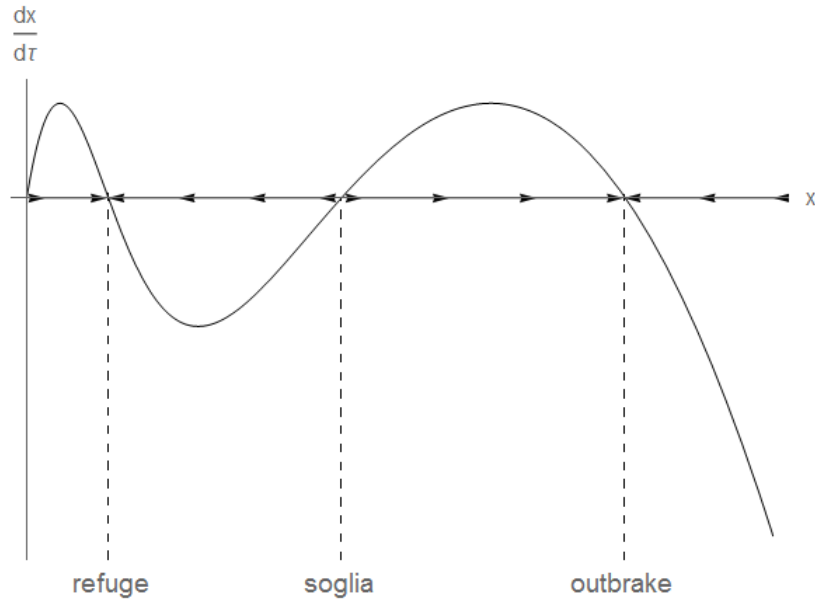


Figura 17: ritratto di fase nel caso di tre punti fissi

Descriviamo infine le curve tracciate dalla coppia $k(x)$ e $r(x)$ nel piano (k, r) per ogni valore di x . Esse, per $x > 1$, delineano i bordi delle regioni di riparo ed epidemia che sono separate da una zona detta bistabile, nella quale cioè sono presenti due punti critici stabili. L'attraversamento delle curve al variare dei parametri causa l'apparizione, o scomparsa, di due punti fissi.

1.4 Flussi sul cerchio

Scegliamo un cerchio, cioè la sfera unidimensionale S^1 , come dominio delle nostre funzioni. Consideriamo cioè sistemi dinamici del tipo:

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

dove θ è una funzione a valori sul cerchio e f è una funzione regolare e periodica di periodo 2π . In analogia a quanto detto per funzioni a valori reali possiamo definire un campo vettoriale che associa un vettore ad ogni punto di S^1 . Come sappiamo, in \mathbb{R} il flusso è sempre crescente o decrescente e quindi la soluzione si allontana o avvicina ad un punto critico senza poter essere periodica. Questo cambia quando si modifica la topologia dello spazio: scegliendo il cerchio nasce la possibilità di ottenere soluzioni periodiche.

Esempio 1.6. Prendiamo l'equazione differenziale:

$$\dot{\theta} = \sin(\theta)$$

e notiamo che i punti fissi sono $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Osserviamo inoltre che sul semicerchio superiore $\sin(\theta)$ è positivo mentre in quello inferiore negativo. Prendendo quindi θ convenzionalmente tra $[0, 2\pi]$ e crescente in senso antiorario, il ritratto in fase ha la forma riportata in figura 18.

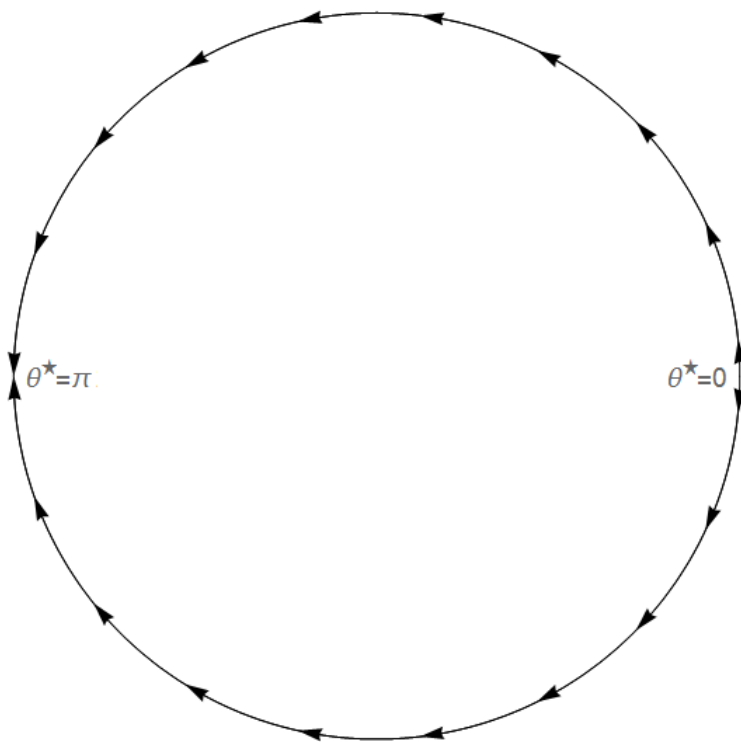


Figura 18: ritratto in fase sul cerchio

Esempio 1.7. Consideriamo:

$$\dot{\theta} = \omega$$

con ω costante. La soluzione è:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

ossia una funzione periodica di periodo $T = 2\pi/\omega$ siccome θ prende valori sul cerchio.

Esempio 1.8. Prendiamo:

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin(\theta)$$

con ω e a strettamente positivi. Per disegnare il ritratto di fase si procede in modo analogo a quanto fatto nel caso lineare. A seconda del rapporto tra ω e a l'equazione può avere o meno soluzioni in quanto il seno è compreso tra -1 e 1. Per $a < \omega$ non ci sono soluzioni in quanto la funzione è sempre strettamente positiva, per $a = \omega$ c'è una sola intersezione e, infine, per $a > \omega$ ce ne sono due e la funzione assume anche valori negativi. Per $a < \omega$ la soluzione è periodica e oscilla naturalmente con periodo:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

per un tempo indeterminato.

2 Sistemi dinamici unidimensionali discreti

Approcciamo i sistemi dinamici unidimensionali discreti introducendo il metodo di Eulero usato per discretizzare i sistemi continui. Consideriamo dunque un sistema dinamico unidimensionale continuo:

$$\dot{x} = f(x)$$

con f funzione regolare. Discretizzarlo significa selezionare degli istanti temporali t_0, t_1, \dots, t_n ai quali misurare la variabile di stato x ottenendo dei valori $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \dots, x(t_n) = x_n$. A tale scopo il metodo di Eulero approssima la derivata \dot{x} al rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \simeq \dot{x} = f(x)$$

cossichè, definendo $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ e supponendo il passo di discretizzazione $\Delta t = h$ costante, si ottiene:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) h$$

o, equivalentemente:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) h$$

che viene chiamata equazione alle differenze finite del prim'ordine, in quanto x_{n+1} dipende solo da x_n e non da altri valori precedenti della discretizzazione, e rappresenta un sistema dinamico discreto. Per ricavare la soluzione di un sistema dinamico discreto con dato iniziale x_0 si calcola il suo valore al tempo t_1 :

$$x_1 = x_0 + f(x_0) h$$

dopodichè si itera il procedimento ricavando x_2 e così via.

Esempio 2.1. *Equazione logistica.* Consideriamo la mappa logistica continua:

$$\dot{x} = a x (1 - x)$$

con $a > 0$. Discretizziamola con il metodo di Eulero:

$$x_{n+1} - x_n = a x_n (1 - x_n) \Delta t$$

dove, ipotizzando il passo incrementale costante, poniamo $b = a \Delta t$:

$$x_{n+1} = x_n + x_n (1 - x_n) b = b x_n \left(\frac{1+b}{b} - x_n \right)$$

che sfruttiamo ridefinendo la variabile di stato:

$$y_n = \frac{b}{1+b} x_n$$

grazie a cui otteniamo:

$$y_{n+1} = (1+b) y_n (1 - y_n) = \lambda y_n (1 - y_n)$$

con $\lambda = (1+b) > 0$. Quest'ultima equazione costituisce la mappa logistica discreta che può avere soluzioni cosiddette caotiche.

Un secondo modo per discretizzare un sistema continuo è la ricerca degli zeri con il metodo delle tangenti. Supponiamo di avere una certa funzione $f = f(x)$ di variabile $x \in \mathbb{R}$ e di sapere che in un certo intervallo $I = [a, b]$ questa ammette uno zero. Per trovare il valore $\bar{x} \in I$ tale per cui $f(\bar{x}) = 0$ si può usare, sotto opportune ipotesi, il metodo delle tangenti. Questo consiste dello scegliere un valore $x_0 \in I$ iniziale, considerare la tangente alla funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$ e prendere l'intersezione x_1 di tale tangente con l'asse x . Dopodichè si itera il procedimento partendo da x_1 e trovando il punto x_2 d'intersezione.

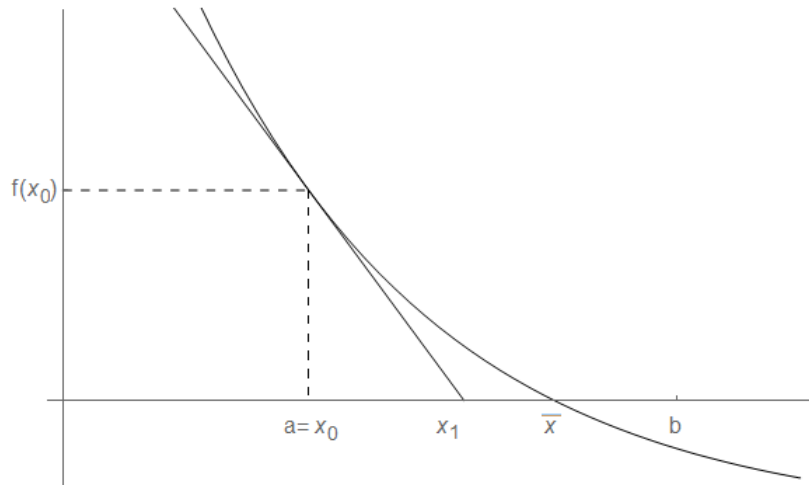


Figura 19: metodo delle tangenti

Proseguendo con le iterazioni si ottiene una successione di valori x_1, x_2, \dots, x_n che, se la funzione è continua, regolare, monotona e a concavità definita nell'intervallo I , converge a \bar{x} . Per ricavare da quanto detto un'equazione alle differenze finite approssimiamo la funzione linearizzandola attorno a x_0 :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

che si annulla per:

$$x = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

e quindi iterando n volte si ottiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

che è una mappa scalare e definisce per ricorrenza una successione $\{x_n\}_n$ la quale converge a \bar{x} per $n \rightarrow \infty$. L'equazione può anche essere vista come la discretizzazione del sistema dinamico continuo:

$$\dot{x} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

attraverso il metodo di Eulero.

Notiamo che lo zero della funzione f è un punto fisso della mappa discreta, cioè un punto x_n per il quale:

$$x_n = f(x_n)$$

cioè applicandovi la mappa lo si riottiene. Nel caso del metodo delle tangenti:

$$x_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow f(x_n) = 0$$

ovverosia gli zeri della funzione sono punti fissi della mappa, e viceversa.

Esempio 2.2 (Modelli di epimedia). Introduciamo alcuni modelli di epidemi. Questi vengono anche detti modelli compartimentali perchè categorizzano la popolazione in compartimenti allo scopo di descrivere i fenomeni epidemiologici.

Iniziamo dal modello SI che divide gli individui in due compartimenti o classi:

- S: persone suscettibili, ovvero che possono essere contagiate;
- I: persone infettive, cioè che sono state contagiate e sono contagiose.

Notiamo che in questo modello i numeri iniziali di persone suscettibili e infettive possono rispettivamente solo diminuire e crescere. Supponiamo per semplicità che la probabilità β di contagio, anche detta tasso di infezione, sia la stessa per ogni membro della popolazione e denotiamo con S_n le persone suscettibili al tempo generico t_n . Possiamo pensare che S_n si riduca di un fattore proporzionale al numero di incontri tra gli individui delle due classi e aumenti della stessa quantità il numero I_n di individui infettivi:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n \end{cases} \quad (7)$$

ottenendo in questo modo una mappa scalare bidimensionale che descrive poco realisticamente l'evoluzione di un'epidemia.

Raffiniamo la descrizione passando al modello SIR che aggiunge un terzo compartimento: la classe dei rimossi denotata con R. Queste persone non contribuiscono al diffondersi della malattia perchè decedute, guarite o isolate e quindi senza possibilità contagiarsi o contagiare. In questo modello i rimossi provengono solo dalle persone appartenenti alla classe I riducendone il numero:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n \end{cases}$$

abbiamo così una descrizione molto usata e altrettanto semplice.

Introduciamo ora l'ipotesi di un periodo di latenza in cui l'individuo infetto non è ancora contagioso. Ciò porta all'aggiunta di una nuova classe L dove una persona suscettibile si sposterà dopo aver contratto la malattia. Trascorso un tempo pari al periodo di latenza la persona nella classe L passerà da essere infetta ma non contagiosa ad essere infetta e contagiosa, cioè alla classe I . Scegliendo il passo dell'iterazione uguale al periodo di latenza i presenti nella classe L al tempo n diventano infettivi al tempo $n + 1$ contribuendo all'aumento di I_{n+1} :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ L_{n+1} = L_n + \beta S_n I_n - L_n = \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n - \gamma I_n + L_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n \end{cases}$$

possiamo inoltre fare un'ulteriore assunzione per semplificare maggiormente le formule: supponiamo che il tempo di decorso della malattia, cioè il tempo impiegato da un infetto contagioso a passare alla classe dei rimossi, sia anch'esso pari al passo d'iterazione. In questo modo, all'istante $n + 1$ il numero di infettivi presenti al tempo n si sono tutti spostati dalla classe I alla classe R :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ L_{n+1} = \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = L_n \\ R_{n+1} = R_n + I_n \end{cases}$$

in altri termini $\gamma = 1$.

Torniamo ora al modello SI che è interessante a livello matematico. In questo abbiamo trascurato la dinamica vitale, cioè i decessi non correlati alla malattia e le nascite. Questa ipotesi può essere più o meno sensata in base alla durata dell'epidemia e porta il sistema ad avere una grandezza che si conserva detta integrale primo, o costante, del moto. Infatti sommando le due equazioni in (7) si ottiene:

$$S_{n+1} + I_{n+1} = S_n + I_n = N$$

che è quindi costante nel tempo e rappresenta il numero totale di persone presenti allo scoppio dell'epidemia, anche detto taglia della popolazione. Grazie alla presenza di quest'integrale di moto possiamo descrivere il sistema utilizzando una sola variabile, riducendoci dunque ad una mappa scalare. Scegliamo quindi di esprimere le due equazioni in funzione del solo numero d'infettivi:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \beta (N - I_n) I_n = (1 + \beta N) I_n \left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta N} I_n \right) \\ S_n = N - I_n \end{cases}$$

e otteniamo così un sistema disaccoppiato dove possiamo riconoscere l'equazione logistica riscalandolo opportunamente la variabile I_n :

$$i_n = \frac{\beta}{1 + \beta N} I_n, \quad i_{n+1} = \frac{\beta}{1 + \beta N} I_{n+1}$$

infatti in questo modo ricaviamo:

$$i_{n+1} = \lambda i_n (1 - i_n)$$

dove $\lambda = 1 + \beta N > 1$ è un parametro di biforcazione. Notiamo quindi che l'evoluzione nel tempo degli infettivi è descritta dalla mappa logistica discreta, che può essere caotica.

2.1 Orbite di sistemi discreti

Abbiamo visto mappa scalare unidimensionali:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove $x_n \in \mathbb{R}$ e quindi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con f di classe C^1 .

Facciamo ora un esperimento: scelto un numero qualsiasi, che denotiamo x_0 , ne calcoliamo il coseno ottenendo un altro numero x_1 :

$$x_1 = \cos(x_0)$$

dopodichè iteriamo il processo calcolando $x_2 = \cos(x_1)$ e così via. Ripetendo l'operazione diverse volte si ottiene una successione $\{x_n\}_n$ che sembra convergere ad un preciso valore per $n \gg 1$. In tabella 1 è riportato un esempio nel quale si è partiti da $x_0 = 0$.

Tabella 1: iterazioni del coseno

t_n	x_n	x_{n+1}
0	1	0.540302
1	0.540302	0.857553
2	0.857952	...
...
28	...	0.739089
29	0.739089	0.739082
30	0.739082	0.739085

Replicando l'esperimento partendo da diversi numeri iniziali si osserva che, dopo un numero sufficiente di passi, si arriva sempre allo stesso risultato. Questo, con 6 cifre decimali, è $x_e = 0.729085$ a cui ritorneremo in seguito. Per adesso ci limitiamo a osservare che la successione ottenuta è un esempio di orbita di un sistema discreto, in particolare, di semiorbita positiva.

Definizione 2.1 (Semiorbita positiva). Data una mappa scalare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce semiorbita positiva (in avanti) l'insieme:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(x_0)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ seme dell'orbita, f^n composizione di f con sè stessa n volte e $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

Notiamo che siccome la funzione è definita su tutto \mathbb{R} possiamo iterarla senza problemi perchè, in particolare, è definita in $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Tuttavia alcune mappe sono definite su un insieme aperto $E \subset \mathbb{R}$. Per iterare una funzione g definita in $E \subseteq \mathbb{R}$ c'è bisogno che $g(E) \subseteq E$, ovvero che la sua immagine sia contenuta nel suo dominio. In altre parole il dominio della funzione dev'essere invariante per la funzione stessa.

Definizione 2.2 (Semiorbita negativa). Data una mappa scalare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile si definisce semiorbita negativa (all'indietro) l'insieme:

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(x_0)$$

con f^{-n} composizione dell'inversa di f con sè stessa n volte.

Definizione 2.3 (Soluzione generale di una mappa scalare). Si definisce soluzione generale della mappa scalare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'operatore:

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi(n, x_0) = f^n(x_0)$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Notiamo che l'integrale generale può anche essere visto come il flusso del sistema dinamico discreto definito sul prodotto cartesiano dell'insieme \mathbb{R} per lo spazio delle fasi e associa ad ogni condizione iniziale l'iterata n -esima corrispondente. Esso quindi risolve la dinamica del sistema considerato perchè permette di prevedere l'evoluzione di un qualunque dato.

2.2 Serie temporale

La soluzione generale di un sistema si calcola esplicitamente in pochissimi casi costringendoci a uno studio di tipo qualitativo. A tale scopo introduciamo una prima rappresentazione visiva delle mappe: la serie temporale. Essa consiste del grafico della mappa in funzione del tempo. Per fare un esempio si riporta in figura 20 la serie temporale delle prime 10 iterazioni del coseno che sembra avere delle oscillazioni smorzate attorno al punto x_e .

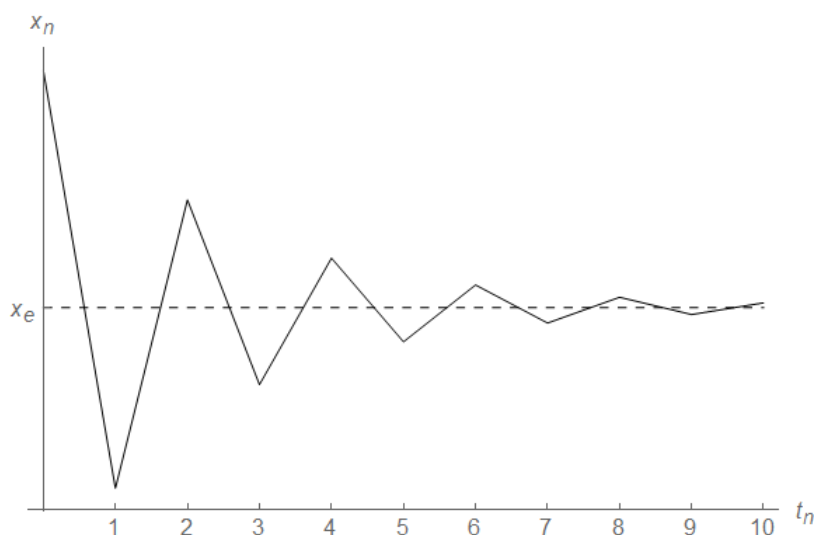


Figura 20: serie temporale del coseno

Studiamo ora la relazione tra queste mappe e le successioni. Ricordiamo che una successione di numeri reali si può introdurre in due modi:

- come un'applicazione $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ indicando $a_n = g(n)$;
- per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = c \end{cases}$$

dove c costante. Notiamo che la successione così definita è una soluzione particolare della mappa generata dalla funzione f .

Esiste una relazione tra le due definizioni. Chiamiamo $x_n = g(n)$: se supponiamo g invertibile allora $n = g^{-1}(x_n)$. Conseguentemente:

$$x_{n+1} = g(n+1) = g(g^{-1}(x_n) + 1)$$

e, per confronto, possiamo concludere che la relazione fra le due definizioni è:

$$f(x_n) = g(g^{-1}(x_n) + 1)$$

che naturalente ha senso se g è invertibile e quindi, in particolare, se è monotona.

Esempio 2.3 (Mappa della duplicazione cellulare). Consideriamo una popolazione di cellule le quali si duplicano a intervalli regolari di tempo e dunque il loro numero soddisfa la relazione $x_{n+1} = 2x_n$. Partendo da $x_0 \in \mathbb{N}$ otteniamo la successione:

$$x_0 \rightarrow x_1 = 2x_0 \rightarrow x_2 = 2x_1 = 4x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = 2^n x_0$$

ossia $\varphi(n, x_0) = x_n = 2^n x_0$. L'andamento della soluzione è quindi esponenziale come si può vedere nella serie temporale in figura 21.

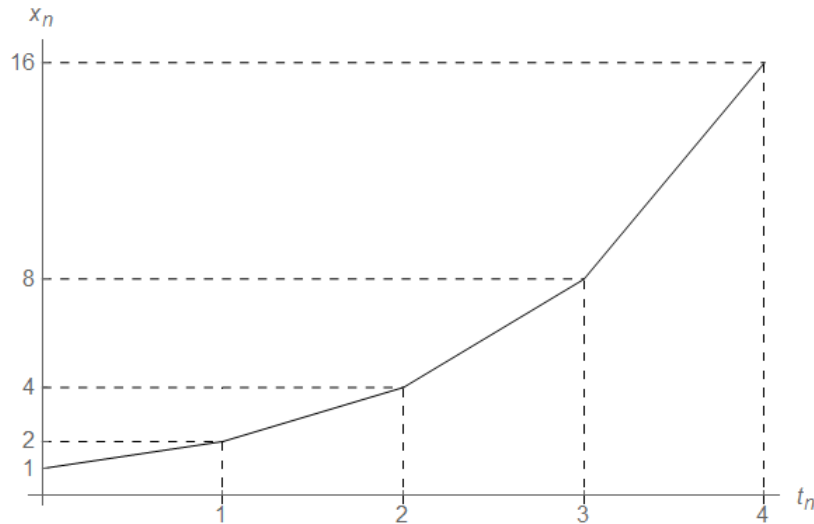


Figura 21: serie temporale della duplicazione cellulare con $x_0 = 1$

Tuttavia non tutte le orbite di questa mappa hanno questo comportamento: esiste una soluzione costante che si ottiene partendo da $x_0 = 0$. Questo caso banale, che ovviamente non ha interesse applicativo, costituisce una situazione di equilibrio in quanto $f(x_0) = x_0$. In altre parole $x_0 = 0$ è un punto fisso della mappa di duplicazione cellulare.

2.3 Punti fissi

Un punto fisso (di equilibrio) x_e della mappa definita da f è tale che:

$$f^n(x_e) = \dots = f^2(x_e) = f(x_e) = x_e$$

ossia è una soluzione stazionaria del moto.

Per trovare i punti fissi di f è possibile:

- introdurre l'equazione:

$$g(x) = f(x) - x$$

e studiarne gli zeri;

- risolvere graficamente l'equazione $f(x) = x$, cioè trovare operativamente le intersezioni tra la funzione e la bisettrice del primo e terzo quadrante nel piano $(x, f(x))$, com'è stato fatto in figura 22.

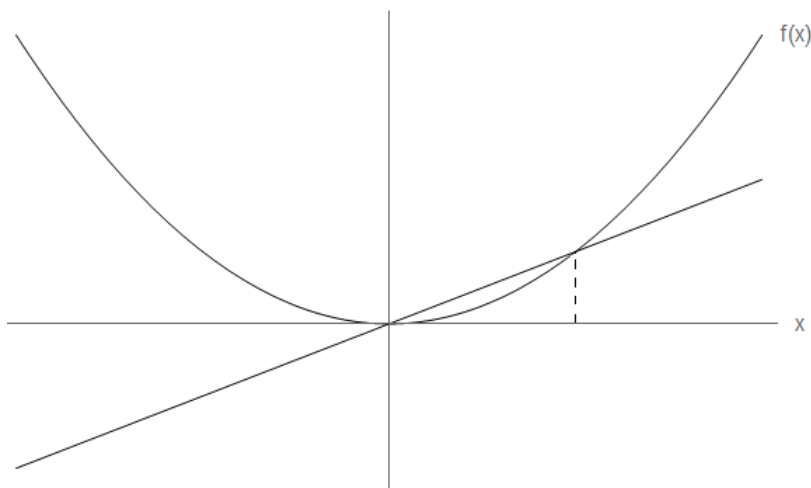


Figura 22: metodo grafico per trovare i punti fissi

Osserviamo che un punto fisso rappresenta esso stesso un'orbita che viene detta degenera perché rimane indefinitivamente nello stesso punto.

2.4 Rappresentazione a gradini

Ricordiamo che iterando il coseno un numero sufficiente di volte si ottiene lo stesso risultato partendo da un qualunque dato iniziale. Capiamone il motivo definendo un'altra rappresentazione grafica, detta rappresentazione a gradini o scalini, cobweb plot in inglese. Questa si costruisce innanzitutto disegnando la funzione $f(x)$ e calcolando l'orbita partendo dal punto iniziale x_0 scelto, riportata in tabella 2.

Tabella 2: orbita di punto iniziale x_0

t_n	x_n	x_{n+1}
0	x_0	$x_1 = f(x_0)$
1	x_1	$x_2 = f(x_1)$
2	x_2	...
...

A questo punto si considera la bisettrice del primo e terzo quadrante. Questa viene usata per riportare il punto x_n dall'asse delle ordinate a quelle delle ascisse e tracciare delle linee da essa ai punti sui due assi. Fatto ciò si possono congiungere i punti d'intersezione tra queste linee e la funzione $f(x)$ o la bisettrice partendo da x_0 . Si ottiene così la rappresentazione a scalini, mostrata in figura 23.

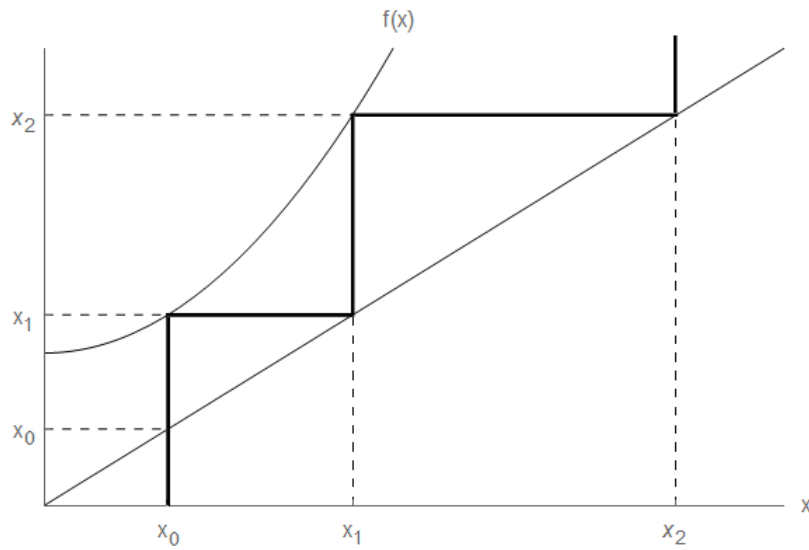


Figura 23: rappresentazione a scalini

Notiamo inoltre che i punti riportati indifferentemente su uno dei due assi, che rappresentano entrambi lo spazio delle fasi \mathbb{R} , descrivono l'orbita della mappa unidimensionale.

Consideriamo quindi la mappa:

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

e cerchiamone i punti fissi, che soddisfano l'equazione $x = \cos(x)$. Risolvendola numericamente o graficamente si ottiene un unico punto fisso coincidente con il valore a cui tutte le successioni convergono. Questo può essere spiegato qualitativamente guardando la rappresentazione a scalini, riportata in figura 24. In questa notiamo che le orbite si avvicinano asintoticamente al punto fisso con un andamento nello spazio delle fasi che rappresenta un'oscillazione smorzata attorno al punto fisso x_e . Questo succede per qualsiasi dato iniziale, per questo motivo tale punto fisso viene chiamato attrattore globale.

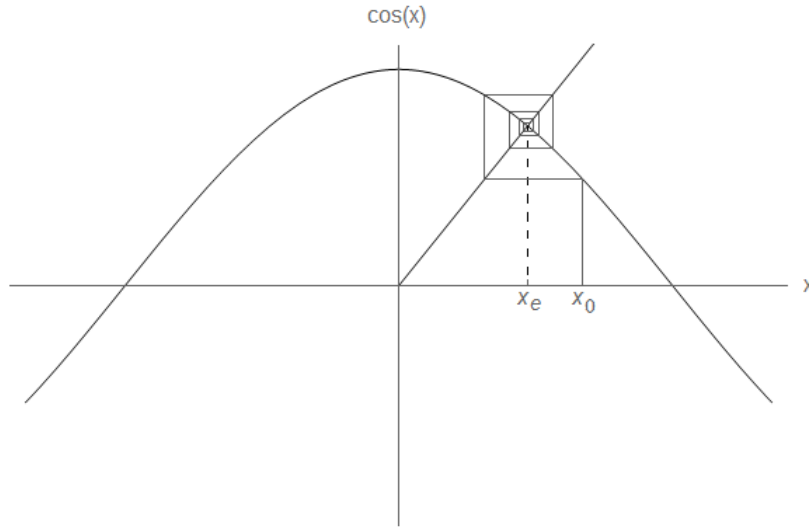


Figura 24: rappresentazione a scalini della mappa del coseno

2.5 Stabilità dei punti fissi

Diamo qualche definizione. Di seguito si considererà x_e punto fisso per la mappa definita dalla funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 2.4 (Punto fisso stabile). Il punto fisso x_e si dice stabile se per ogni intorno $U(x_e)$, detto intorno di confinamento dell'orbita, esiste un intorno $V(x_e) \subseteq U(x_e)$, chiamato intorno di confinamento dei dati iniziali, tale che per ogni dato iniziale $x_0 \in V(x_e)$ si ha che l'orbita nata in x_0 rimane confinata in $U(x_e)$.

Definizione 2.5 (Punto fisso instabile). Il punto fisso x_e si dice instabile se non è stabile.

Definizione 2.6 (Bacino di attrazione). Si definisce bacino di attrazione del punto fisso x_e l'insieme dei dati iniziali x le cui orbite soddisfanno la condizione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_e$$

Definizione 2.7 (Punto fisso attrattivo). Il punto fisso x_e si dice attrattivo se esiste un intorno $W(x_e)$ tale che per ogni dato iniziale $x \in W(x_e)$ succede che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_e$$

o, equivalentemente, se il suo bacino di attrazione contiene almeno un suo intorno.

Definizione 2.8 (Attrattore globale). Il punto fisso x_e si dice attrattore globale se il suo bacino di attrazione coincide con tutto lo spazio delle fasi, ossia $B(x_e) = \mathbb{R}$ nel caso unidimensionale.

Definizione 2.9 (Punto fisso asintoticamente stabile). Il punto fisso x_e si dice asintoticamente stabile se:

- è stabile;
- è attrattivo.

2.5.1 Stabilità dei punti fissi di mappe lineari

Le mappe lineari, come quella di duplicazione cellulare, costituiscono una famiglia ad un parametro. Esse sono infatti generalizzate dall'equazione:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

dove $\lambda = 2$ nel caso della duplicazione cellulare. Studiamo quindi il loro comportamento al variare del parametro λ :

- $\lambda = 1$: la mappa è l'identità, ovvero tutti i punti in \mathbb{R} sono punti di equilibrio stabile della mappa;
- $0 < \lambda < 1$: l'unica intersezione tra la mappa e la bisettrice del primo e terzo quadrante è l'origine a cui le orbite convergono per qualsiasi dato iniziale x_0 , come si può vedere disegnando il diagramma a scalini. Lo zero è dunque un attrattore globale. Inoltre, disegnando la serie temporale si osserva che le orbite sono monotone decrescenti (crescenti) se x_0 strettamente positivo (negativo);
- $-1 < \lambda < 0$: si ha un andamento a ragnatela del diagramma a gradini per qualunque x_0 . L'orbita nello spazio delle fasi è un'oscillazione smorzata attorno a $x_e = 0$ che è quindi un attrattore globale;
- $\lambda < -1$: si ha un andamento a ragnatela del diagramma a gradini e le orbite, a differenza del caso $-1 < \lambda < 0$, si allontanano dal punto fisso $x_e = 0$ che dunque è instabile;
- $\lambda = -1$: in questo caso la mappa associa al punto iniziale x_0 il suo opposto e a quest'ultimo associa x_0 . Cioè si hanno orbite periodiche di periodo 2 o 2-cicli:

$$f^2(x_0) = x_0$$

in generale, un'orbita periodica di periodo n o n -ciclo è tale che $f^n(x_0) = x_0$.

Abbiamo così che la mappa lineare, a prima vista molto semplice, ha comportamenti di vari tipi: andamenti monotoni, oscillazioni smorzate e forzate e orbite periodiche.

2.5.2 Studio della stabilità

Consideriamo un punto x_e di equilibrio per la mappa f , cioè tale che $f(x_e) = x_e$, e cerchiamo dei criteri per la comprensione della sua stabilità. Partiamo prendendo un intorno di x_e dove studiare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione f , ovvero:

$$f(x) = f(x_e) + f'(x_e)(x - x_e) + o(x - x_e)$$

con $o(x - x_e)$ infinitesimi di ordine superiore al primo. Ovviamente f dev'essere abbastanza regolare perchè lo sviluppo sia permesso e noi ci poniamo nelle condizioni più sicure supponendo che sia di classe C^∞ . Fatta questa osservazione scriviamo la mappa associata all'espansione:

$$x_{n+1} = x_e + f'(x_e)(x_n - x_e) + o(x_n - x_e)$$

e trasliamo gli assi in modo che il nuovo sistema di riferimento abbia origine nel punto fisso per semplicità: definiamo $y_n = x_n - x_e$, traslazione orizzontale, e $y_{n+1} = x_{n+1} - x_e$, traslazione verticale. Riscriviamo la mappa nelle nuove coordinate:

$$y_{n+1} = f'(0)y_n + o(y_n)$$

da cui, trascurando i termini d'ordine superiore al primo, otteniamo l'equazione:

$$y_{n+1} = f'(0)y_n$$

che è la mappa linearizzata approssimante quella che stiamo considerando.

A questo punto studiamo il segno della derivata di primo grado calcolata nell'origine e distinguiamo vari casi che studieremo qualitativamente. Le proprietà che discerneremo andrebbero dimostrate analiticamente ma noi non lo facciamo. Detto ciò, iniziamo:

- $0 < f'(0) < 1$: la funzione è crescente e la pendenza della mappa linearizzata è minore rispetto a quella della bisettrice del primo e terzo quadrante. La rappresentazione a scalini suggerisce che il punto fisso nell'origine è asintoticamente stabile per ogni dato iniziale e per ogni valore assunto dalla derivata seconda nello zero. Le orbite nello spazio delle fasi sono monotone;
- $f'(0) > 1$: la funzione è crescente e la pendenza dalla mappa linearizzata è maggiore rispetto a quella della bisettrice del primo e terzo quadrante. La rappresentazione a scalini suggerisce che il punto fisso nell'origine è un repulsore per ogni dato iniziale e per ogni valore assunto dalla derivata seconda nello zero. Le orbite nello spazio delle fasi sono monotone;
- $-1 < f'(0) < 0$: la funzione è decrescente e la pendenza dalla mappa linearizzata è minore in valore assoluto rispetto a quella della bisettrice del primo e terzo quadrante. La rappresentazione a scalini ha una struttura a ragnatela che converge asintoticamente all'origine per ogni dato iniziale e per ogni valore assunto dalla derivata seconda nello zero. Le orbite nello spazio delle fasi oscillano smorzandosi;
- $f'(0) < -1$: la funzione è decrescente e la pendenza dalla mappa linearizzata è maggiore in valore assoluto rispetto a quella della bisettrice del primo e terzo quadrante. La rappresentazione a scalini ha una struttura a ragnatela che si allontana dall'origine per ogni dato iniziale e per ogni valore assunto dalla derivata seconda nello zero. Le orbite nello spazio delle fasi oscillano divergendo;
- $f'(0) = 0$: la rappresentazione a scalini suggerisce che il punto fisso nell'origine è asintoticamente stabile per ogni dato iniziale e per ogni valore assunto dalla derivata seconda nello zero.

Nei casi visti finora il punto x_e viene detto iperbolico ed essi possono essere riassunti nel seguente teorema.

Teorema 2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e x_e punto fisso della mappa $x_{n+1} = f(x_n)$. Se:*

- $|f'(x_e)| < 1$ allora x_e è asintoticamente stabile;
- $|f'(x_e)| > 1$ allora x_e è instabile.

Studiamo ora la stabilità quando $|f'(x_e)| = 1$ e x_e viene chiamato punto non iperbolico. Distinguiamo due possibilità:

- $f'(x_e) = 1$: la mappa linearizzata è $y_{n+1} = y_n$, che coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante. Per determinare la stabilità studiamo il segno delle derivate successive:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f^{(m)}(0)}{m!} y_n^m + o(y_n^m)$$

con $f^{(m)}$ prima derivata non nulla della mappa. Se m è pari allora la funzione è convessa e l'origine è un punto fisso di sella in ogni caso. Se m è dispari e $f^{(m)} > 0$ (< 0) allora lo zero è un repulsore (attrattore).

- $f'(x_0) = -1$: la mappa linearizzata è $y_{n+1} = -y_n$. Per determinare la stabilità ci concentriamo sulle prime due derivate non nulle:

$$y_{n+1} = -y_n + \frac{f^{(m)}(0)}{m!} y_n^m + \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} y_n^{m+1} + o(y_n^{m+1})$$

e distinguiamo nuovamente i casi m dispari o pari.

Se m è dispari abbiamo una struttura a ragnatela che converge asintoticamente al punto fisso se $f^{(m)} > 0$ mentre si allontana da esso se $f^{(m)} < 0$.

Invece se m è pari il segno di $f^{(m)}$ non è sufficiente per determinare la stabilità. Infatti, ad esempio, se $f^{(m)} > 0$ ma $f^{(m+1)} > 0$ lo zero è un attrattore mentre se $f^{(m)} > 0$ ma $f^{(m+1)} < 0$ un repulsore. Per concludere lo studio è quindi necessario fare un'osservazione. Notiamo che in questi ultimi due casi sono presenti delle orbite oscillanti di cui possiamo distinguere i punti che si ottengono da iterazioni pari o dispari:

$$\{y_0, y_2, y_4, \dots\} \quad \{y_1, y_3, y_5, \dots\}$$

ottenendo in questo modo due serie temporali con andamento monotono. Esse sono le orbite della mappa $f^2(x_n)$ con dato iniziale y_0 o y_1 che si può sfruttare per studiare la stabilità del punto fisso: se x_e è un attrattore (repulsore) di f^2 allora è un attrattore (repulsore) di f perchè nella definizione di attrattore (repulsore) si considera l'andamento a infinito.

Studiamo perciò la stabilità del punto fisso per la mappa f^2 distinguendo i casi $m = 2$ e $m > 2$. Se $m = 2$ lo sviluppo della mappa è:

$$\begin{aligned} y_{n+2} = f^2(y_n) &= f^2(0) + (f^2)'(0) y_n + (f^2)''(0) \frac{y_n^2}{2} + (f^2)'''(0) \frac{y_n^3}{6} + O(y_n^4) = \\ &= y_n - [3 f''(0)^2 + 2 f'''(0)] \frac{y_n^3}{6} + O(y_n^4) \end{aligned}$$

dove ricordiamo, ad esempio, che $f^2(0) = f(f(0)) = 0$. Se invece $m > 2$ abbiamo:

$$y_{n+2} = f^2(y_n) = y_n - a_0 (1 - (-1)^m) y_n^m - a_1 (1 - (-1)^{m+1}) y_n^{m+1} + o(y_n^{m+1})$$

dove i coefficienti sono:

$$a_0 = \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \quad a_1 = \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}$$

e osserviamo così che in entrambi i casi si ha derivata prima calcolata nello zero pari a 1. Ciò significa che il punto fisso con derivata -1 per la mappa f è un punto fisso con derivata 1 per la mappa f^2 e quindi possiamo applicare la casistica vista nel caso $f'(x_0) = 1$ alla mappa iterata due volte.

2.6 Biforcazioni

I modelli discreti sviluppati per applicazioni pratiche spesso contengono dei parametri di controllo che determinano il numero e la natura dei punti fissi presenti. La variazioni di questi parametri può portare a delle biforcazioni di cui ora studieremo la teoria considerando mappe scalari.

Esempio 2.4. Consideriamo la famiglia di funzioni parametrizzata dal parametro λ :

$$F(x, \lambda) = \lambda + \frac{x}{2}$$

la cui mappa scalare associata è:

$$x_{n+1} = \lambda + \frac{x_n}{2}$$

che è lineare. Studiamo cosa succede al variare di λ :

- $\lambda = 0$: la retta di pendenza $1/2$ interseca la bisettrice del primo e terzo quadrante solo nello zero. L'origine è dunque l'unico punto di equilibrio ed è inoltre asintoticamente stabile perchè la derivata prima della funzione rispetto ad x in zero è strettamente minore di 1;
- $\lambda > 0$: la retta è parallela alla precedente e traslata verso l'alto. L'intersezione con la bisettrice avviene quindi in un punto diverso, maggiore di zero, che è nuovamente asintoticamente stabile;
- $\lambda < 0$: la situazione è analoga al caso $\lambda > 0$ con l'unica differenza che la retta è traslata verso il basso ed il punto fisso è negativo.

Ricapitolando al variare del parametro il punto fisso cambia solo la sua posizione rimanendo unico e asintoticamente stabile. In questo caso la mappa e i suoi punti fissi si dicono strutturalmente stabili.

Generalizzando l'esempio visto dimostriamo che se la derivata è diversa da 1 allora i punti fissi sono strutturalmente stabili. Prendiamo una mappa f con punto fisso x_e e supponiamo che $f'(x_e) \neq 1$. Consideriamo una perturbazione $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 di questa mappa vicino all'equilibrio:

$$F(x_n, \lambda) = x_{n+1}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vettore dei parametri. Supponiamo esista un certo vettore λ_0 tale che $F(x, \lambda_0) = f(x)$ e sfruttiamo il teorema della funzione implicita. Ricordiamo che per una mappa scalare i punti di equilibrio soddisfano l'equazione:

$$F(x, \lambda) = x \Rightarrow F(x, \lambda) - x = 0 = G(x, \lambda)$$

che definisce un'ipersuperficie in \mathbb{R}^{n+1} e che vogliamo risolvere rispetto a $x = x(\lambda)$. Osserviamo che:

$$G(x_e, \lambda_0) = f(x_e) - x_e = x_e - x_e = 0$$

quindi x_e è uno zero di G . Inoltre:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_e, \lambda_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_e, \lambda_0) - 1 = f'(x_e) - 1 \neq 0$$

perciò il punto (x_e, λ_0) appartiene all'ipersuperficie definita da $G(x, \lambda) = 0$ ed è inoltre un punto regolare in cui l'iperpiano tangente a tale superficie è ben definito. Vale quindi il teorema della funzione implicita per il quale esistono un intorno U di λ_0 e un intorno V di x_e nel cui prodotto $U \times V$ la soluzione:

$$x_e(\lambda) = g(\lambda)$$

dell'equazione $G(x, \lambda) = 0$ esiste, è unica e soddisfa $g(\lambda_0) = x_e$ e $G(g(\lambda), \lambda) = 0$. In conclusione si ha un solo punto di equilibrio perchè soluzione è unica e, oltre ciò, vale:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(g(\lambda), \lambda) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(g(\lambda), \lambda) \neq 1$$

allora il punto mantiene la sua stabilità in un intorno di (x_e, λ_0) per continuità della derivata di F . Abbiamo così dimostrato che se la mappa di partenza ha derivata prima diversa da 1 non c'è biforcazione dell'equilibrio che invece è presente per mappe con derivata uguale a 1.

Esempio 2.5 (Biforcazione tangente). Consideriamo:

$$F(x, \lambda) = -x^2 + 2x + \lambda$$

con $-1 < \lambda < 3/4$. L'equazione descrive una parabola convessa che trasla rigidamente in verticale al variare del parametro. Vediamo le varie possibilità:

- $\lambda < -1/4$: non si ha nessuna intersezione quindi non ci sono quindi punti fissi;
- $\lambda = -1/4$: la parabola è tangente alla bisettrice nel punto di equilibrio $x = 1/2$, che è attrattivo o repulsivo per valori rispettivamente minori o maggiori di $1/2$, cioè è una sella;
- $\lambda > -1/4$: la parabola interseca la bisettrice in due punti fissi dei quali il maggiore è asintoticamente stabile mentre il minore è instabile.

Ricaviamo esplicitamente la curva decritta dai punti fissi al variare di λ risolvendo l'equazione:

$$-x^2 + x + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = x^2 - x$$

che disegna una parabola ruotata nel piano (λ, x) .

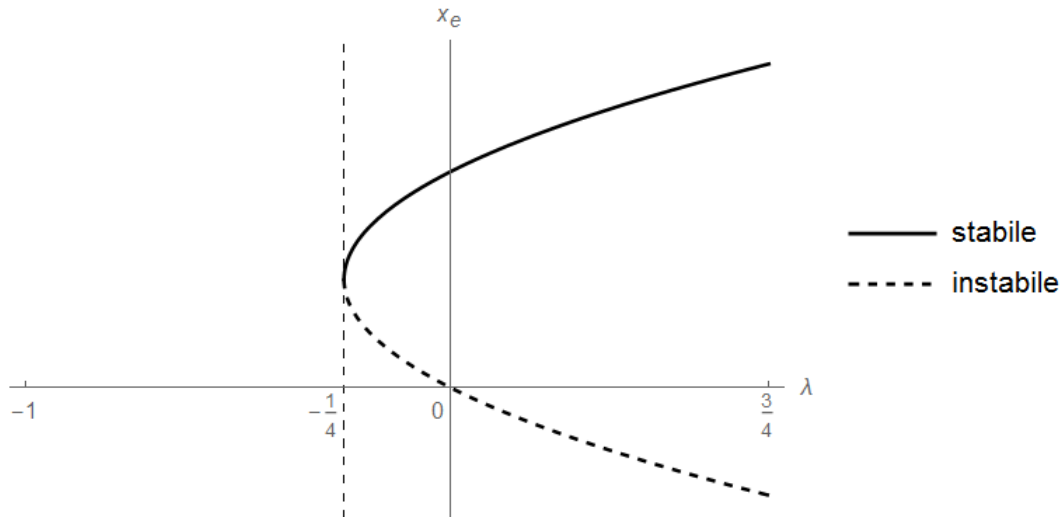


Figura 25: diagramma di biforcazione

Questa si chiama biforcazione tangente. Osserviamo per concludere che la derivata prima di F rispetto a x in $x = 1/2$ è pari ad 1.

Esempio 2.6 (Biforcazione transcritica). Consideriamo:

$$F(x, \lambda) = -x^2 + (2 + \lambda)x - \lambda$$

con $0 < \lambda < 3$. L'equazione descrive una parabola convessa. Vediamo le varie possibilità:

- $\lambda = 1$: la parabola è tangente alla bisettrice nel punto di equilibrio $x = 1$, che è attrattivo o repulsivo per valori rispettivamente minori o maggiori di 1, cioè è una sella;
- $\lambda < 1$: la parabola interseca la bisettrice in $x = 1$, asintoticamente stabile, e in $x < 1$, instabile;
- $\lambda > 1$: la parabola interseca la bisettrice in $x = 1$, instabile, e in $x > 1$, asintoticamente stabile;

Procedendo in modo analogo all'esempio precedente risolviamo:

$$-x^2 + (2 + \lambda)x - \lambda = (x - 1)(x - \lambda) = 0$$

che ci suggerisce che le curve degli equilibri sono due rette: $x(\lambda) = 1$ e $x(\lambda) = \lambda$.

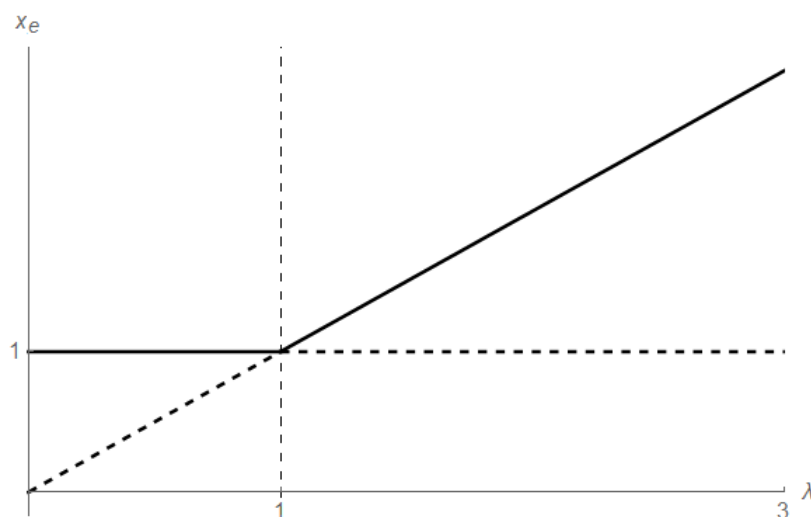


Figura 26: diagramma di biforcazione

Questa è una biforcazione transcritica.

Esercizio 2.1 (Biforcazione a forchetta). Trovare i punti fissi della funzione:

$$F(\lambda, x) = (1 + \lambda)(x - 1) - (x - 1)^3 + 1$$

con $-1 < \lambda < 1$. Discutere inoltre la loro stabilità e disegnare il diagramma di fase. Questo è il caso della biforcazione a forchetta.

2.7 Orbite monotone

Classifichiamo le orbite dando alcune definizioni.

Definizione 2.10 (Orbita monotona). La semiorbita positiva di punto iniziale x_0 :

$$\gamma^+(x_0) = \{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

si definisce orbita monotona se è una successione monotona.

Definizione 2.11 (Mappa monotona). Si definisce monotona una mappa avente tutte le orbite monotone.

Esempio 2.7. Se f è continua e crescente, quindi $f'(x) > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora la mappa associata:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

è una mappa monotona. Questa è una conseguenza di:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

che per il teorema di Lagrange è uguale a:

$$x_{n+1} - x_n = f'(\bar{x})(x_n - x_{n-1}) > 0$$

con $\bar{x} \in [x_n, x_{n+1}]$. Ciò significa che la differenza tra valori ottenuti da iterazioni successive è sempre positivo, quindi la mappa è monotona.

Una generalizzazione delle orbite monotone è data dalle orbite definitivamente monotone. Queste non sono monotone per ogni $n \in \mathbb{N}$ ma solamente per $n > m$, con $m \in \mathbb{N}$.

2.8 Orbite periodiche

Definizione 2.12 (Orbita periodica). Una semiorbita positiva γ^+ di punto iniziale x_0 si dice periodica se dopo N iterazioni ritorna in x_0 :

$$\gamma^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^N(x_0) = x_0, \dots\}$$

e in questo caso viene anche chiamata N -ciclo.

Definizione 2.13 (Punto N -periodico). Un punto x_0 è N -periodico se $f^N(x_0) = x_0$ e $f^m(x_0) \neq x_0$ per $0 < m < N$.

Esempio 2.8. Consideriamo la mappa:

$$x_{n+1} = -x_n^3$$

la cui funzione corrispondente è una parabola cubica. Prendendo $x_0 = 1$ come punto iniziale dell'orbita otteniamo:

$$\gamma = \{1, -1, 1, \dots\}$$

cioè 1 è un punto 2-periodico e quindi l'orbita è un 2-ciclo.

Esercizio 2.2. Dimostrare che tutti i punti tranne lo 0 della mappa:

$$x_{n+1} = -x_n$$

sono punti 2-periodici.

Osservazione. Se x_0 è un punto N -periodico per f allora anche $f^m(x_0)$ con $0 < m < N$ è un punto N -periodico per f .

Notiamo che un punto N -periodico per f può essere visto come un punto fisso per f^N . Questo ci permette d'introdurre il concetto di stabilità di un'orbita periodica. Un'orbita periodica si dice stabile, asintoticamente stabile o instabile se il punto periodico x_0 da cui nasce è rispettivamente stabile, asintoticamente stabile o instabile per la mappa f^N .

La definizione di punto periodico può essere generalizzata introducendo la definizione di punto definitivamente periodico.

Definizione 2.14 (Punto definitivamente periodico). Il punto x_0 è definitivamente periodico se esiste un valore $m > 0$ tale che $f^{N+k}(x_0) = f^k(x_0)$ per ogni $k > m$.

La stabilità dell'orbita periodica può essere determinata calcolando almeno la derivata prima dell'iterata n -esima che può essere ricavata dalla formula:

$$(f^N)'(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} f'(f^i(x_0))$$

che si dimostra per induzione.

Teorema 2.2 (Esistenza e unicità del 2-ciclo). Sia $f(x) \in C^3$ funzione associata ad una mappa e $F(x, \lambda)$ una sua perturbazione con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro. Supponiamo che:

1. $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$, cioè $x_e = 0$ è un punto fisso non iperbolico;
2. $[f^2(0)]''' \neq 0$, ovvero la derivata terza calcolata nel punto fisso della mappa iterata due volte non si annulla;
3. $F(x, 0) = f(x)$, $F(0, \lambda) = 0$ e:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(0, \lambda) = -(1 + \lambda)$$

che osserviamo essere una perturbazione di $f'(0) = -1$.

Sotto queste condizioni esiste nel piano (x, λ) un intorno $U(0, 0)$ in cui per ogni λ possiamo avere due casi:

- se $\lambda[f^2(0)]''' < 0$ allora esiste un'unica orbita periodica $\{x_\lambda, F(x_\lambda, \lambda)\}$ di periodo 2 per la perturbazione della mappa;
- se $\lambda[f^2(0)]''' > 0$ allora non esistono orbite periodiche.

Dimostrazione. Accenniamo alla dimostrazione. Cerchiamo i punti fissi locali di F^2 , ossia gli zeri di:

$$G(x, \lambda) = \frac{F^2(x, \lambda) - x}{x} \quad (8)$$

dove la x al denominatore è presente per escludere il punto fisso $x = 0$ che già conosciamo. Sviluppiamo in serie F^2 :

$$F^2(x, \lambda) = F^2(0, \lambda) + [F^2(0, \lambda)]' x + [F^2(0, \lambda)]'' \frac{x^2}{2} + [F^2(0, \lambda)]''' \frac{x^3}{6} + \dots$$

dove notiamo che:

$$\begin{aligned} F^2(0, \lambda) &= F(F(0, \lambda), \lambda) = F(0, \lambda) = 0, \\ [F^2(0, \lambda)]' &= F'(0, \lambda) F'(F(0, \lambda), \lambda) = [F'(0, \lambda)]^2 = (1 + \lambda)^2 = \lambda(\lambda + 2) + 1 \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo lo sviluppo in (8):

$$G(x, \lambda) = \lambda(\lambda + 2) + \frac{a(\lambda)}{2} x + \frac{b(\lambda)}{6} x^2 + O(x^3)$$

con chiaro significato dei coefficienti a e b introdotti. Se ora si cercano gli zeri limitandosi ai termini di secondo grado si può dimostrare che:

- quando $\lambda [f^2(0)]''' > 0$ non esistono radici perchè la curva descritta dell'equazione è una parabola convessa che non interseca l'asse delle ordinate;
- quando $\lambda [f^2(0)]''' < 0$ la curva descritta dell'equazione è una parabola concava che interseca l'asse delle ascisse in due punti 2-periodici per la mappa f .

□

Osservazione. La stabilità del 2-ciclo nel caso in cui $\lambda [f^2(0)]''' < 0$ dipende dal tipo di biforcazione a forchetta presente: se è super-critica (sub-critica) allora l'orbita periodica è stabile (instabile) e il punto fisso preesistente diventa instabile (stabile).

2.9 Mappa logistica

Analizziamo in dettaglio la mappa logistica:

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \tag{9}$$

con a parametro. Ricordiamo di averla ricavata in due modi:

- discretizzando l'equazione logistica mediante il metodo di Eulero;
- descrivendo il modello epidemiologico SI senza dinamica vitale, cioè con $S + I = N$.

Un altro modo per ottenerla è supporre che la dinamica delle popolazioni di semplici organismi, come i batteri, sia di tipo Malthusiano:

$$p_{n+1} = a p_n$$

e aggiungere l'ipotesi che le risorse siano limitate così da frenare la crescita esponenziale degli individui che non sarebbe sostenibile dall'ambiente. Così si ricava l'equazione logistica (9) dove x_n è la frazione $p_n/P \in [0, 1]$ con P popolazione massima sostenibile dall'ambiente e dove $a \in \mathbb{R}^+$, detto tasso netto di crescita, tiene conto delle nascite e delle morti.

Studiamo questo modello al variare di a . Osserviamo che la funzione:

$$f(x) = a(x - x^2)$$

disegna una parabola concava passante sempre per $x = 0, 1$ e avente un massimo in $1/2$ dove il suo valore è $a/4$. Inoltre notiamo di doverci limitare ad $a \in [0, 4]$ perchè per poter iterare f dev'essere $f(E) \subseteq E = [0, 1] \ni x$.

Cerchiamo quindi gli equilibri risolvendo l'equazione:

$$F(x, a) = ax(1 - x) = x$$

con radici $x_e^{(1)} = 0$, non dipendente dal parametro, e $x_e^{(2)} = 1 - 1/a$, dipendente dal parametro. Vediamone la stabilità calcolandovi la derivata della funzione rispetto a x :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_e^{(1)}, a) = a, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_e^{(2)}, a) = 2 - a$$

le quali ci dicono che, ad esempio, per $a = 1$ entrambi i punti fissi non sono iperbolici e dunque ci aspettiamo una biforcazione a tale valore del parametro. Distinguiamo i casi:

- $0 < a < 1$: si ha che:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x_e^{(1)}, a) \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x_e^{(2)}, a) \right| > 1$$

quindi $x_e^{(1)} = 0$ è asintoticamente stabile mentre $x_e^{(2)} < 0$ è instabile. Per valori iniziali $x_0 > x_e^{(2)}$ si hanno orbite definitivamente monotone tendenti a $x_e^{(1)}$, ossia la popolazione tendere ad estinguersi, fino ad un valore $x_0 > 0$ pari alla controimmagine positiva di f calcolata in $x_e^{(2)}$. L'intervallo così definito equivale al bacino di attrazione di $x_e^{(1)}$;

- $a = 1$: i due punti fissi collassano in uno solo, coincidente con $x_e = x_e^{(1)} = x_e^{(2)} = 0$, in cui la derivata è pari a 1 ed il grafico di f è tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il punto di equilibrio è attrattivo in un intorno destro e repulsivo in un intorno sinistro, ossia è una sella. Infatti la derivata seconda è negativa:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x}(1, x_e) = -2$$

ossia la prima derivata non nulla è pari;

- $1 < a \leq 2$: il massimo della funzione è sottostante alla retta e si hanno nuovamente due punti di equilibrio: $x_e^{(1)} = 0$, repulsivo, e $x_e^{(2)} > 0$, attrattivo con bacino di attrazione $[0, 1]$. Gli equilibri si sono quindi scambiati la stabilità e questo corrisponde alla biforcazione transcritica. Le traiettorie nello spazio delle fasi sono monotone;
- $2 < a < 3$: analogo al caso $1 < a < 2$ con la differenza che il massimo della funzione è sovrastante alla retta. Questo porta le traiettorie nello spazio delle fasi ad essere oscillanti e quindi convergere più lentamente, cioè con più iterazioni, rispetto all'altra situazione;
- $a = 3$: il punto fisso $x_e^{(1)} = 0$ è instabile e il punto fisso $x_e^{(2)} = 2/3$ è asintoticamente stabile e non iperbolico, infatti:

$$f'(x_e^{(2)}) = -1, \quad f''(x_e^{(2)}) = -6 \neq 0 \Rightarrow 2f'''(x_e^{(2)}) + 3[f''(x_e^{(2)})]^2 = 36 > 0$$

tuttavia le orbite che nascono in un intorno di $x_e^{(2)}$ non convergono all'equilibrio ma si stabilizzano attorno ad un ciclo chiuso detto insieme limite. L'insieme limite è una generalizzazione dei punti fissi asintoticamente stabili ed è l'insieme dei punti limite a cui possono convergere sottosuccessioni estratte dalla successioni delle orbite. Ad esempio un 2-ciclo è un insieme di due punti limite a cui convergono a uno le iterate pari e all'altro le iterate dispari;

· $3 < a < 4$: il punto fisso $x_e^{(2)}$ diventa instabile, infatti:

$$f'(x_e^{(2)}) < -1$$

e quindi, siccome lo zero rimane instabile, sono presenti due punti repulsori. Nonostante ciò le orbite possono essere limitate e, in questo caso, periodiche. Analizzando infatti:

$$\begin{aligned} F^2(x, a) &= F(F(x, a), a) = a[a x(1-x)][1-a x(1-x)] \\ &= a^2 x(1-x)(a x^2 - a x + 1) \end{aligned}$$

notiamo che F^2 ha due punti fissi $x_p^{(3)} < x_e^{(2)}$ e $x_p^{(4)} > x_e^{(2)}$ che non sono punti fissi di F per $a > 3$, questi sono cioè punti 2-periodici di F . Calcoliamo cercando gli zeri della funzione:

$$G(x, \lambda) = \frac{F^2(x, \lambda) - x}{x}$$

la quale, sapendo che $x_e^{(2)}$ è anche punto d'equilibrio di F^2 , si fattorizza come:

$$G(x, \lambda) = -\left(x - x_e^{(2)}\right) a^2 \left[a x^2 - (a+1)x + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] = -a^2 \left(x - x_e^{(2)}\right) Q(x)$$

dove $Q(x)$ polinomio di secondo grado con radici $x_p^{(3),(4)}$ diverse da $x_e^{(1),(2)}$:

$$x_p^{(3),(4)} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

che ponendo $a = 3$, valore di biforcazione, coincidono con $x_e^{(2)}$ invece per $a > 3$ sono reali, distinte, diverse da $x_e^{(2)}$ e danno origine al 2-ciclo. Vediamone la stabilità calcolando:

$$\left[F^2(x_p^{(3)}) \right]' = -a^2 + 2a + 4$$

da cui intuiamo che $x_p^{(3)}$ è asintoticamente stabile solamente se $|-a^2 + 2a + 4| < 1$ equivalente alla condizione $3 < a < 1 + \sqrt{6}$. Analogamente vale per $x_p^{(4)}$.

Prendendo quindi valori $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ c'è un 2-ciclo che oscilla tra $x_p^{(3)}$ e $x_p^{(4)}$. Per dimostrarlo basta verificare che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità del 2-ciclo siano soddisfatte. Ciò può essere fatto bisogna prestare attenzione al fatto che in questo caso abbiamo $x_e^{(2)} = 1 - 1/a$ mentre nell'enunciato si ha $x_e = 0$. Per aggirare questo ostacolo è sufficiente traslare gli assi prendendo $y = x - (1 - 1/a)$. A questo punto ponendo $a = b - 3$ si dimostra facilmente che il teorema è verificato.

In $a = 1 + \sqrt{6}$ i punti $x_p^{(3),(4)}$ diventano non iperbolici e instabili. Per $a > 1 + \sqrt{6}$ nascono due nuovi punti fissi per F^4 ma non per F^2 . Questi sono dovuti a biforcazioni a forchetta dei punti $x_p^{(3),(4)}$ e determinano un 4-ciclo per la funzione F .

Si può proseguire con lo studio e guardando F^8 si scopre la nascita di un 8-ciclo per opportuni valori di a e così via. Inoltre esiste un particolare valore di a dopo al quale iniziano ad esserci orbite caotiche. Queste al crescere di a sono interrotte da finestre periodiche in cui compaiono orbite di periodo 6, 5 e 3 in quest'ordine. Notiamo infine che prima dei 3-cicli nascono tutti i cicli di periodo 2^k con $k \in \mathbb{N}$;

Osservazione. Nella pagina <http://rocs.hu-berlin.de/D3/logistic/> si può trovare una grafica interattiva delle orbite disegnate dalla mappa logistica al variare del punto iniziale e del parametro di biforcazione.

2.9.1 Ordinamento di Sarkowsky e teorema di Li-Yorke

Introduciamo l'ordinamento di Sarkovsky usato per dimostrare che la mappa logistica ammette cicli di qualunque periodo:

$$\begin{aligned} 3 &> 5 > 7 > \dots > (2n+1) > \dots \\ \dots &> 23 > 25 > 27 > \dots > 2(2n+1) > \dots \\ \dots &> 2^2 3 > 2^2 5 > 2^2 7 > \dots > 2^2 (2n+1) > \dots \\ &\vdots \\ \dots &> 2^m 3 > 2^m 5 > 2^m 7 > \dots > 2^m (2n+1) > \dots \\ &\vdots \\ \dots &> 2^n > \dots > 2^4 > 2^3 > 2^2 > 2 > 1 \end{aligned}$$

con $n, m \in \mathbb{N}$. Si può dimostrare che questo è un ordinamento totale, cioè ordina tutti i numeri naturali. Enunciamo ora alcuni teoremi che valgono, in particolare, per la mappa logistica.

Teorema 2.3 (Teorema di Sarkowsky). *Sia $f : J \rightarrow J$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso, funzione continua e iterabile, ossia $f(J) \subseteq J$. Se f ha un'orbita di periodo n allora essa possiede anche un'orbita di periodo m con $n > m$ nell'ordinamento di Sarkowsky.*

Questo teorema ci dice che se una mappa possiede un'orbita con un certo periodo n allora possiede anche tutte le orbite con periodo m precedente a n nell'ordinamento di Sarkowsky.

Corollario 2.1. *Sotto le stesse condizioni del teorema, se f ammette un'orbita periodica di periodo $T \neq 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$ allora ammette infiniti punti periodici e quindi infinite orbite periodiche.*

Corollario 2.2. *Se f ha un numero N finito di orbite periodiche allora il periodo T_i dell'orbita i -esima, con $i = 1, \dots, N$, è tale che $T_i = 2^k$ per $k \in \mathbb{N}$.*

Corollario 2.3 (Teorema di Li-Yorke). *Se f ha un'orbita di periodo 3 allora possiede orbite di periodo qualunque.*

Alcuni commenti:

· vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n} \simeq 4.669$$

che si verifica numericamente;

- il teorema di Li-Yorke vale solo per funzioni a valori reali e perde di validità cambiando il dominio, ad esempio, nel cerchio S^1 . Infatti supponiamo di prendere la funzione $g : S^1 \rightarrow S^1$ che definisce una mappa per ruotare ogni punto del cerchio di $2\pi/3$. Si ottiene in questo modo un 3-ciclo che soddisfa le ipotesi del teorema. Tuttavia in questo caso la mappa applicata ad ogni punto fa esattamente la stessa cosa: ogni punto della circonferenza è un punto 3-periodico e quindi l'orbita di periodo 3 è l'unica ammessa dalla mappa;
- il teorema di Li-Yorke prima di essere scritto come corollario del teorema di Sarkowsky è stato enunciato ed dimostrato indipendentemente.

Vediamo l'enunciato e dimostrazione del teorema di Li-Yorke indipendenti dal teorema di Sarkowsky.

Teorema 2.4 (Teorema di Li-Yorke). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe C^0 che definisce la mappa scalare $x_{n+1} = f(x_n)$. Se esiste un punto a tale che:*

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$$

oppure, alternativamente:

$$f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$$

allora esiste un'orbita periodica di qualsiasi periodo.

Osservazione. Se la condizione $f^3(a) \geq a$ è soddisfatta come uguaglianza allora si ha un 3-ciclo e si riottiene così il corollario del teorema di Sarkowsky.

Vediamo alcuni lemmi e definizioni che ci permettono di formularne la dimostrazione.

Lemma 2.1 (Teorema dei valori intermedi o di Darboux). *Consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se la funzione è continua allora assume in particolare tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. In altri termini per ogni $y \in [f(a), f(b)]$ esiste un valore $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.*

Definizione 2.15 (f -copertura). *Data una funzione f si dice che un intervallo I f -copre un intervallo J se $f(I) \supseteq J$. In questo caso si parla di f -copertura indicandola con $I \xrightarrow{f} J$.*

Definizione 2.16 (f -copertura esatta). *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli chiusi e limitati e f funzione. Diciamo che I f -copre esattamente J se:*

1. $f(\partial I) = J$ con ∂I e ∂J frontiere rispettivamente di I e J ;
2. $f(\text{int}(I)) = \text{int}(J)$ con $\text{int}(I)$ e $\text{int}(J)$ punti interni rispettivamente di I e J ;
3. $f(I) = J$ che consegue dai due punti precedenti perchè:

$$f(\partial I \cup \text{int}(I)) = f(\partial I) \cup f(\text{int}(I)) = J$$

e si parla f -copertura esatta.

Lemma 2.2 (f -copertura esatta). *Siano I e J due intervalli chiusi e limitati in \mathbb{R} e f funzione continua a valori reali. Se I f -copre J allora esiste un sottointervallo chiuso $I' \subseteq I$ che f -copre esattamente J .*

Dimostrazione. Il lemma si può dimostrare semplicemente. Prendiamo $J = [b_1, b_2]$. Poichè $I \xrightarrow{f} J$ allora esistono $a_1, a_2 \in I$ tali che $f(a_1) = b_1 < f(a_2) = b_2$. Supponiamo $a_1 < a_2$ e prendiamo:

$$m_1 = \sup\{x \in [a_1, a_2] : f(x) = b_1\}$$

che per la continuità di f e le proprietà dell'estremo superiore è tale che:

$$f(m_1) = b_1, \quad a_1 \leq m_1 < a_2$$

e poi poniamo:

$$m_2 = \inf\{x \in [m_1, a_2] : f(x) = b_2\}$$

abbiamo così che:

$$f(m_2) = b_2, \quad a_1 \leq m_1 < m_2 \leq a_2$$

quindi:

- l'intervallo $I' = [m_1, m_2]$ soddisfa la proprietà 1. della definizione di f -copertura esatta;
- in ogni suo punto interno la funzione assume valori diversi da b_1 e b_2 . Cioè, se $\bar{x} \in]m_1, m_2[$ allora $f(\bar{x}) \neq b_1$ e $f(\bar{x}) \neq b_2$ per la costruzione di m_1 e m_2 . Inoltre, $f(\bar{x})$ non può essere esterna a $[b_1, b_2]$. Infatti, se $f(\bar{x})$ fosse maggiore di b_2 allora in un punto di $]m_1, \bar{x}[$ la funzione assumerebbe il valore b_2 , mentre se $f(\bar{x})$ fosse minore di b_1 allora in un punto di $]\bar{x}, m_2]$ la funzione assumerebbe il valore b_1 . Questi sono entrambi degli assurdi. Quindi $f(\text{int}(I')) \subseteq \text{int}(J)$.

Viceversa, $\text{int}(J) \subseteq f(\text{int}(I'))$ per il teorema di Darboux.

Se $a_1 > a_2$ la dimostrazione può essere svolta analogamente scambiando l'estremo inferiore con quello superiore. \square

Lemma 2.3 (Catena di f -coperture). *Siano I_k con $k = 0, 1, \dots, n$ intervalli chiusi e limitati, eventualmente alcuni coincidenti, tali che ognuno copra il successivo:*

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_n$$

creando una cosiddetta catena di f -coperture. Allora esiste un sottointervallo $I' \subseteq I_0$ tale che:

1. $f^n(I') = I_n$;
2. $f^n(\text{int}(I')) = \text{int}(I_n)$ e $f^n(\partial I') = \partial I_n$ ossia I' f^n -copre esattamente I_n ;
3. $f^h(I') \subseteq I_h$ con $1 \leq h \leq n-1$.

Dimostrazione. Questo lemma si dimostra per induzione. Se $n = 1$ abbiamo solamente $I_0 \xrightarrow{f} I_1$. Nel lemma precedente abbiamo dimostrato che esiste $I'' \subseteq I_n$ per cui risulta:

$$f(I'') = I_n \tag{10}$$

e punti interni (di frontiera) di I'' vengono mappati da f in punti interni (di frontiera) di I_n . Supponiamo ora per induzione che le tre proprietà siano vere per la catena:

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_{n-2} \xrightarrow{f} I''$$

lunga $n-1$. Allora esiste un intervallo $I' \subseteq I_0$ tale che:

1. $f^{n-1}(I') = I''$;
2. $f^n(\text{int}(I')) = \text{int}(I'')$ e $f^n(\partial I') = \partial I''$;
3. $f^h(I') \subseteq I_h$ con $1 \leq h \leq n-2$.

Allora da (10) segue:

$$f^n(I') = f \circ f^{n-1}(I') = f(I'') = I_n$$

che rappresenta il punto 1. nel passo n -esimo dell'induzione. Gli altri punti sono ovvi. \square

Lemma 2.4 (Punto fisso). *Sia f funzione continua a valori reali e $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato. Se I f -copre sè stesso, ossia $I \xrightarrow{f} I$, allora la mappa definita dalla funzione f possiede un punto fisso $x_e \in I$.*

Dimostrazione. Questa è nuovamente una conseguenza del lemma dei valori intermedi. Se I si riduce ad un punto la tesi è ovvia. Altrimenti se $[a_1, a_2] \subset I$ con $a_1 < a_2$, $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$ per il lemma della f -copertura esatta esiste un intervallo $I' \subseteq I$ che f -copre esattamente I . Quindi esistono due punti c_1 e c_2 con $c_1 < c_2$ tali che:

$$f(c_1) = a_1 \leq c_1, \quad f(c_2) = a_2 \geq c_2$$

dunque la funzione continua:

$$g(x) = f(x) - x$$

i quali zeri sono punti fissi della mappa definita da f , assume negli estremi c_1 e c_2 valori di segno opposto oppure si annulla in almeno uno dei due. Se si annulla agli estremi allora abbiamo trovato il punto fisso altrimenti, per la continuità della funzione, possiede una radice in I e quindi un punto fisso per la mappa definita da f . \square

Lemma 2.5 (Ciclo di f -coperture o dell'itinerario). *Prendiamo una catena di f -coperture di n intervalli chiusi e limitati tali che:*

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_n = I_0$$

che prende il nome di ciclo di f -copertura perchè l'ultimo intervallo coincide con il primo. Allora esiste un punto fisso x_0 per la mappa f iterata n volte:

$$f^n(x_0) = x_0$$

che dopo l'iterata m -esima va in I_{m+1} transitando quindi in ogni intervallo.

Dimostrazione. Per il lemma della catena di f -copertura esiste un intervallo $I' \subseteq I_0$ tale che $f^n(I') = I_n = I_0$. Ovvero I' copre con l'iterata n -esima della funzione, cioè f^n -copre, l'intervallo $I_0 \supseteq I'$ e conseguentemente anche sè stesso. Allora per il lemma del punto fisso esiste un punto fisso x_0 per la mappa f^n e n -periodico per la mappa f . \square

Finalmente possiamo dimostrare il teorema di Li-Yorke.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima situazione, la dimostrazione per la seconda è analoga. Supponiamo quindi esista un punto a tale che:

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \Rightarrow d \leq a < b < c$$

dove $f(a) = b$, $f^2(a) = c$ e $f^3(a) = d$. Definiamo gli intervalli chiusi e limitati:

$$I_0 = [a, b] \quad I_1 = [b, c]$$

con i quali definiamo un ciclo di f -coperture nel seguente modo:

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_{n-1} = I_1 \xrightarrow{f} I_n = I_0$$

e dunque deve succedere che I_0 copra I_1 e che I_1 copra sè stesso. I_0 copre I_1 come conseguenza del teorema dei valori intermedi perchè $f(a) = b$ e $f(b) = c$, mentre I_1 copre sè stesso perchè $f(b) = c$ e $f(c) = f^3(a) = d$ e quindi la sua immagine, cioè $[d, c]$, contiene sia I_0 che I_1 .

Sfruttiamo ora il lemma del ciclo di f -copertura che ci assicura l'esistenza di un punto $x_0 \in I_0$ tale che $f^n(x_0) = x_0$ con n arbitrario, ovvero un punto n -periodico.

Ci rimane da verificare che n è il periodo minimo e non un sottomultiplo d'esso. Per assurdo supponiamo che $f^h(x_0) = x_0$ con $h < n$. In questo caso allora $f^h(x_0) \in I_1$ ma per il teorema $x_0 \in I_1$, dunque $x_0 \in I_0 \cap I_1 = b$. Questo implicherebbe che $x_0 = b$ e quindi:

- se $h = 2$ allora $d = f^2(b) = b$;
- se $h > 2$ allora $d = f^h(b) \in I_1$.

Entrambi assurdi perchè $d < b$. □

Definizione 2.17 (Mappa caotica). Sia $f : V \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$. La mappa $x_{n+1} = f(x_n)$ si dice caotica se possiede le seguenti caratteristiche:

1. transitività topologica: sia $U \subseteq V$ allora esiste n tale che $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;
2. sensibilità alle condizioni iniziali: prendendo due punti iniziali x_1 e x_2 arbitrariamente vicini e scegliendo un valore δ arbitrario succede che esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n(|x_1 - x_2|) > \delta$;
3. punti periodici densi nell'intervallo V : proprietà espressa dal teorema di Li-Yorke.

3 Sistemi dinamici lineari

Consideriamo sistemi di equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$ lineari. La linearità implica che la struttura dello spazio delle fasi è lineare e quindi il campo vettoriale in esso è una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che può essere rappresentata come:

$$f(x) = Ax$$

dove A è una matrice a valori reali:

$$A \in \text{mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

e $x = (x_1, \dots, x_n)$ vettore in \mathbb{R}^n . Il sistema dinamico è dunque $\dot{x} = Ax$ e passiamo così ad un problema agli autovalori:

$$Av = \lambda v$$

dove v autovettore e λ autovalore di A . Supponendo $x(t) = v c(t)$ otteniamo:

$$\dot{x}(t) = \dot{c}(t) v = Ax(t) = c(t) \lambda v$$

se $v \neq 0$ abbiamo perciò:

$$\dot{c}(t) = \lambda c(t)$$

ovvero:

$$c(t) = c_0 e^{\lambda t}$$

con c_0 costante arbitraria da fissare.

Vogliamo generalizzare questo ragionamento per poterlo applicare sistematicamente ad ogni sistema dinamico lineare ottenendone gli integrali. Il primo passo è quello di cercare autovalori e autvalori della matrice A risolvendo l'equazione:

$$Av = \lambda v$$

equivalente a dire che l'operatore $(A - \lambda I)$, con I identità sotto forma matrice $n \times n$, possiede $\ker \neq 0$ e quindi:

$$(A - \lambda I) v = 0$$

ha soluzioni non banali con $v \neq 0$. In altri termini il determinante della matrice A è nullo:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dove il membro sinistro è chiamato polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e le sue radici determinano il problema agli autovalori.

Ricapitolando la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari dipende dallo spettro di A . Il nostro obiettivo è studiare autovalori e autovettori con lo scopo di disegnare il ritratto in fase. Per farlo poniamo A in una forma diagonale o canonica, risolviamo il problema e poi ci riconduciamo al sistema dinamico iniziale attraverso la trasformazione che riporta alla matrice originaria. Appliciamo questo procedimento distinguendo diversi casi.

3.1 Autovalori reali e distinti

Teorema 3.1. *Sia A un operatore lineare su \mathbb{R}^n con n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti e reali. Il sistema dinamico $x'(t) = Ax(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ e condizioni iniziali $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ha un'unica soluzione:*

$$x_i(t) = c_{i1} e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in} e^{t\lambda_n}$$

dove i coefficienti c_{ij} con $i, j = 1, \dots, n$ sono determinati dalle condizioni iniziali.

Dimostrazione. Per ipotesi A è diagonalizzabile siccome ha autovalori reali e distinti. Perciò esiste una matrice invertibile Q tale che $Q A Q^{-1} = B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Poniamo $y(t) = Q x(t)$:

$$y' = Q x' = Q A x = Q A (Q^{-1} y) = B y$$

perciò $y' = B y$ è la rappresentazione matriciale di un sistema di equazioni differenziali $y'_i = \lambda_i y_i$ disaccoppiate con soluzioni:

$$y_i(t) = y_i(0) e^{t\lambda_i}$$

dove $i = 1, \dots, n$. Poniamo ora $y(0) = Q x_0$. Allora $y = Q x$ porta alla soluzione:

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = Q^{-1} (y_1(0) e^{t\lambda_1}, \dots, y_n(0) e^{t\lambda_n}) = c_{i1} e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in} e^{t\lambda_n}$$

con condizioni iniziali corrette. Infatti derivandola si ottiene:

$$x' = Q^{-1} y' = Q^{-1} B y = Q^{-1} (Q A Q^{-1}) y = A Q^{-1} y = A x$$

con:

$$x(0) = Q^{-1} y(0) = Q^{-1} Q x_0 = x_0$$

che verifica $x(0) = x_0$. Quindi abbiamo una soluzione che soddisfa le condizioni iniziali ed è unica per l'unicità delle soluzioni del sistema diagonalizzato. Quest'ultima segue dall'unicità per equazioni differenziali ordinarie siccome le equazioni sono disaccoppiate. \square

Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza in maniera costruttiva diagonalizzando la matrice A , risolvendo il sistema nella base in cui la matrice è diagonale e poi tornando indietro per dimostrare che la soluzione trovata è soluzione del sistema originario.

Ricordiamo ora che prendendo n autovettori indipendenti v_1, \dots, v_n la matrice:

$$P = (v_1, \dots, v_n)$$

che li ha come colonne, è una matrice non singolare. Ciò significa che è invertibile perchè le sue colonne sono linearmente indipendenti ed il suo determinante è diverso da zero. La matrice Q della dimostrazione è proprio $Q = P^{-1}$, cioè $Qx = P^{-1}x$. Perciò se:

$$y(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

allora $x(t) = P y(t)$ e, con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, possiamo risolvere per i coefficienti usando $a = P^{-1} x_0$.

Esempio 3.1. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

e quindi $B = \text{diag}(1, 2, -1)$. Passiamo a variabili nelle quali le equazioni del sistema sono disaccoppiate:

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = 2y_2 \\ y'_3 = -y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = a e^t \\ y_2(t) = b e^{2t} \\ y_3(t) = c e^{-t} \end{cases}$$

a cui dobbiamo applicare matrice P per ricavare la soluzione nelle variabili di partenza. Abbiamo perciò bisogno di ottenerle risolvendo per $\lambda = 1, 2, -1$ il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

e trovando così:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1$$

che danno la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la quale fornisce:

$$x(t) = Py(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^t \\ b e^{2t} \\ c e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 a e^t \\ -2 a e^t + b e^{2t} \\ a e^t + c e^{-t} \end{pmatrix}$$

che è la soluzione nelle variabili di partenza. Possiamo inoltre determinare i coefficienti a, b, c in funzione dei dati iniziali risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1(0) = 2a = x_{01} \\ x_2(0) = -2a + b = x_{02} \\ x_3(0) = a + c = x_{03} \end{cases}$$

Osservazione. C'è un altro modo per risolvere il sistema: siccome sappiamo che le soluzioni sono esponenziali possiamo porre un ansatz:

$$x_i(t) = \sum_j c_{ij} \exp(t \lambda_j)$$

e sostituire in $x' = Ax$, $x(0) = x_0$. Dopodichè eguagliamo coefficienti di esponenziali con lo stesso autovalore a esponente e troviamo un sistema di equazione algebriche per i coefficienti c_{ij} che può essere risolto se gli autovalori sono reali e distinti.

3.2 Autovalori complessi

Supponiamo che A abbia autovalori complessi distinti $\alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$. Siccome la matrice ha entrate reali anche $\alpha - i\beta$ sono autovalori. Infatti se:

$$Av = (\alpha + i\beta)v$$

allora:

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{(\alpha + i\beta)v} = (\alpha - i\beta)\bar{v}$$

cioè, in altri termini, se v è un autovettore con autovalore $\alpha + i\beta$ allora anche il suo complesso coniugato \bar{v} è autovettore con autovalore $\alpha - i\beta$.

Scriviamo ora la matrice A in una forma più maneggevole. Ridefiniamo $A \in \text{mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ per comodità e supponiamo abbia autovalori distinti $\alpha_j \pm i\beta_j$ con $j = 1, \dots, n$. Questa può essere messa in forma canonica definendo:

$$w_{2j-1} = \frac{1}{2}(v_j + \bar{v}_j) = \text{Re}(v_j), \quad w_{2j} = -\frac{i}{2}(v_j - \bar{v}_j) = \text{Im}(v_j)$$

che sono vettori reali in \mathbb{R} .

Lemma 3.1. *I vettori $\{w_i\}_{i=1, \dots, 2n}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Il lemma segue dal fatto che i vettori $\{v_i\}$ e i loro complessi coniugati sono linearmente indipendenti. Poniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j^n (c_j w_{2j-1} + d_j w_{2j}) = \frac{1}{2} \sum_j^n (c_j (v_j + \bar{v}_j) - i d_j (v_j - \bar{v}_j)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_j^n (v_j (c_j - i d_j) + \bar{v}_j (c_j + i d_j)) = 0 \end{aligned}$$

dove, per la lineare dipendenza di $\{v_i\}$ e $\{\bar{v}_i\}$, l'ultimo termine è nullo se e solo se:

$$c_j \pm i d_j = 0$$

ovvero soltanto se $c_j, d_j = 0$. □

Calcoliamo quindi l'azione di A sui vettori definiti ottenendo le relazioni:

$$\begin{aligned}
Aw_{2j-1} &= \frac{1}{2}(Av_j + A\bar{v}_j) = \frac{1}{2}[(\alpha + i\beta)v_j + (\alpha - i\beta)\bar{v}_j] = \\
&= \frac{\alpha}{2}(v_j + \bar{v}_j) + i\frac{\beta}{2}(v_j - \bar{v}_j) = \alpha w_{2j-1} - \beta w_{2j} \\
Aw_{2j} &= \dots = \beta w_{2j-1} + \alpha w_{2j}
\end{aligned}$$

che esprimono implicitamente la forma della matrice A nella base definita da $\{w_i\}_{i=1,\dots,2n}$.

Consideriamo ora la mappa lineare P definita da $Pe_j = w_j$ con $\{e_j\}_{j=1,\dots,2n}$ base canonica di \mathbb{R}^{2n} . Questa definizione implica che la matrice P associata è la matrice le cui colonne sono i vettori w_1, \dots, w_{2n} e pertanto è reale. Inoltre possiamo affermare che P è invertibile siccome abbiamo dimostrato che i vettori $\{w_i\}_i$ sono linearmente indipendenti.

Mettiamo tutto assieme calcolando:

$$\begin{aligned}
(P^{-1}AP)e_{2j-1} &= P^{-1}Aw_{2j-1} = P^{-1}(\alpha w_{2j-1} - \beta w_{2j}) = \alpha e_{2j-1} - \beta e_{2j} \\
(P^{-1}AP)e_{2j} &= \dots = \beta e_{2j-1} + \alpha e_{2j}
\end{aligned}$$

da cui:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_n \end{pmatrix} \quad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

risultato che si può riassumere, assieme a quello ottenuto nel caso di autovalori reali e distinti, nel seguente teorema.

Teorema 3.2. *Sia A una matrice $n \times n$ con autovalori distinti e T matrice $n \times n$ avente come colonne gli autovettori di A . Allora:*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_l \end{pmatrix} \quad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

dove $k + 2l = n$ e il segno di β_j in D_j è una convenzione e si può trovare anche invertito.

A questo punto dobbiamo risolvere:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x$$

che riscriviamo come:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y \\ \frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

e definendo $z = x + i y$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x + i y) &= (\alpha x + \beta) + i(-\beta x + \alpha y) = (\alpha - i \beta)x + i(\alpha - i \beta)y = \\ &= (\alpha - i \beta)(x + i y)\end{aligned}$$

equivalente a $\dot{z} = \mu z$. Quindi la soluzione assume la forma:

$$\begin{aligned}z(t) = k e^{t\mu} \Rightarrow x(t) + i y(t) &= (k_1 + i k_2) e^{t\alpha} e^{-it\beta} = \\ &= (k_1 + i k_2) e^{t\alpha} [\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)]\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{t\alpha} \cos(\beta t) + k_2 e^{t\alpha} \sin(\beta t) \\ y(t) = k_2 e^{t\alpha} \cos(\beta t) - k_1 e^{t\alpha} \sin(\beta t) \end{cases}$$

Esempio 3.2. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = -2x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

cioè $\dot{x} = Ax$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

di cui ne studiamo gli autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

con:

$$v = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

autovettore di $\lambda = 1 + i$ costituito da una parte reale e immaginaria che sono rispettivamente $w_1 = \text{Re}(v)$ e $w_2 = \text{Im}(v)$. La nostra prescrizione dice di costruire la matrice P le cui colonne sono queste due parti dell'autovettore:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P$$

che sfruttiamo per calcolare:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e passare alle variabili:

$$y = Px = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle quali la matrice assume la forma canonica $P^{-1}AP$ e la soluzione è:

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^t \cos(t) + k_2 e^t \sin(t) \\ y_2(t) = k_2 e^t \cos(t) - k_1 e^t \sin(t) \end{cases}$$

da si ottiene l'integrale del sistema nelle variabili originarie tramite la trasformazione:

$$x = P^{-1}y = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

3.3 Caso generale

Nel caso generale possiamo avere degli autovalori con molteplicità. Ciò significa che l'equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ha un termine del tipo:

$$(r - \lambda_k)^{n_k} \text{Pol}(\lambda)$$

con λ_k avente quindi molteplicità algebrica uguale a n_k . In questo caso si ha il cosiddetto autospazio generalizzato:

$$E_k = \ker[(A - \lambda_k I)^{n_k}]$$

che è invariante:

$$v \in E_k \Rightarrow A(v) \in E_k$$

ed ha dimensione $\dim(E_k) = n_k$. Similmente si trova un autovettore generalizzato soluzione di:

$$(A - \lambda_k I)^{n_k} v = 0$$

e si dimostra che se $A : E \rightarrow E$ allora $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ con E_j autospazio generalizzato con dimensione uguale alla molteplicità algebrica di λ_j .

In questo caso le cose sono molto più complicate e bisogna cercare una decomposizione della matrice A che rispetti questa scomposizione dello spazio vettoriale E su cui agisce e capire come risolvere l'equazione differenziale in tale decomposizione. In altre parole è necessario trovare una forma canonica per E nella quale risolvere il sistema per poi tornare a quella di partenza.

3.4 Analisi qualitativa dei sistemi lineari planari

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$

associato alla matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

vogliamo studiarne le traiettorie associate nel piano (x, y) delle fasi. Localmente l'andamento delle traiettorie è determinato da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

e per comprenderlo meglio consideriamo le linee dove dy/dx è costante, dette isocline. Ad esempio lungo la linea $\dot{x} = 0$ ($\dot{y} = 0$) si hanno vettori tangenti verticali (orizzontali), perchè la pendenza dy/dx tende a diventare infinita (nulla), oppure traiettorie stazionarie.

Classifichiamo quindi i possibili comportamenti a seconda della natura degli autovalori di A .

3.4.1 Autovalori reali e distinti

Supponiamo $\lambda_1 < \lambda_2$. Distinguiamo i casi:

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

tralasciando il caso in cui un autovalore sia nullo. Diagonalizzando troviamo un sistema della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x}$$

da cui integrando troviamo:

$$|y|^{\lambda_1} = k |x|^{\lambda_2}$$

andamento che studiamo di seguito per i casi considerati.

Esempio 3.3 (Sella o saddle). Prendiamo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

la soluzione è:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con α e β costanti arbitrarie. In questa formula il termine:

$$\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

coincide con l'asse delle x e tende a $(0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$, poichè $\lambda_1 < 0$, e lo chiamiamo linea stabile. Similmente, $\lambda_2 > 0$ e quindi:

$$\beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che coincide con l'asse delle y , si allontana da $(0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$ e per questo prende il nome di linea instabile.

La soluzione generica è fatta dalla somma di questi due termini e dunque per $t \rightarrow \infty$ le traiettorie vanno a infinito in direzione della linea instabile perchè il termine con esponente $\lambda_1 t$ tende a zero mentre quello con esponente $\lambda_2 t$ domina.

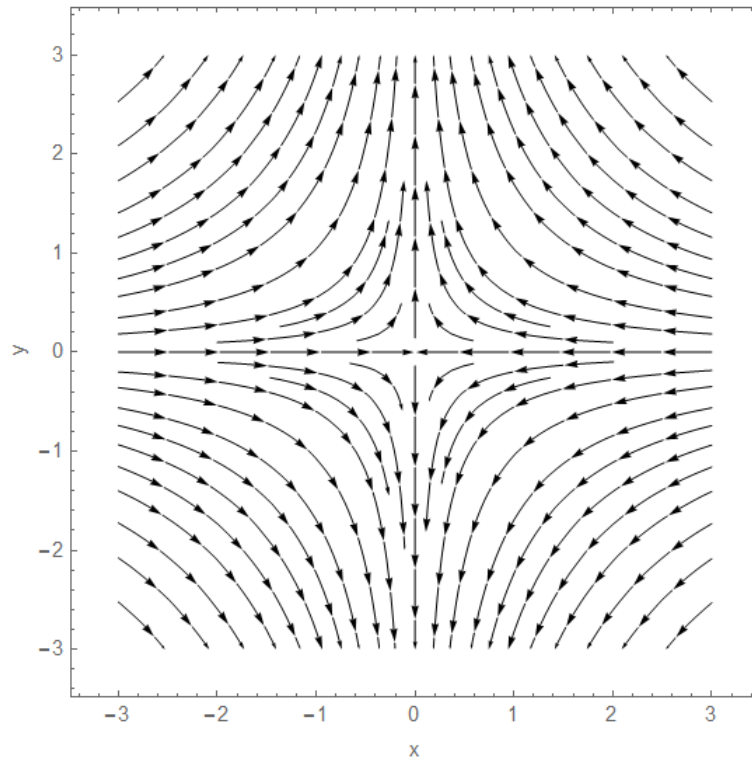


Figura 27: ritratto in fase della sella con $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$

Esempio 3.4. Prendiamo il sistema di equazioni differenziali $\dot{v} = A v$ con $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

di cui ricaviamo gli autovalori per studiare il ritratto in fase :

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 3 = -1 + \lambda^2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

ovvero $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Cerchiamo quindi soluzioni al sistema di equazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & 3 \\ 1 & -1 - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0 \quad i = 1, 2$$

trovando gli autovettori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -2$$

abbiamo così che la soluzione per il nostro sistema è:

$$x(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dove il primo termine è la linea instabile caratterizzata dal fatto che per $t \rightarrow \infty$ si avvicina all'origine e il secondo quella instabile che si allontana da essa.

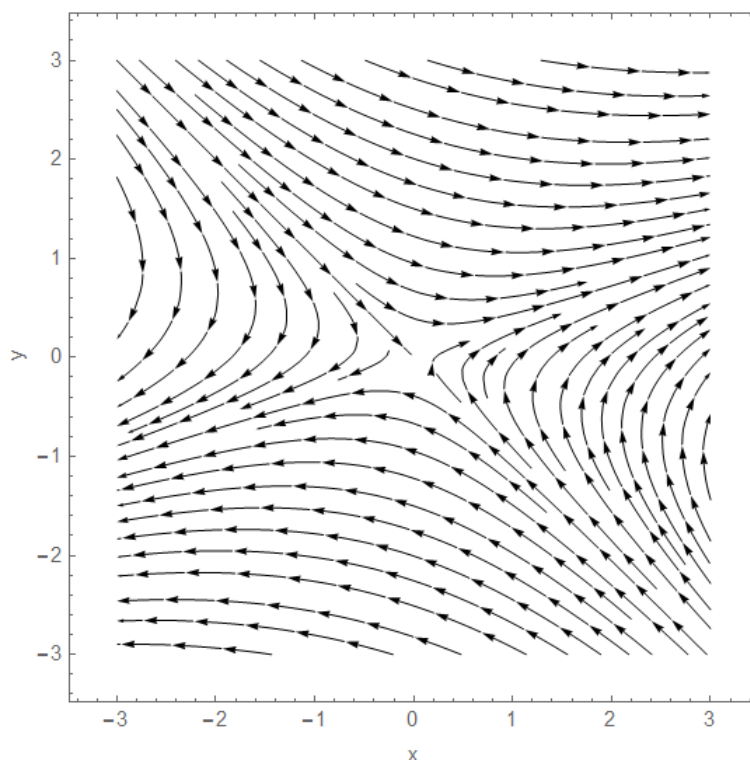


Figura 28: ritratto in fase dell'esempio

Esempio 3.5 (Pozzo o sink). Prendiamo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

la soluzione in questo caso è:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove entrambe le componenti tendono al punto $(0,0)$ per $t \rightarrow \infty$. Capiamo come vi tendono studiando la pendenza con l'ipotesi che $\beta \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

dove $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$. Osserviamo che per $t \rightarrow \infty$ le pendenze di una soluzione generica tendono a $\pm\infty$ a seconda del segno delle costanti arbitrarie. Questo significa che le soluzioni vanno verso l'origine in modo tangenziale all'asse y . Infatti la componente x tende più rapidamente a zero della componente y poichè $\lambda_1 < \lambda_2$.

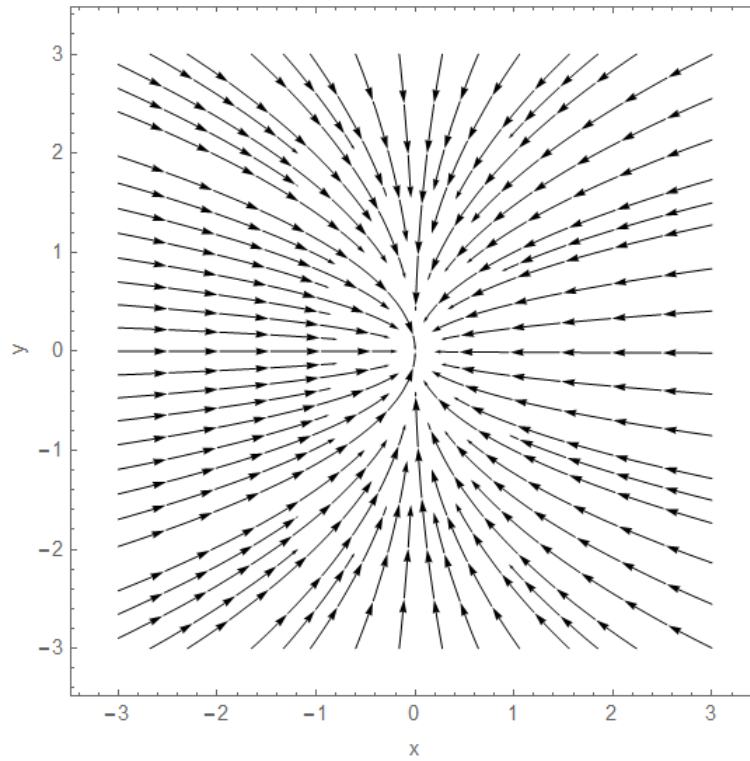


Figura 29: ritratto in fase del pozzo con $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$

Nel caso più generale abbiamo:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

quindi per capire la pendenza studiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t} u_2 + \lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t} v_2}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + \lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t} v_1} = \frac{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_2 + \lambda_2 \beta v_2}{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_1 + \lambda_2 \beta v_1}$$

che siccome $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ tende alla pendenza v_2/v_1 se $\beta \neq 0$ per $t \rightarrow \infty$. In questo caso quindi le soluzioni tendono all'origine tangenzialmente alla linea stabile che corrisponde all'autovalore λ_2 .

Esercizio 3.1. Studiare il caso con $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ chiamato sorgente o source.

3.4.2 Autovalori complessi

Avendo due autovalori complessi questi sono necessariamente l'uno il complesso coniugato dell'altro. Come fatto per il caso di autovalori reali procediamo guardando alcuni esempi notevoli.

Esempio 3.6 (Centro o center). Prendiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \pm i \beta$$

con $(1, i)$ autovettore relativo a $\lambda = i\beta$. La soluzione, derivante dal caso generale, è:

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

che è periodica di periodo $2\pi/\beta$. Le traiettorie formano dei cerchi concentrici attorno all'origine con direzione del flusso oraria (antioraria) se $\beta > 0$ ($\beta < 0$).

Esempio 3.7 (Spirale). Consideriamo il caso in cui $\alpha \neq 0$ e quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

che può essere riscritto in coordinate polari ponendo:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = -\beta \end{cases}$$

con r distanza del punto dall'origine e θ angolo polare. In questo caso gli autovalori hanno la forma $\alpha \pm i\beta$. La soluzione è quindi analoga al caso del centro, perchè le equazioni differenziali sono disaccoppiate, con l'ulteriore presenza di un'equazione non banale per r in quanto $\alpha \neq 0$. Quindi il ritratto in fase è simile a precedente ma $\dot{r} = r\alpha$ converge in cerchi spirali che entrano nell'origine se $\alpha < 0$ (pozzo) o escono dall'origine se $\alpha > 0$ (sorgente).

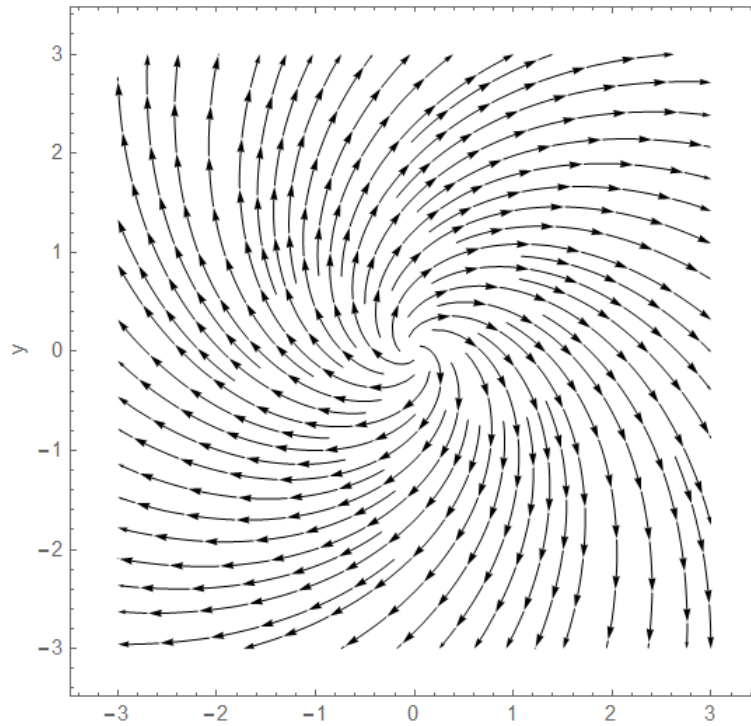


Figura 30: ritratto in fase della spirale con $\alpha = 1 > 0$ e $\beta = 1$

3.4.3 Autovalori ripetuti

Prendiamo gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 = \lambda_2$. Possiamo avere due forme per A . La prima è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_1 y \end{cases}$$

che implica $y = kx$ con k costante da determinare. In questo caso tutte le traiettorie passano per l'origine che è un nodo e sono entranti (uscenti) se $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$). La seconda forma è:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \lambda_1 x + y \\ y' = \lambda_1 y \end{cases}$$

di cui la soluzione si trova per integrazione diretta:

$$\begin{cases} x = (\alpha + \beta t) e^{\lambda_1 t} \\ y = \beta e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Rightarrow x = t y + \frac{\alpha}{\beta} y$$

volendo esprimere x solamente in funzione di y dalla seconda equazione ricaviamo che:

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \log \left(\left| \frac{y}{\beta} \right| \right) \Rightarrow x = \frac{y}{\lambda_1} (\log |y| + \text{costante})$$

che sono traiettorie entranti (uscenti) dall'origine se $\lambda_1 < 0$ ($\lambda_1 > 0$).

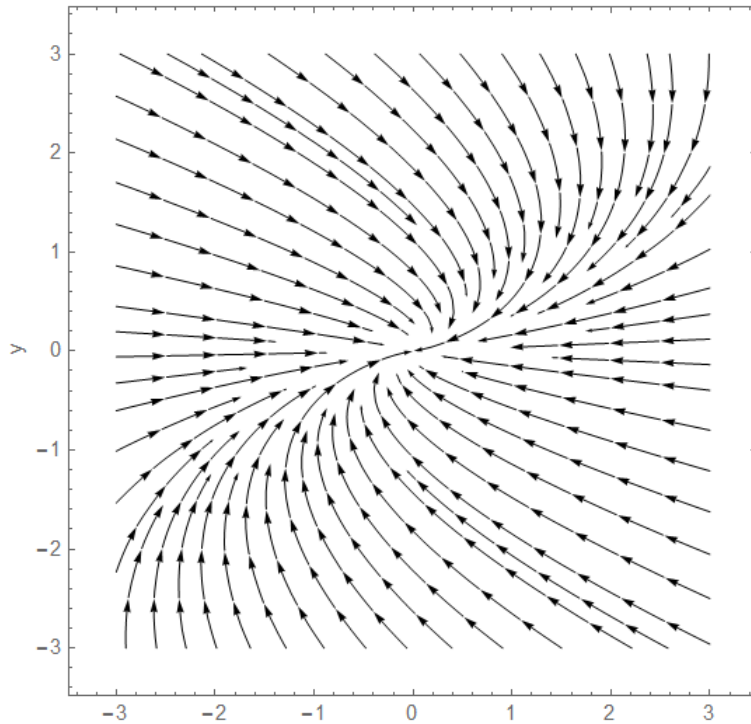


Figura 31: ritratto in fase nel caso di A diagonale superiore con $\lambda_1 = -1 < 0$

Esempio 3.8. Prendiamo l'equazione di un oscillatore:

$$\ddot{z} + 4z = 0$$

che si può scrivere come un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda = \pm 2i$ e dunque questo è il caso di un centro. Per $\lambda = 2i$ si può verificare che $(1, 2i)$ è autovettore. Introducendo quindi la matrice P le cui colonne sono la parte reale e immaginaria dell'autovettore $(1, 2i)$ possiamo portare A in forma canonica:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

e dunque la soluzione si può scrivere esplicitamente come:

$$x(t) = Py(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ c_2 \cos(2t) - c_1 \sin(2t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

abbiamo così che il ritratto in fase mostra dei cerchi concentrici centrati nell'origine per $\dot{y} = By$ mentre per $\dot{x} = Ax$, coordinate di partenza, presenta dei cerchi schiacciati dalla trasformazione lineare.

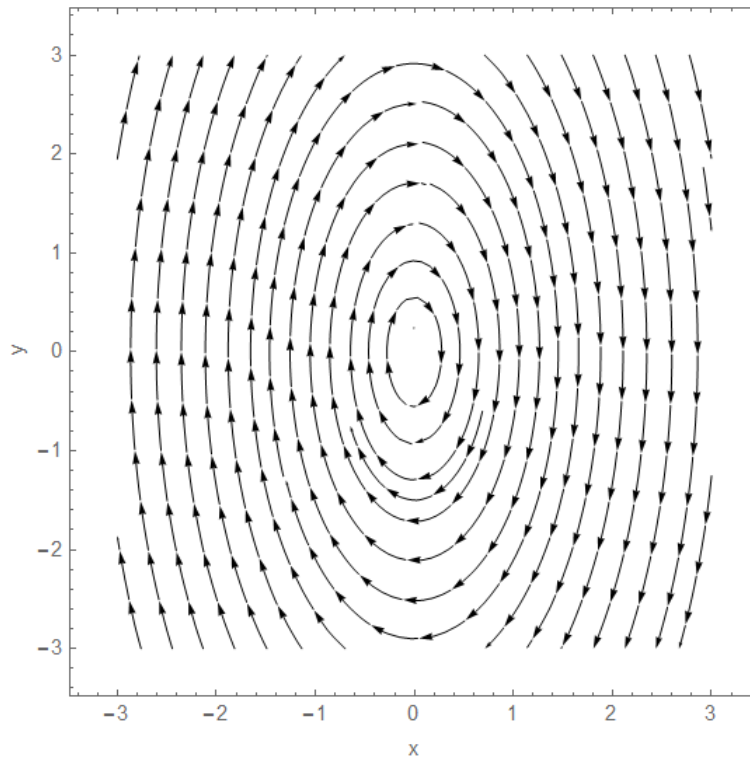


Figura 32: ritratto in fase nel caso di A diagonale superiore con $\lambda_1 = -1 < 0$

3.5 Il piano traccia determinante

Prendiamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

dove $\operatorname{tr}(A)$ e $\det(A)$ sono rispettivamente la traccia ed il determinante di A :

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_+ + \lambda_- = \tau \quad \det(A) = \lambda_+ \lambda_- = \delta$$

con λ_{\pm} autovalori di A e quindi radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta})$$

che sfruttiamo per classificare i sistemi dinamici planari mettendoli nel piano (τ, δ) .

Distinguiamo quindi diversi casi basandoci sulla posizione del punto (τ, δ) rispetto alla parabola di equazione:

$$\tau^2 - 4\delta = 0$$

e dunque sulla natura degli autovalori:

1. $\tau^2 - 4\delta < 0$: autovalori complessi. La parte reale degli autovalori è $\tau/2$. Se $\tau < 0$ si ha un pozzo a spirale, se $\tau > 0$ una sorgente a spirale e se $\tau = 0$ un centro;
2. $\tau^2 - 4\delta = 0$: autovalori ripetuti. Il punto è sulla parabola. La matrice A può essere diagonale o avere un 1 nell'entrata destra superiore. In entrambi i casi le traiettorie sono entranti per $\tau > 0$ e uscenti per $\tau < 0$;
3. $\tau^2 - 4\delta > 0$: autovalori reali e distinti. Se $\delta < 0$ allora $\lambda_+ \lambda_- < 0$, cioè uno dei due autovalori è negativo mentre l'altro positivo, e quindi si ha una sella. Se $\delta > 0$ e $\tau < 0$ ($\tau > 0$) allora gli autovalori sono entrambi negativi (positivi) e perciò è presente un pozzo (una sorgente).

Ovviamente le cose sono più complicate per sistemi non planari, vediamone un esempio.

Esempio 3.9. Consideriamo il sistema dinamico dato da:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} x = Ax$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, ovvero lo spazio delle fasi è tridimensionale. Impostiamo e risolviamo il problema agli autovalori:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4] = \\ &= (1-\lambda)(-2-\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

quindi gli autovalori 1, 2 e -1 sono chiaramente reali e distinti. Troviamo i corrispettivi autovettori risolvendo l'equazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \lambda = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \lambda = -1$$

e quindi la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

coverte il sistema $x' = Ax$ in:

$$y' = (P^{-1}AP)y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

che sfruttiamo per scrivere la soluzione nelle variabili iniziali:

$$x(t) = Py(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dove c_1 , c_2 e c_3 costanti da determinare.

Studiando il ritratto in fase di questo sistema si può identificare una linea stabile, identificata dal vettore $(0, 1, 2)$, e un piano instabile all'interno del quale le traiettorie si allontanano dall'origine.

3.6 Oscillatori armonici disaccoppiati

Consideriamo il sistema dinamico non lineare:

$$\begin{cases} x_1'' = -\omega_1^2 x_1 \\ x_2'' = -\omega_2^2 x_2 \end{cases}$$

e introduciamo $y_i = x_i'$ con $i = 1, 2$ che usiamo per scrivere il sistema dinamico lineare equivalente:

$$\begin{cases} x_1' = y_1 \\ y_1' = -\omega_1^2 x_1 \\ x_2' = y_2 \\ y_2' = -\omega_2^2 x_2 \end{cases}$$

associato alla matrice a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e con coordinate $X = (x_1, x_2, y_1, y_2)$. A questo sistema corrispondono le coppie di autovalori $\pm i\omega_1$ e $\pm i\omega_2$ con autovettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad i\omega_1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i\omega_2 \end{pmatrix} \quad i\omega_2$$

da cui ricaviamo quattro vettori linearmente indipendenti ponendo:

$$w_1 = \operatorname{Re}(v_1), \quad w_2 = \operatorname{Im}(v_1), \quad w_3 = \operatorname{Re}(v_2), \quad w_4 = \operatorname{Im}(v_2)$$

dove $\operatorname{Re}(v_i)$ e $\operatorname{Im}(v_i)$ sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di v_i con $i = 1, 2$.

Prendiamo ora P tale che $Pe_j = w_j$ con e_j elemento j -esimo della base canonica di \mathbb{R}^4 e $j = 1, 2, 3, 4$. In altre parole P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori. Allora $P^{-1}AP$ ha la forma canonica:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

nella quale è semplice risolvere il sistema:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) \\ -a_1 \sin(\omega_1 t) + b_1 \cos(\omega_1 t) \\ a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) \\ -a_2 \sin(\omega_2 t) + b_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

tuttavia invece di guardare direttamente le soluzioni studiamone la struttura.

Consideriamo ad esempio $(x_i(t), y_i(t))$ con $i = 1, 2$. Questa parte della soluzione è periodica con periodo $T_i = 2\pi/\omega_i$. Ciò però non significa che la soluzione completa sia periodica perchè le sue parti hanno generalmente periodi distinti. La soluzione è periodica se esistono $n, m \in \mathbb{N}$ con $\tau = mT_1$ e $\tau = nT_2$ ovvero:

$$\tau = mT_1 = nT_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$$

con \mathbb{Q} insieme dei numeri razionali.

Andiamo nel dettaglio. Consideriamo il sistema in forma canonica:

$$\begin{cases} x'_i = \omega_i y_i \\ y'_i = -\omega_i x_i \end{cases} \quad i = 1, 2$$

descrivente due oscillatori disaccoppiati. Riscriviamo questo sistema in coordinate polari:

$$(x_i, y_i) \rightarrow (r_i, \theta_i)$$

definite nel modo usuale:

$$\begin{cases} x_i = r_i \cos(\theta_i) \\ y_i = r_i \sin(\theta_i) \end{cases} \Rightarrow r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

e derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$2 r_i r'_i = 2 x_i x'_i + 2 y_i y'_i = 2 x_i y_i \omega_i - 2 x_i y_i \omega_i = 0$$

ovvero abbiamo ricavato l'equazione differenziale $r'_i = 0$ con $i = 1, 2$.

Cerchiamo ora un'equazione per θ . Sfruttando le definizioni usate otteniamo:

$$\frac{y_i}{x_i} = \tan(\theta_i)$$

che derivata rispetto al tempo fornisce:

$$\frac{1}{\cos^2(\theta_i)} \theta'_i = \frac{y'_i x_i - y_i x'_i}{x_i^2} = -\frac{\omega r_i^2}{r_i^2 \cos^2(\theta_i)}$$

equivalente all'equazione $\theta'_i = -\omega_i$.

In coordinate polari il sistema quindi diventa:

$$\begin{cases} r'_i = 0 \\ \theta'_i = -\omega_i \end{cases} \quad i = 1, 2$$

il quale ci dice che r_1 e r_2 sono costanti lungo tutte le soluzioni e dunque possiamo fissarli: ad esempio poniamo $r_1, r_2 = 1$. Ci rimane così lo studio di un sistema con due variabili θ_1 e θ_2 periodiche.

Osservazione. Il luogo geometrico di questi punti descrive un toro in \mathbb{R}^4 .

Concentriamoci sulle due equazioni:

$$\begin{cases} \theta'_1 = -\omega_1 \\ \theta'_2 = -\omega_2 \end{cases}$$

e per capire come sono fatte le traiettorie disegniamo il piano (θ_1, θ_2) come un quadrato. Sul lato inferiore del quadrato facciamo variare θ_1 da 0 a 2π crescente verso destra e su quello sinistro facciamo variare θ_1 da 0 a 2π verticalmente crescente verso l'alto. Per la condizione di periodicità identifichiamo i lati opposti. Quest'operazione si può immaginare come un avvolgimento del quadrato che congiunge un paio di lati opposti formando un cilindro e un successivo congiungimento delle basi del cilindro a creare un anello.

In questo quadrato il campo vettoriale ha pendenza costante data da:

$$\frac{\theta'_2}{\theta'_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

ovvero dal rapporto tra le due frequenze. Notiamo in particolare che queste traiettorie sono delle rette che vivono sul quadrato avente i bordi indenticati. Questo significa che quando una soluzione raggiunge $\theta_1 = 2\pi$ per un certo valore di $\theta_2 = c$ riappare a $\theta_1 = 0$ con lo stesso valore $\theta_2 = c$ e la stessa pendenza ω_2/ω_1 . Lo stesso vale per θ_2 . Il comportamento di questa traiettoria dipende dall'appartenza o meno della pendenza all'insieme dei numeri razionali.

Se ω_2/ω_1 è un numero razionale uguale a n/m con $n, m \in \mathbb{N}$ allora le soluzioni sono periodiche. In questo caso la soluzione che parte da $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ attraversa gli estremi del quadrato n volte

verticalmente e m volte orizzontalmente, prima di tornare nuovamente al punto di partenza. Nel caso irrazionale la soluzione non è periodica. Fissiamo la striscia $\theta_1 = 0$ che è un cerchio disegnato come il lato sinistro del quadrato. Prendiamo quindi un punto x_0 sulla circonferenza $\theta_1 = 0$ e studiamone la traiettoria. Questa è una retta con una certa pendenza che prosegue verso l'alto finché non incontra il valore $\theta_2 = 2\pi$, identificato dal lato superiore del quadrato, per poi riapparire dal basso con stessa pendenza e così via. Prima o poi una delle rette che si ottengono in questo modo interseca nuovamente il cerchio $\theta_1 = 2\pi = 0$, cioè il lato destro identificato al lato sinistro, nel punto $x_1 \neq x_0$. Si parte quindi di nuovo dal lato sinistro con dato iniziale x_1 e con un procedimento analogo si ottiene un altro punto x_2 sul cerchio $\theta_1 = 0$. Questa procedura definisce una cosiddetta mappa di Poincaré e il punto x_1 è anche detto primo ritorno perché è il primo punto in cui la traiettoria torna a $\theta_1 = 0$.

In altre parole stando su θ_2 la mappa f di Poincaré associa a x_0 la coordinata x_1 della traiettoria quando ritorna a $\theta_1 = 0$, cioè $f(x_0) = x_1$. Scriviamo più precisamente questa mappa. Supponiamo che il primo ritorno avvenga al punto $\theta_2(\tau)$ dove τ è il tempo che la traiettoria ha impiegato per arrivare a $\theta_2 = 2\pi$. Siccome:

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \omega_1 t$$

allora ponendo $\theta_1(0) = 0$:

$$\theta_1(\tau) = 2\pi = \omega_1 \tau$$

da cui $\tau = 2\pi/\omega_1$ per definizione della frequenza ω_1 . Similmente per:

$$\theta_2(\tau) = \theta_1(0) + \omega_2 \frac{2\pi}{\omega_1} = x_0 + \omega_2 \frac{2\pi}{\omega_1}$$

allora la mappa di Poincaré sul cerchio è definita da:

$$f(x_0) = x_0 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}$$

che ruota i punti sul cerchio θ_2 di un angolo $2\pi\omega_2/\omega_1$. In particolare per ω_2/ω_1 irrazionali si dice che avviene una rotazione irrazionale del cerchio.

Per concludere alcuni commenti:

- la mappa ci ha permesso di associare un sistema dinamico discreto ad un sistema dinamico continuo:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0) = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

ottenendo l'orbita di x_0 sotto l'iterazione di f . In generale procedimenti analoghi si possono fare per sistemi dinamici più complicati in dimensione più elevata;

- si può dimostrare che l'orbita di x_0 è densa nel cerchio se ω_2/ω_1 è irrazionale.

3.7 Esponenziale di una matrice

L'esponenziale di matrice è un oggetto matematico che può essere usato per approssimare in modo alternativo la risoluzione dei sistemi lineari. Per introdurlo prendiamo un operatore lineare $T : E \rightarrow E$ con E spazio Euclideo, ad esempio $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo $x \in E$ vettore: possiamo definire la sua norma $|x|$ come la radice quadrata della somma dei quadrati dei suoi elementi. Allo stesso modo è possibile definire una norma per l'operatore T .

Definizione 3.1 (Norma uniforme). Consideriamo $T : E \rightarrow E$ operatore lineare su E spazio Euclideo. Definiamo la sua norma uniforme come:

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$

ovvero come l'estremo superiore sul cerchio di T . Si può dimostrare che questa definizione soddisfa tutte le proprietà di una norma.

Definizione 3.2 (Operatore limitato). Un operatore T è limitato se $\|T\| < \infty$.

Per i nostri scopi supponiamo sia sempre possibile rappresentare T con una matrice A . Allora:

$$|T(x)|^2 = x^T A^T A x = x^T S x \geq 0$$

dove $S = A^T A$ è simmetrica per definizione e quindi può essere diagonalizzata da una trasformazione ortogonale, cioè da una rotazione ortogonale $O^{-1} = O^T$. Abbiamo quindi:

$$S = O^T \Lambda O$$

con Λ matrice diagonale. Inoltre, siccome S è definita positiva, possiamo scrivere:

$$\Lambda = \text{diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2)$$

dove l'elemento r_i , preso come la radice quadrata non negativa di r_i^2 , è detto valore singolare di T . Poniamo ora $x = O^T y$ ottenendo:

$$|T(x)|^2 = x^T S x = (O^T y)^T S (O^T y) = y^T O O^T \Lambda O O^T y = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^n r_i^2 y_i^2$$

e siccome O è ortogonale allora $|x| = |y| = 1$ per definizione di trasformazione ortogonale. Abbiamo dunque che:

$$|T(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2 y_i^2}$$

intesa con $|y| = 1$. Si può dimostrare che prendendo $|y| = 1$ il massimo si ottiene quando $y = e_k$ con $\{e_i\}_i = 1, \dots, n$ base canonica di \mathbb{R}^n . Ricordando perciò la nostra definizione:

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$

possiamo riscriverla come:

$$\|T\| = \max_{i=1, \dots, n} r_i$$

concludendo così che ogni matrice corrisponde ad un operatore lineare limitato. L'esponenziale di un operatore T è definito formalmente da un'espansione in serie:

$$e^T = \exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

che definisce un operatore lineare se converge ovvero se T è un operatore limitato.

Teorema 3.3. Dato un operatore $T : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow E$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

è assolutamente convergente per ogni operatore limitato.

Dimostrazione. Se T è limitato allora anche T^k è limitato. Infatti ponendo:

$$0 < \|T\| \leq \alpha < \infty$$

segue dalle proprietà della norma che:

$$\frac{\|T\|^k}{k!} \leq \frac{\alpha^k}{k!}$$

dunque la serie reale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^\alpha$$

limita la serie $\exp(T)$ che quindi converge assolutamente. □

Vediamo alcune proprietà dell'esponente di matrice:

1. presi due operatori T e P , con P invertibile, vale che:

$$\exp(PTP^{-1}) = P \exp(T) P^{-1} \quad (11)$$

infatti siccome $PP^{-1} = I$:

$$(PTP^{-1})^k = PTP^{-1}PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^k P^{-1}$$

quindi:

$$P \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!}$$

da cui l'identità (11) segue per $n \rightarrow \infty$ perchè la convergenza è assicurata;

2. se due matrici A e B commutano, cioè $AB = BA$, allora:

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

infatti, siccome $AB = BA$, possiamo usare il teorema binomiale:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} A^k B^{n-k}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ k \leq n}}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{l!} A^n B^l = e^A e^B
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $l = n - k \geq 0$;

3. se $AB = BA$ allora:

$$e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

che si dimostra ponendo $B = -A$ nella relazione verificata al punto 2.;

4. se $Tv = \lambda v$, cioè $v \in \mathbb{R}^n$ è autovettore dell'operatore $T : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow E$ con λ autovalore reale, allora:

$$e^T v = e^\lambda v$$

infatti:

$$e^T v = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k v}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k v}{k!} \right) = e^\lambda v$$

in quanto $T^k v = T^{k-1} T v = T^{k-1} \lambda v = \lambda T^{k-1} v = \dots = \lambda^k v$;

5. considerando $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ matrice diagonale abbiamo che:

$$\Lambda^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

quindi $\exp(\Lambda) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Osservazione. Se $[A, B] = AB - BA \neq 0$ le cose si complicano e si ha la formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^C$$

con C definito come:

$$C = A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] - \frac{1}{12} [B, [A, B]] + \dots$$

espressione ricorrente in diversi ambiti.

Teorema 3.4. Sia $A \in \text{mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Allora il problema ai dati iniziali $\dot{x} = Ax$ con $x(0) = x_0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ ha soluzione unica:

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

dove $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Consideriamo:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA} A$$

dove l'ultima eguaglianza si vede espandendo:

$$e^{hA} = 1 + hA + O(h^2)$$

e sostituendo questo sviluppo nel limite. Abbiamo perciò:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}x_0) = Ae^{tA}x_0 = Ax$$

che è dunque soluzione dell'equazione differenziale e soddisfa anche il dato iniziale.

Dimostriamo l'unicità. Supponiamo $y(t)$ soluzione a priori diversa da quella trovata:

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}y(t)) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}\dot{y}(t) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t) = (-Ae^{-tA} + e^{-tA}A)y(t) = 0$$

dove l'ultima eguaglianza è verificata perchè A commuta con la sua potenza k -sima, siccome commuta con sè stessa, e perciò con e^{-tA} . Abbiamo così dimostrato che:

$$e^{-tA}y(t) = y_0 \Rightarrow y(t) = e^{tA}y_0$$

con y_0 costante. Imponendo le condizioni iniziali fissiamo $y_0 = x_0$, cioè:

$$y(t) = e^{tA}x_0 = x(t)$$

perciò la soluzione trovata è unica. □

Volendo sfruttare questo teorema per risolvere $\dot{x} = Ax$ dobbiamo imparare a calcolare l'esponenziale di A . Assumiamo che A abbia autovalori distinti, allora esiste una matrice P tale che:

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_m \end{pmatrix} \quad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{N}$ autovalori reali e distinti e $2m \in \mathbb{N}$ autovalori complessi e coniugati. Come visto, P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di A che, in particolare, sono linearmente indipendenti perchè distinti e quindi la matrice P è invertibile. Possiamo riscrivere la matrice B come una somma di matrici aventi:

- o un solo autovettore λ_i con $i = 1, \dots, k$ sulla diagonale e le restanti entrate nulle;
- o un solo blocco D_i con $i = 1, \dots, 2m$ sulla diagonale e le restanti entrate nulle.

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove le matrici che costituiscono i termini della somma commutano tra di loro. Allora, sapendo che da $P^{-1}AP = B$ segue $A = PBP^{-1}$ e utilizzando la proprietà $\exp(PTP^{-1}) = P \exp(T)P^{-1}$ con T operatore lineare limitato, si trova:

$$e^{tA} = e^{tPBP^{-1}} = Pe^{tB}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_k t} & \\ & & & e^{tD_1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{tD_m} \end{pmatrix} P^{-1}$$

in cui dobbiamo calcolare e^{tD_i} con $i = 1, \dots, m$. Scriviamo:

$$D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} = \alpha_j I + \beta_j \sigma \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove, in particolare, $[I, \sigma] = I\sigma - \sigma I = 0$, ovvero le due matrici commutano. Ricaviamo l'esponenziale di σ calcolando esplicitamente:

$$\sigma^2 = \sigma\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\sigma^3 = \sigma(\sigma\sigma) = \sigma(-I) = -\sigma$$

$$\sigma^4 = \sigma(-\sigma) = -(-I) = I$$

quindi i prodotti di σ con sè stesso si ripetono con periodo 4. Allora:

$$e^{t\sigma} = I \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h t^{2h}}{(2h)!} + \sigma \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h t^{2h+1}}{(2h+1)!} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

da cui:

$$e^{tD_j} = e^{t\alpha_j I} e^{t\beta_j \sigma} = e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_j t) & \sin(\beta_j t) \\ -\sin(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{pmatrix}$$

e ora per poter considerare il problema lineare risolto ci mancherebbe il caso degli autovalori ripetuti.

3.7.1 Stabilità per sistemi lineari

Questo problema è legato all'andamento delle soluzioni per $t \rightarrow \infty$. Sappiamo che la soluzione scritta in maniera compatta è:

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

di cui dobbiamo comprenderne l'andamento, che è determinato dagli autovalori di A .

Definizione 3.3 (Sistema dinamico lineare spettralmente stabile). Il sistema dinamico lineare si dice spettralmente stabile se nessuno dei suoi autovalori ha parte reale positiva.

Prendiamo $T : E \rightarrow E$ con E spazio euclideo. Scriviamo i suoi autovalori utilizzando le loro componenti reali e immaginaria:

$$\lambda_i = u_i + i w_i$$

allora lo spazio vettoriale si può decomporre nei suoi autospazi:

$$E = E^u \oplus E^c \oplus E^s$$

che definiamo come:

- $E^u = \text{span}\{u_i, w_i \mid \text{Re}(\lambda_i) > 0\}$, sottospazio instabile;
- $E^c = \text{span}\{u_i, w_i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0\}$, sottospazio centrale;
- $E^s = \text{span}\{u_i, w_i \mid \text{Re}(\lambda_i) < 0\}$, sottospazio stabile.

Definizione 3.4 (Sistema dinamico lineare iperbolico). Un sistema dinamico lineare si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$, cioè tutti i suoi autovalori hanno parte reale non nulla.

Definizione 3.5 (Sistema dinamico lineare linearmente stabile). Un sistema dinamico lineare si dice linearmente stabile se tutte le soluzioni sono limitate per $t \rightarrow \infty$.

In particolare abbiamo che:

- se $x_0 \in E^s$ allora tutte le soluzioni sono limitate;
- se $x_0 \in E^u$ allora tutte le soluzioni non sono limitate;
- se $x_0 \in E^c$ e si hanno autovalori ripetuti allora possono esserci dei termini lineari.

Definizione 3.6 (Sistema dinamico lineare asintoticamente linearmente stabile). Un sistema dinamico lineare si dice asintoticamente linearmente stabile se tutte le soluzioni tendono a zero per $t \rightarrow \infty$, cioè $E = E^s$.

Teorema 3.5. Se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} x_0 = 0$$

per ogni x_0 .

Dimostrazione. Se tutti gli autovalori $\lambda_j = a_j + i b_j$ hanno parte reale a_j negativa significa che $x_0 \in E^s$. Sappiamo che tutti i termini della soluzione vanno come:

$$t^k e^{ta_i} e^{ib_j t}$$

con t^k derivante da combinazioni lineari che si possono avere nel caso di autovalori ripetuti. Abbiamo dunque che l'esponenziale con esponente complesso è limitato mentre i restanti termini vanno a zero per $t \rightarrow \infty$ perchè $a_j < 0$.

Viceversa:

- se abbiamo autovalore con parte reale positiva allora possiamo prendere condizioni iniziali x_0 nel sottospazio instabile E^u associato a quell'autovalore trovando così una soluzione che cresce esponenzialmente;
- se $\text{Re}(\lambda) = 0$ possiamo trovare soluzioni del tipo $t^k e^{ib_j t}$ che non tendono ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.

□

3.7.2 Scomposizione di Jordan-Chevalley

La scomposizione di Jordan-Chevalley permette di scrivere una matrice A non diagonalizzabile nella forma:

$$A = S + N$$

dove S matrice semisemplice, quindi diagonalizzabile, e N matrice nilpotente, ovvero esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = 0$. Il minimo intero m per cui $N^m = 0$ si dice indice di nilpotenza di N . Inoltre le due matrici S e N sono tali che:

$$[S, N] = SN - NS = 0$$

cioè commutano. La decomposizione in due matrici che commutano permette di scrivere l'esponenziale di A come:

$$e^{tA} = e^{t(S+N)} = e^{tS+tN} = e^{tS}e^{tN}$$

dove possiamo esplicitare:

$$e^{tN} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h N^h}{h!} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{t^h N^h}{h!}$$

in cui il troncamento della somma deriva dalla nilpotenza di N .

Esempio 3.10. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} + \lambda x_n \end{cases}$$

al quale è associata la matrice non diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = S + N = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\text{rank}(N) = n - 1$ e $\dim(\ker(N)) = 1$. Abbiamo così che:

$$e^{tA} = e^{t\lambda} I e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}$$

dove:

$$e^{tN} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(tN)^h}{h!} = I + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ t & 1 & & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.2. Dimostrare che la matrice N trovata nell'esempio è nilpotente:

$$N^n = 0$$

con $n \in \mathbb{N}$ numero d'equazioni del sistema lineare considerato. Assicurarsi inoltre che $N^{n-1} \neq 0$.

Teorema 3.6 (Jordan-Chevalley). *Consideriamo un spazio vettoriale V su un corpo K e un operatore $T : V \rightarrow V$ con autovalori appartenenti al corpo K . Esso può essere scomposto in un unico modo come:*

$$T = S + N$$

dove:

1. S è diagonalizzabile;
2. N è nilpotente;
3. S e N commutano.

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di ulteriori risultati che ora introduciamo.

Lemma 3.2. *Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore lineare e $U \subseteq V$ un sottospazio T -invariante. Allora, denotata con $T|_U^i$, $i \in \mathbb{N}$, la restrizione di T^i a U , vale:*

- $\ker(T|_U^i) = \ker(T^i \cap U)$
- $\operatorname{im}(T|_U^i) = \operatorname{im}(T^i \cap U)$

Lemma 3.3 (Hans-Fitting). *Consideriamo un operatore T con le solite ipotesi e le due catene di sottospazi T -invarianti:*

$$\{0\} = \ker(T^0) \subseteq \ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \dots \subseteq V, \quad V \supseteq \operatorname{im}(T) \supseteq \operatorname{im}(T^2) \supseteq \dots \supseteq \{0\} \quad (12)$$

allora esiste un intero ρ tale che $\ker(T^\rho) = \ker(T^m)$ per ogni $m \geq \rho$. Esso è il minimo intero per cui vale questa proprietà ed è detto indice di Riesz di T . Come conseguenza della sua esistenza si hanno delle inclusioni strette:

$$\begin{aligned} \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T^\rho) = \ker(T^{\rho+1}) \\ \operatorname{im}(T) \supsetneq \operatorname{im}(T^2) \supsetneq \dots \supsetneq \operatorname{im}(T^\rho) = \operatorname{im}(T^{\rho+1}) \end{aligned}$$

e lo spazio vettoriale V si scompone come:

$$V = \ker(T^\rho) \oplus \operatorname{im}(T^\rho)$$

chiamata scomposizione di Fitting.

Dimostrazione. Siccome $\ker(T^\rho) \subseteq V$ e V ha dimensione finita, la catena ascendente in (12) se deve stabilizzare. Quindi deve esistere $j \in \mathbb{N}$ tale che $\ker(T^j) = \ker(T^{j+1})$. Dimostriamo che $\ker(T^{j+1}) = \ker(T^{j+2})$. Se $T^{j+2}(v) = T^{j+1}(T(v)) = 0$ allora $T(v) \in \ker(T^{j+1}) = \ker(T^j)$. Quindi, $0 = T^j T(v) = T^{j+1}(v)$ implica $\ker(T^{j+2}) \subseteq \ker(T^{j+1})$ e dunque la tesi. Perciò la catena ascendente in (12) si stabilizza almeno da j in poi. Inoltre, il fatto che:

$$\dim(V) = \dim(\ker(T^\rho)) + \dim(\operatorname{im}(T^\rho)) \quad (13)$$

comporta che ρ stabilizzi anche la catena discendente.

Per dimostrare la seconda affermazione del teorema, tenuto conto della (13), basta dimostrare che $\ker(T^\rho) \cap \operatorname{im}(T^\rho) = \{0\}$. Supponiamo che $w \in \ker(T^\rho) \cap \operatorname{im}(T^\rho)$. Allora deve esistere $v \in V$ tale che:

$$\begin{cases} w = T^\rho v \\ T^\rho w = 0 \end{cases} \Rightarrow T^{2\rho} v = 0 \Rightarrow v \in \ker(T^{2\rho}) = \ker(T^\rho)$$

dunque $w = T^\rho v = 0$. □

Corollario 3.1. *Dalla scomposizione di Fitting discendono due proprietà:*

1. *l'operatore $T|_{\ker(T^\rho)} : \ker(T^\rho) \rightarrow \ker(T^\rho)$ è nilpotente di indice ρ ;*
2. *l'operatore $T|_{\operatorname{im}(T^\rho)} : \operatorname{im}(T^\rho) \rightarrow \operatorname{im}(T^\rho)$ è automorfismo.*

Dimostrazione. Abbiamo che:

1. $T^\rho(\ker(T^\rho)) = \{0\}$ inoltre esiste $v \in \ker(T^\rho) \setminus \ker(T^{\rho-1})$ tale che $T^{\rho-1}v \neq 0$;
2. $\ker(T|_{\operatorname{im}(T^\rho)}) = \ker(T) \cap \operatorname{im}(T^\rho) \subseteq \ker(T^\rho) \cap \operatorname{im}(T^\rho) = 0$.

□

Osservazione. Se ne lemma di fitting T è un automorfismo allora $\ker(T) = \{0\}$, $\operatorname{im}(T) = 0$ e l'indice di Riesz è nullo.

Proposizione 3.1. *Siano $A_1, A_2 : V \rightarrow V$ due operatori lineari tali che:*

$$[A_1, A_2] = 0$$

allora:

1. *il nucleo e l'immagine di A_i sono sottospazi invarianti per A_j con $i, j = 1, 2$;*
2. *$\ker(A_i^m)$ e $\operatorname{im}(A_i^m)$, con $m \in \mathbb{N}$, sono sottospazi A_j invarianti.*

Dimostrazione. Per $i = j$ la tesi è ovvia. Dimostriamo che l'invarianza esiste per $i \neq j$:

1. consideriamo $v \in \ker(A_i)$, allora $0 = A_j(A_i v) = A_i(A_j v)$, cioè $A_j v \in \ker(A_i)$. Inoltre, se $w \in \operatorname{im}(A_i)$ allora esiste v tale che $w = A_i v$, quindi $A_j w = A_j A_i v = A_i(A_j v) \in \operatorname{im}(A_j)$;
2. dalla commutatività degli operatori segue che:

$$[A_i^m, A_j] = 0$$

con $m \in \mathbb{N}$. Quindi basta applicare uno alla coppia di operatori A_i^m, A_j

□

Lemma 3.4. *Siano $A, B : V \rightarrow V$ due operatori lineari e U un sottospazio invariante sia per A che per B . Allora $(A + B)|_U = A|_U + B|_U$ e $(AB)|_U = A|_U B|_U$.*

Teorema 3.7 (Decomposizione primaria o scomposizione spettrale). *Sia $T : V \rightarrow V$ operatore con $r \leq \dim(V) = n$ autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ eventualmente coincidenti e nel campo K . Sotto queste ipotesi vale che:*

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \ker((T - \lambda_i I)^{\rho_i}) = \bigoplus_{i=1}^r V_i$$

con V_i sottospazio generalizzato di dimensione $\dim(V_i) = \text{ma}(\lambda_i) = a_i$ e ρ_i indice di Riesz. Inoltre l'operatore T ammette la seguente scomposizione:

$$T = \bigoplus_{i=1}^r T_i, \quad T_i = T|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$$

dove T_i restrizione dell'operatore T sui sottospazi spettrali. La restrizione è possibile perchè i sottospazi generalizzati sono T -invarianti, cioè $T(V_i) \subseteq (V_i)$ con $i = 1, \dots, r$.

A questo punto possiamo finalmente dimostrare il teorema di Jordan-Chevalley.

Dimostrazione. Dal teorema di scomposizione spettrale:

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i, \quad T = \bigoplus_{i=1}^r T_i$$

consideriamo dunque gli operatori T_i definiti sui sottospazi spettrali V_i :

$$T_i = T|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$$

dove T_i possiede come unico autovalore λ_i con $i = 1, \dots, n$. Definiamo:

$$S_i = \lambda_i I|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i \quad N_i = T_i - S_i = (T_i - \lambda_i I)$$

che commutano, cioè $[S_i, N_i] = 0$ siccome gli operatori S_i sono proporzionali all'identità. Gli operatori N_i sono nilpotenti di indice ρ_i per il corollario del lemma di Hans-Fitting. Allora:

$$T = \bigoplus_{i=1}^r T_i = \bigoplus_{i=1}^r (S_i + N_i) = \bigoplus_{i=1}^r S_i + \bigoplus_{i=1}^r N_i = S + N$$

dove l'operatore S è diagonalizzabile su una base B' adattata alla decomposizione spettrale in sottospazi generalizzati, N è nilpotente di indice:

$$\rho = \max_{i=1, \dots, r} \rho_i$$

poichè:

$$N^\rho = \left(\bigoplus_{i=1}^r N_i \right)^\rho = \bigoplus_{i=1}^r (N_i^\rho) = 0$$

e $[S, N] = 0$, che si dimostra in modo analogo quanto appena fatto si dimostra che. \square

Corollario 3.2. *Su una qualsiasi base B' adattata alla decomposizione spettrale l'operatore T ha la rappresentazione:*

$$[T]^B = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dove Λ_i e N_i sono matrici $a_i \times a_i$.

Ricapitolando, consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

che sappiamo avere unica soluzione:

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

dove calcoliamo e^{tA} sfruttando la scomposizione di Jordan - Chevalley. Ricordiamo che ogni operatore $T : V \rightarrow V$ con autovalori reali può essere scomposto in:

$$T = S + N$$

dove S e N sono operatori rispettivamente semisemplice e nilpotente che commutano. L'operatore semisemplice è diagonalizzabile in queste ipotesi nella base spettrale. Prendendo quindi $A = [T]^B$ rappresentazione di T nella base standard B :

$$e^{tA} = e^{t(S+N)} = e^{tS}e^{tN}$$

per calcolare e^{tS} ci poniamo nella base B' in cui S è diagonale. A questo scopo definiamo $S_0 = [S]^B$ e $S_1 = [S]^{B'}$. Abbiamo così:

$$e^{tS} = e^{tS_0} = e^{tPS_1P^{-1}} = Pe^{tS_1}P^{-1}$$

mentre per calcolare e^{tN} calcoliamo innanzitutto l'operatore N nella base canonica:

$$N_0 = A - S_0$$

che essendo nilpotente definisce una serie esponenziale finita:

$$e^{tN_0} = \sum_{h=0}^m \frac{t^h}{h!} N_0^h$$

ottenendo così l'esponenziale di una matrice con l'ipotesi di autovalori reali.

Esempio 3.11. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di cui la soluzione sappiamo essere:

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

con x_0 vettore dei dati iniziali. Prima di proseguire notiamo che questo sistema si può risolvere direttamente perchè la matrice è triangolare. Infatti l'ultima equazione è disaccoppiata dalle altre e quindi può essere risolta indipendentemente trovando x_3 , da cui x_2 e quindi x_1 .

Per esplicitare la soluzione dobbiamo calcolare l'esponenziale di una matrice 3×3 . Sappiamo che:

$$[T]^B = A = S_0 + N_0 \quad [T]^{B'} = S_1 + N_1$$

dove $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica e B' base da determinare. La parte semisemplice si può ricavare dallo spettro di A :

$$\det(A - \lambda I) = (1 + \lambda^2)(1 - \lambda) \Rightarrow \sigma(T) = \{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1\}$$

con autovalori aventi molteplicità algebrica $\text{ma}(-1) = 2$ e $\text{ma}(1) = 1$. Abbiamo quindi un autovalore degenere. La scomposizione spettrale è quindi:

$$V = V_1 \oplus V_2 = \ker(A - \lambda_1 I)^{\rho_1} \oplus \ker(A - \lambda_2 I)^{\rho_2}$$

con $V_{1,2}$ autospazi generalizzati associati ai due autovalori $\lambda_{1,2}$. Grazie al lemma di Hans-Fitting sappiamo che:

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker(A + I) = \langle e_1 \rangle \subseteq \ker((A + I)^2) = \langle e_1, e_2 \rangle = \ker((A + I)^3)$$

dove l'ultima eguaglianza si ottiene osservando che $\dim(V_1) \neq 3$. Infatti se $\dim(V_1) = 3$ allora $V_2 = \emptyset$ mentre V_2 ha almeno dimensione 1. Dunque:

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \ker(A - I) = \langle v_3 \rangle = \langle (0, 2, 1) \rangle$$

infatti $(A - I)v_3 = 0$. Da ciò deduciamo la base:

$$B' = \{e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = v_3\} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla quale:

$$[T]^{B'} = S_1 + N_1, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre:

$$A = [T]^B = S_0 + N_0, \quad S_0 = P S_1 P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui possiamo ricavare:

$$N_0 = A - S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è nilpotente, $N_0^2 = 0$, e commuta con S_0 . A questo punto possiamo calcolare l'esponenziale della matrice A nella base canonica esplicitando:

$$e^{tS_0} = e^{tPS_1P^{-1}} = P e^{tS_1} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} + 2e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

ed anche:

$$e^{tN_0} = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che moltiplicate ed applicate a x_0 forniscono la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - 2 c_3 t e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_3 (2 e^t - 2 e^{-t}) \\ x_3(t) = c_3 e^t \end{cases}$$

con $x_0 = (c_1, c_2, c_3)$.

Vediamo ora come applicare quanto visto nel caso gli autovalori siano complessi. Analogamente a quanto già visto, ponendoci nella base B' adattata alla decomposizione spettrale la matrice semisemplice si può scrivere in generale come:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_s \end{pmatrix} \quad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

dove supponiamo che lo spettro di A sia:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s\}$$

cioè abbia r autovalori reali e s autovalori complessi. In questo caso continua a valere il teorema di Jordan-Chevalley. Osserviamo che benchè S_1 non è più diagonalizzabile nel campo reale, vista la struttura diagonale a blocchi, lo è nel campo complesso e dunque è ancora detta semisemplice. Questa struttura ci permette di ricavare l'esponenziale della matrice S_1 ricordando che:

$$e^{tD_j} = e^{t\alpha_j I} e^{t\beta_j \sigma} = e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_j t) & \sin(\beta_j t) \\ -\sin(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{pmatrix}$$

la cui base, di questi autospazi bidimensionali, è data dalla parte reale e la parte immaginaria dei relativi autovettori. Costruiamo così la matrice P le cui colonne sono autovettori reali.

Esempio 3.12. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_4 \\ \dot{x}_4 = 2x_1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

di cui vogliamo trovare le soluzioni. La procedura è la solita:

1. si determina lo spettro $\sigma(A)$ di A ;
2. si studiano gli autospazi generalizzati che permettono di realizzare la scomposizione spettrale;

3. si scrive la base spettrale B' ;
4. si ricava la matrice P del cambiamento di base;
5. si calcola l'esponenziale di matrice e lo si applica al vettore x_0 .

Mettiamola in pratica, calcoliamo:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 \Rightarrow \sigma(A) = \{i, -i\}$$

quindi considerando \mathbb{C}^4 lo possiamo scomporre nella somma diretta dei due autospazi generalizzati $V(i)$ e $V(-i)$ associati agli autovalori e di dimensione 2 pari alla molteplicità algebrica degli autovalori. Questo significa che contengono un autovettore proprio, cioè gli elementi del nucleo di $A - \lambda I$, e un autovettore generalizzato di indice 2. Determiniamo precisamente questa scomposizione:

$$\mathbb{C}^4 = V(i) \oplus V(-i) = \langle u, v \rangle \oplus \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

dove in particolare:

$$V(i) = \langle u, v \rangle, \quad u = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $u \in \ker(A - I)$ e $v \in \ker(A - I)^2$. Consideriamo:

$$\{e_1 = \operatorname{Re}(u), e_2 = \operatorname{Im}(u), e_3 = \operatorname{Re}(v), e_4 = \operatorname{Im}(v)\}$$

base di \mathbb{C}^4 adattata alla scomposizione spettrale. Su questa base sappiamo a priori che la parte semisemplice della matrice A è diagonale a blocchi:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e possiamo inoltre sfruttarla per esplicitare la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_0 = P S_1 P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N_0 = A - S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo così trovato la scomposizione di Jordan - Chevalley nella base canonica. Calcoliamo dunque:

$$\begin{aligned} e^{tS_0} &= e^{tPS_1P^{-1}} = P e^{tS_1} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\sin(t) & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ed anche:

$$e^{tN_0} = I + N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che moltiplicate ed applicate a x_0 forniscono la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 [\cos(t) - t \sin(t)] - c_2 \sin(t) - c_4 \sin(t) \\ x_2(t) = c_1 t + t c_2 \sin(t) - c_3 \sin(t) \\ x_3(t) = c_1 [\sin(t) - t \cos(t)] + c_3 \cos(t) \\ x_4(t) = c_1 [-\sin(t) + t \cos(t)] - c_2 t \sin(t) + c_3 \sin(t) + c_4 \cos(t) \end{cases}$$

con $x_0 = (c_1, c_2, c_3, c_4)$.

Osserviamo che le soluzioni trovate nei due esempi fatti sono formate da funzioni trigonometriche, esponenziali e termini lineari. Questa proprietà vale in generale per sistemi dinamici lineari e ora lo dimostriamo. Per farlo utilizziamo la forma canonica di Jordan.

3.7.3 Forma canonica di Jordan

Consideriamo una matrice rappresentativa di un operatore definita su uno spazio vettoriale su un corpo K a cui supponiamo appartengano gli autovalori.

Teorema 3.8 (Fi-Jordan). *Consideriamo V spazio vettoriale e $f : V \rightarrow V$ endomorfismo con polinomio caratteristico:*

$$P_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \dots (\lambda_n - x)^{a_n}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalori dell'endomorfismo e $a_1 = \text{ma}(\lambda_1), \dots, a_m = \text{ma}(\lambda_m)$ loro molteplicità algebriche tali che $a_1 + \dots + a_m = n = \dim(V)$. Sotto queste ipotesi esiste una base di V , detta base di Jordan, in cui la matrice $M_B(f)$ rappresentatrice di f è a blocchi diagonali:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

dove J_1, \dots, J_m sono detti blocchi di Jordan e sono a loro volta costituiti da blocchi:

$$J_k = \begin{pmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_d \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

con $k = 1, \dots, m$. I blocchi H_1, \dots, H_d sono tanti quanti sono gli autovettori proprio corrispondenti all'autovalore λ_k , cioè $d = \dim(\ker(f - \lambda_k I))$ dimensione dell'autospazio proprio. Inoltre, in generale, essi hanno dimensione diversa l'uno dall'altro e vale:

$$\max_{i=1, \dots, d} \dim(H_i) = \rho_h \leq a_k$$

dove ρ_k indice di Riesz di λ_k .

Scrivendo quindi l'operatore f scomposto come somma di una parte semisemplice e una nilpotente:

$$f = S + N$$

è chiaro che la parte semisemplice è rappresentata dalla diagonale dei blocchi di Jordan mentre la parte nilpotente è costituita dagli 1 sotto la diagonale.

Osserviamo che se gli autovalori non sono nel campo K ma sono complessi allora la forma di Jordan dev'essere modificata. Vediamo questa modifica considerando un solo blocco di Jordan

$$\begin{pmatrix} D & & \\ I & D & \\ & \ddots & \ddots \\ & & I & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ci siamo posti nell'autospazio $V(\mu = \alpha + i\beta) \oplus V(\bar{\mu})$.

Applichiamo quindi il teorema di Jordan alla matrice $A \in \text{mat}(n \times n, \mathbb{R})$ del nostro sistema dinamico $\dot{x} = Ax$. Partiamo supponendo $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:

$$A = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è un blocco H corrispondente ad un unico autovalore λ . In questo caso conosciamo la soluzione:

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad x_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} c_{j-k}$$

la quale è unica. Se invece gli autovalori sono complessi, ovvero $\mu = \alpha + i\beta$, allora:

$$A = \begin{pmatrix} D & & \\ I & D & \\ & \ddots & \ddots \\ & & I & D \end{pmatrix}$$

e le componenti del vettore soluzione sono del tipo:

$$x_j(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} (a_{j-k} \cos(\beta t) - b_{j-k} \sin(\beta t))$$

che valgono per qualunque matrice A con autovalori complessi e sono state trovate sulla base di Jordan. Per tornare alle coordinate iniziali del sistema dinamico dobbiamo applicare la matrice P che essendo a coefficienti costanti porta a combinazioni lineari delle componenti della soluzione.

Teorema 3.9. *Ogni componente $x_j(t)$ del vettore delle soluzioni di un sistema dinamico lineare è una combinazione lineari di funzioni del tipo:*

$$t^k e^{t\alpha} \cos(\beta t), \quad t^l e^{t\alpha} \sin(\beta t)$$

dove $\alpha + i\beta$ con $\beta \geq 0$ autovalori e $k, l = 0, \dots, n-1$.

4 Sistemi dinamici non lineari in dimensione arbitraria

Consideriamo il sistema dinamico non lineare $\dot{x} = f(x)$ con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. In questo caso non esiste una strategia generale per la sua risoluzione ma abbiamo a disposizione una serie di tecniche che discutiamo nel seguito.

4.1 Studio degli equilibri e delle isocline (null - cline)

Ricordiamo che i punti di equilibrio sono le soluzioni x^* più semplici per cui $f(x^*) = 0$ mentre, prendendo un sistema dinamico scritto come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

le isocline sono le superficie definite da:

$$\dot{x}_i = 0 = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

per qualche i . Notiamo che $\dot{x}_i = 0$ determina una particolare soluzione per $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ che, in generale, non è anche soluzione del sistema dinamico perchè annulla solo una delle variabili.

Osserviamo inoltre che la superficie $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ divide lo spazio delle fasi in due regioni: una dove $\dot{x}_i > 0$ e l'altra con $\dot{x}_i < 0$. Quindi determinando tutte le isocline dividiamo lo spazio delle fasi in regioni dove sappiamo qualitativamente la direzione del flusso.

Esempio 4.1. Consideriamo un sistema non lineare in 2 dimensioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

con punto critico:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) = (-1, 0)$$

e studiamone le isocline. La prima isoclina è data da $\dot{y} = 0$ ed è la regione, identificata da $y = 0$, in cui il flusso è orizzontale nel ritratto in fase. In particolare, il flusso va verso destra per:

$$\dot{x}|_{y=0} = (x + e^{-y})|_{y=0} > 0$$

ovvero per $x > -1$. La seconda isoclina si ha per $\dot{x} = x + e^{-y} = 0$ che identifica una curva nel piano (x, y) . Lungo questa il flusso è verticale e punta verso il basso (l'alto) nel semipiano superiore (inferiore) dove $y > 0$ (< 0) e quindi $\dot{y} = -y < 0$ (> 0).

Mettendo tutte queste informazioni assieme otteniamo infine il ritratto in fase in figura 33 disegnato risolvendo il sistema numericamente. Nel grafico notiamo, in particolare, che le isocline discriminano regioni con derivate di segno diverso e quindi vettori con direzione diversa.

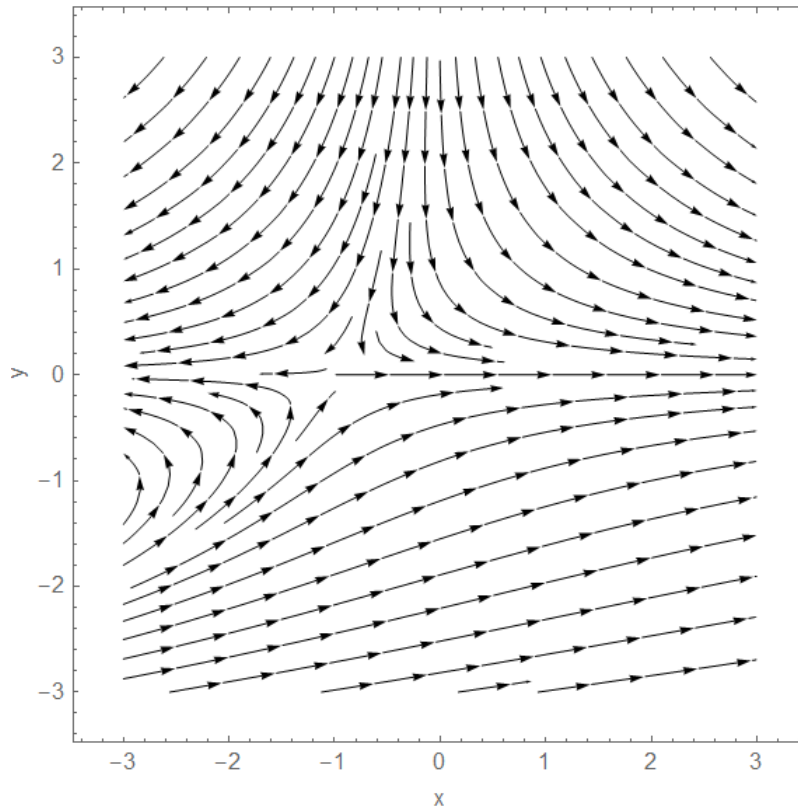


Figura 33: ritratto in fase del sistema non lineare

4.2 Linearizzazione

Come già visto, attraverso la linearizzazione possiamo studiare l'andamento locale vicino alla soluzioni di equilibrio. Supponiamo x^* sia un punto stazionario per f , cioè $f(x^*) = 0$. Se $z = x - x^*$ è sufficientemente piccolo allora, sviluppando in serie di Taylor, il sistema dinamico può essere scritto come:

$$\frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} (z + x^*) = \dot{z} = f(z + x^*) = f(x^*) + Df(x^*) z + O(|z|^2)$$

dove $f(x^*) = 0$ per definizione di punto d'equilibrio, $Df(x^*)$ è la matrice Jacobiana calcolata in x^* :

$$(Df(x^*))_{ij} = \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j}$$

con f_i i -esima equazione del sistema dinamico, e $O(|z|^2)$ è trascurabile quando z è sufficientemente piccolo. Consideriamo dunque il sistema linearizzato:

$$\dot{z} = Az$$

dove $A = Df(x^*)$.

Esempio 4.2. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}x - \frac{y}{2} - 2x^2 + \frac{y^2}{2} \\ \dot{y} = -x + 2y + 4xy \end{cases}$$

che ha punto critico $(0, 0)$. Linearizziamo quindi il sistema attorno a $(0, 0)$ calcolando:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 5/2 + 4x & -1/2 + y \\ -1 + 4y & 2 + 4x \end{pmatrix}$$

quindi il sistema linearizzato è:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, a questo punto, la struttura locale è determinata con le tecniche studiate, cioè calcolando autovalori ed autovettori della matrice e determinando le soluzioni.

In generale, la struttura locale è determinata dagli autovalori di $Df|_{x^*}$ che sono associati alla decomposizione di autospazi $E = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. Tale decomposizione infatti vale anche per sistemi non lineari linearizzati attorno al punto d'equilibrio.

Definizione 4.1 (Punto di equilibrio iperbolico). Un punto di equilibrio x^* si dice iperbolico se gli autovalori di $Df(x^*)$ hanno parte reale non nulla, cioè $E^c = \emptyset$.

Gli equilibri iperbolici si dicono:

- pozzi se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, cioè $E = E^s$;
- sorgenti se tutti gli autovalori hanno parte reale positiva, cioè $E = E^u$;
- selle altrimenti, ossia $E = E^s \oplus E^u$.

Addizionalmente parliamo di:

- fuoco se c'è un sottospazio con autovalori complessi con parte reale non nulla;
- centro se c'è un sottospazio con autovalori puramente immaginari.

Notiamo infine che in ogni caso è necessario stabilire quanto il sistema lineare è bene approssimato dal sistema linearizzato.

Esempio 4.3 (Competizione tra le specie). Prendiamo due specie che competono per le stesse risorse. Supponiamo ad esempio di avere dei conigli e delle pecore, coesistenti nello stesso ambiente, il cui numero di individui sia abbastanza grande da poter essere identificato dalle funzioni continue $x > 0$ e $y > 0$. Consideriamo dunque il modello:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - yx \end{cases}$$

dove in entrambe le equazioni i primi due termini descrivono un andamento logistico, quindi una popolazione in assenza dell'altra tende alla sua capacità portante, mentre l'ultimo termine, quello di accoppiamento, riduce la crescita di entrambe le popolazioni ed è nullo solamente quando una delle due popolazioni è inesistente. Inoltre notiamo di aver assunto che quest'ultimo termine sia

maggiormente penalizzante per la specie identificata da x .
Troviamo i punti critici risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x(3 - x - 2y) = 0 \\ y(2 - y - x) = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$ e $(1, 1)$. Per classificarli ricaviamo la matrice Jacobiana:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

che calcoliamo nei 4 punti critici:

- in $(0, 0)$ abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con autovalori 3 e 2 reali e positivi, dunque il punto è una sorgente. Le traiettorie quindi escono dall'origine e sono parallele all'autovettore $v = (0, 1)$ associato all'autovalore minore pari a 2;

- in $(0, 2)$ abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

con autovalori -1 e -2 reali e negativi, associati rispettivamente agli autovettori $v = (1, -2)$ e $u = (0, 1)$, perciò il punto è un pozzo;

- in $(3, 0)$ abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con autovalori -3 e -1 reali e negativi, associati rispettivamente agli autovettori $v = (1, 0)$ e $u = (-2, 1)$, perciò il punto è un pozzo;

- in $(1, 1)$ abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con autovalori $1 \pm \sqrt{2}$, infatti $\det(A) = -1$ e $\text{tr}(A) = -2$, reali e uno positivo mentre l'altro negativo, quindi il punto è una sella.

Unendo tutte queste informazioni si ottiene il grafico riportato in 34.

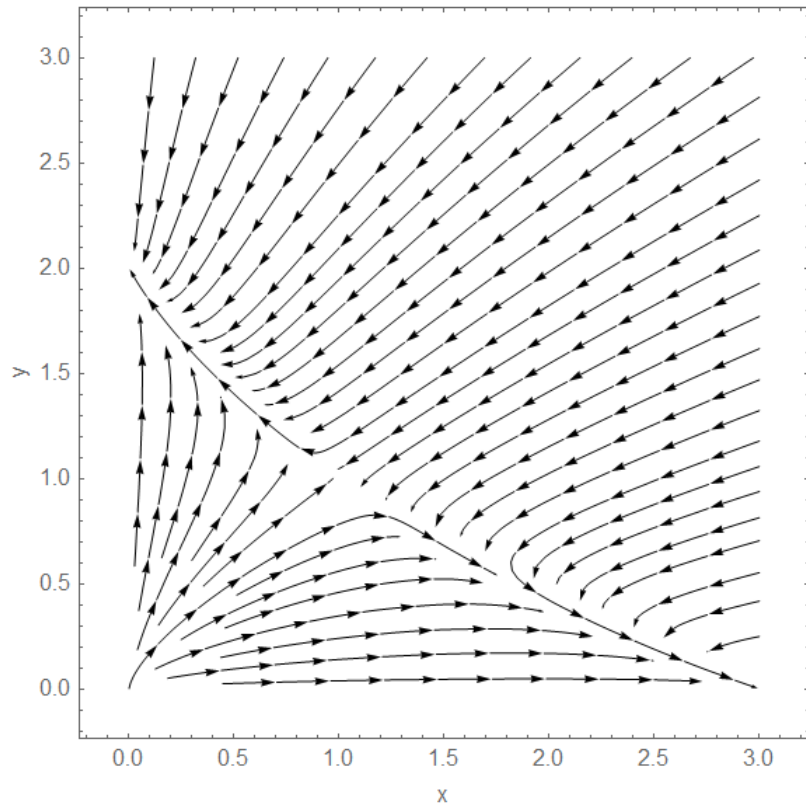


Figura 34: ritratto in fase del modello di competizione tra specie

In generale dunque la competizione porta una delle due specie all'estinzione, cioè a $y = 0$ o a $x = 0$. Tuttavia, partendo dalle opportune condizioni iniziali, esiste una particolare soluzione che porta alla coesistenza delle due nel punto di equilibrio $(1, 1)$.

Osserviamo infine essere presenti dei cosiddetti bacini di attrazione per i punti critici $(0, 2)$ e $(3, 0)$. Considerando un punto critico attrattivo x^* il suo bacino di attrazione è l'insieme delle condizioni iniziali x_0 tali che $x(t) \rightarrow x^*$ per $t \rightarrow \infty$. In particolare, il bordo di un bacino di attrazione è detto varietà stabile. In quest'esempio le due traiettorie che compongono la varietà stabile vengono anche dette separatrici perché separano i diversi tipi di andamento.

4.3 Stabilità

La stabilità è una misura di quanto le orbite che partono vicine rimangono vicine. Diamo ora qualche definizione per esprimere questo concetto in modo meno qualitativo.

Definizione 4.2 (Stabilità alla Ljapunov). Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice stabile alla Ljapunov se per ogni intorno U di x^* esiste un intorno $V \subset U$ tale che ogni soluzione:

$$x(t) = \varphi_t(x_0)$$

che inizia in V , cioè con dato iniziale $x_0 \in V$, rimane dentro U per ogni istante temporale.

A parole, la definizione di stabilità ci dice che un punto è stabile se traiettorie con dato iniziale vicino al punto fisso rimangono in sua prossimità.

Definizione 4.3 (Punto di equilibrio instabile). Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice instabile se non è stabile.

Definizione 4.4 (Punto di equilibrio asintoticamente stabile). Un punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice asintoticamente stabile se è stabile e, in aggiunta, possiamo scegliere V in modo tale che per ogni dato iniziale in V vale che:

$$|x(t) - x^*| \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Ad esempio un centro, dato da un sistema dinamico $\dot{x} = Ax$ con autovalori di A immaginari, ha traiettorie stabili secondo Ljapunov ma non asintoticamente.

Teorema 4.1 (La stabilità lineare implica quella asintotica). Sia x^* punto di equilibrio il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ e siano tutti gli autovalori di $Df(x^*)$ aventi parte reale negativa. Sotto queste ipotesi x^* è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Segue dal teorema di Hartman - Grobman che vedremo in seguito. \square

Per la determinazione della stabilità cerchiamo qualche strumento più pratico introducendo il criterio di Ljapunov.

Definizione 4.5 (Funzione di Ljapunov). Sia x^* punto di equilibrio di un flusso φ_t e $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. L è detta funzione di Ljapunov in senso forte (debole) per x^* se $L(x^*) = 0$ e se esiste un intorno aperto U di x^* tale che per ogni $x \in U \setminus x^*$ valgono:

1. $L(x) > 0$;
2. $L(\varphi_t(x)) < L(x)$ ($\leq L(x)$) per $t > 0$.

Notiamo che se L di classe C^1 , condizione che assumeremo sempre vera nel seguito, la seconda condizione segue dalla richiesta:

$$\frac{dL}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(\varphi_t(x)) - L(x)}{t} < 0 \left(\frac{dL}{dt} \leq 0 \right)$$

equivalente a:

$$\frac{d}{dt}L = \nabla L(x) \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$$

la quale dice che, volendo soddisfare il punto 2., il gradiente di L deve puntare in direzione opposta al campo vettoriale f .

Teorema 4.2 (Criterio di Ljapunov). Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t . Se è possibile trovare una funzione L di Ljapunov debole (forte) per x^* allora x^* è (asintoticamente) stabile.

Dimostrazione. Prendiamo $\delta > 0$ tale che la palla $B_\delta(x^*)$ centrata in x^* e di raggio δ sia contenuta in U . Consideriamo la sfera $\partial B_\delta(x^*)$ e chiamiamo m il valore minimo di L su questa sfera. Sotto queste ipotesi se $L > 0$ allora $m > 0$. Poniamo dunque:

$$V = \{x \in B_\delta(x^*) | L(x) < m\}$$

e siccome per ipotesi la funzione L di Ljapunov debole non aumenta lungo le orbite, cioè $L(\varphi_t(x)) < m$, allora nessuna soluzione che inizia dentro V può arrivare al bordo $\partial B_\delta(x^*)$ in cui il valore assunto da L è pari a m . Quindi, a parole, ogni soluzione che inizia in V non lascia mai la palla $B_\delta(x^*)$: abbiamo così dimostrato che x^* è stabile.

Per dimostrare la stabilità asintotica assumiamo L forte, cioè strettamente decrescente lungo le orbite in $U \setminus x^*$. Prendiamo una soluzione $x(t)$ che inizi in $V \setminus x^*$ e supponiamo che $x(t_n) \rightarrow z_0$, che esiste siccome la palla è compatta, per una sequenza $t_n \rightarrow \infty$. In particolare, siccome L è continua:

$$L(\varphi_{t_n}(x)) \rightarrow L(z_0)$$

per $t_n \rightarrow \infty$. Inoltre dal fatto che L sia decrescente lungo le orbite discende che $L(\varphi_{t_n}(x)) > L(z_0)$ per continuità.

A questo punto supponiamo per assurdo che $z_0 \neq x^*$ e troviamo una contraddizione. Prendiamo $z(t)$ la soluzione con dato iniziale z_0 . Allora, per ogni $s > 0$, $L(z(s)) < L(z_0)$ in quanto z_0 non è l'equilibrio. Per continuità quanto appena detto vale per ogni soluzione $y(s)$ che inizia sufficientemente vicina a z_0 , cioè $L(y(s)) < L(z_0)$. Scegliamo dunque un dato iniziale $y(0) = x(t_n)$ in quanto sappiamo che per n abbastanza grande $x(t_n)$ è arbitrariamente vicina a z_0 , infatti $x(t_n) \rightarrow z_0$ per $t_n \rightarrow \infty$. Così abbiamo trovato:

$$L(\varphi_{t_n}(x)) < L(z_0)$$

cioè la contraddizione. Quindi $x^* = z_0$, ovvero x^* è l'unico punto limite possibile e quindi è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. \square

Purtroppo la dimostrazione di questo teorema non è costruttiva, ossia non fornisce un suggerimento su come ottenere la funzione di Ljapunov. Non esiste infatti una tecnica generale per assolvere a tale scopo.

Esempio 4.4 (Sistema di Lorenz). Il sistema di Lorenz è un modello semplificato per previsioni atmosferiche. Senza guardarne l'interpretazione fisica descriviamo alcune proprietà d'esso. Le equazioni differenziali che definiscono questo modello sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

con σ, r, b parametri positivi. Notiamo che $x^* = (0, 0, 0)$ è un punto di equilibrio. Per determinare informazioni sulla struttura locale attorno a questo calcoliamo:

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

che, in particolare, è a blocchi. Osserviamo così che la direzione z dello spazio delle fasi è autovettore con autovalore $-b$ e quindi, lungo z , l'origine è un punto d'equilibrio attrattivo per $b > 0$. Per i restanti 2 autovalori dobbiamo invece studiare il primo blocco della matrice risolvendo:

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0$$

da cui otteniamo che, siccome $\sigma > 0$ per assunzione, nel piano (x, y) il punto x^* è attrattivo per $r < 1$ ($1 - r > 0$) o una sella per $r > 1$. Ricapitolando, in 3 dimensioni l'origine è asintoticamente stabile per $r < 1$ e instabile per $r > 1$. Notiamo infine che l'analisi lineare non fornisce informazioni nel caso $r = 1$.

Costruiamo dunque una funzione di Ljapunov. Prendiamo:

$$L = A x^2 + B y^2 + C z^2$$

con $L(x^*)$. Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 2 A \dot{x} x + 2 B \dot{y} y + 2 C \dot{z} z = \\ &= 2 [A \sigma (y - x) x + B (r x - y - x z) y + C (x y - b z) z] \\ &= 2 [A \sigma y x - A \sigma x^2 + B r x y - B y^2 - (B - C) r x y - C b z^2] \end{aligned}$$

che ponendo $C = B$ si semplifica:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 2 (A \sigma y x - A \sigma x^2 + B r x y - B y^2 - B b z^2) = \\ &= 2 [(A \sigma + 2 B r) x y - 2 A \sigma x^2 - B y^2 - B b z^2] \end{aligned}$$

e introducendo:

$$A = \frac{1}{2\sigma}, \quad B = \frac{1}{2}$$

completiamo il quadrato ottenendo infine l'espressione:

$$\frac{dL}{dt} = (1 + r) x y - (x^2 + y^2 + b z^2) = - \left(x - \frac{r+1}{2} y \right)^2 - \left(1 - \frac{(r+1)^2}{4} \right) y^2 - b z^2$$

che dev'essere negativa perchè vogliamo L sia una funzione di Ljapunov. Osserviamo che il primo e l'ultimo termine sono sempre minori di zero, in particolare perchè $b > 0$, mentre il secondo termine è negativo solamente per $r < 1$. Dunque per $r < 1$ abbiamo che:

$$\frac{dL}{dt} < 0$$

soddisfando così tutte le ipotesi del criterio di Ljapunov.

Ricapitolando, la funzione di Ljapunov forte ottenuta è:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma} + y^2 + z^2 \right)$$

e l'origine è asintoticamente stabile anche nella teoria non lineare.

Notiamo infine che per $r = 1$ si ottiene:

$$\frac{dL}{dt} \Big|_Z = 0, \quad Z = \{(x, y, z) : x = y, z = 0\}$$

cioè la funzione di Ljapunov scritta sopra non è più forte. Nonostante questo si può concludere che l'origine è asintoticamente stabile per $r = 1$ perchè Z non è invariante, nel senso che:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_Z \neq 0$$

infatti ricordiamo che invariante significa che l'azione del flusso sull'insieme rimane nell'insieme stesso mentre quello lungo la direzione z non resta in Z . Questo è un caso particolare del seguente teorema.

Teorema 4.3 (Principio di LaSalle). *Sia x^* un punto di equilibrio per φ_t e L una funzione di Ljapunov debole, definita su intorno U di x^* . Assumiamo inoltre che U sia un intorno compatto, cioè i limiti esistono, e invariante in avanti, ossia $\varphi_t(U) \subset U$ per ogni $t \geq 0$. Sia:*

$$Z = \left\{ x \in U \left| \frac{dL}{dt} = 0 \right. \right\}$$

l'insieme dove L non decresce. Se $\{x^\}$ è il sottoinsieme invariante in avanti più grande di Z allora è asintoticamente stabile e attrae tutti i punti di U .*

Dimostrazione. Diamo un cenno della dimostrazione: il principio segue dalla dimostrazione del teorema di Ljapunov. In particolare dalla sua seconda parte ma riguardando l'argomento con una funzione di Ljapunov debole, cioè sostituendo alle disuguaglianze strette quelle non strette. Quindi abbiamo che se $x \in U$ e $x(t) \rightarrow z$, con $z \in U$ perchè U è invariante in avanti, allora vale:

$$L(\varphi_s(z)) = L(z)$$

per ogni $s > 0$. Perciò L è costante sul flusso e quindi $\varphi_s(z) \in Z$. Da questo segue che l'orbita di z dev'essere un sottoinsieme invariante in avanti di Z . Allora per ipotesi si ha $z = x^*$, cioè il flusso tende al punto di equilibrio che dunque è asintoticamente stabile. \square

4.3.1 Insiemi limite

Consideriamo un'orbita:

$$\Gamma_x = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$$

definita attraverso un flusso associato ad un sistema dinamico autonomo $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Possiamo avere un'orbita Γ_x^+ (Γ_x^-) in avanti (all'indietro) se restringiamo t ad essere positivo (negativo). Vogliamo caratterizzare le orbite attraverso il loro andamento asintotico per $t \rightarrow \infty$. Può infatti succedere che il flusso tenda ad un certo limite. Ricordiamo che un punto limite y è definito da $\varphi_t(x) \rightarrow y$ se esiste una sequenza di istanti $t_1 < \dots < t_k$, che parametrizza l'andamento del flusso al variare di t , tale che $t_k \rightarrow \infty$ per $k \rightarrow \infty$.

Definizione 4.6 (Insiemi ω -limite e α -limite). L'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^+ è detto insieme ω -limite $\omega(x)$ e si denota anche con $\omega(\Gamma_x^+)$. Similmente l'insieme α -limite è l'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^- .

Quindi considerando traiettorie in avanti (all'indietro) prima o poi arriveremo ad un punto appartenente all'insieme $\omega(x)$ ($\alpha(x)$). Notiamo che un punto di equilibrio x^* asintoticamente stabile è un esempio intuitivo di insieme limite. Un esempio meno banale sono i cicli limite, ovvero sia un ciclo a cui le traiettorie tendono spirallengandoci intorno.

Definizione 4.7 (Ciclo limite). Un ciclo limite è un'orbita periodica γ che costituisce l'insieme ω -limite, o α -limite, di un punto $x \notin \gamma$.

A parole, un ciclo limite è una curva chiusa invariante che ha la proprietà che le traiettorie vicine vi spiraleggiano verso entrandoci oppure allontanandosi. In particolare, si può dimostrare che è un insieme chiuso e invariante, nel senso che $\varphi_t(\gamma) = \gamma$. Quest'ultima è una proprietà generale degli insiemi ω -limite.

Proposizione 4.1. *L'insieme ω -limite è un insieme invariante.*

Dimostrazione. Se $y \in \omega(x)$ allora esiste una certa sequenza $\{t_k\}_k$ tale che $\varphi_{t_k}(x) \rightarrow y$. Per continuità, fissato $s \in \mathbb{R}$, discende che $\varphi_{s+t_k}(x) \rightarrow \varphi_s(\varphi_{t_k}(x)) \rightarrow \varphi_s(y)$. Questo significa che $\varphi_s(y) \in \omega(x)$. \square

In modo simile, parliamo di attrattore per indicare un insieme invariante verso il quale si muovono tutte le traiettorie. Per rendere questo concetto più preciso innanzitutto estendiamo il concetto di stabilità ad un intero insieme invariante.

Definizione 4.8 (Insieme invariante stabile). Un insieme invariante Λ è stabile se per ogni intorno U di Λ possiamo trovare un sottoinsieme $V \subset U$ tale che tutte le traiettorie che partono da V restano in U per $t > 0$.

Allo stesso modo possiamo definire l'insieme Λ come asintoticamente stabile: dev'essere stabile e le traiettorie devono entrarci per $t \rightarrow \infty$, cioè la distanza tra $\varphi_t(x)$ e Λ deve tendere a zero per $t \rightarrow \infty$.

Definizione 4.9 (Regione di intrappolamento). Un insieme N viene detto regione di intrappolamento (trapping region) se è compatto e $\varphi_t(N) \subset \text{int}(N)$, dove $\text{int}(N)$ denota l'interno dell'insieme N , per $t > 0$.

Intuitivamente dunque la regione di intrappolamento è una regione invariante in avanti con la proprietà che ogni traiettoria che inizia in essa si sposta al suo interno e vi rimane. Benchè questa sia una definizione astratta è semplice costruire una regione di intrappolamento: è sufficiente cercare una certa regione compatta avente la proprietà che il campo vettoriale punti al suo interno per ogni punto del bordo.

Definizione 4.10 (Insieme attrattivo). Un insieme Λ si dice attrattivo se c'è una regione di intrappolamento $N \supset \Lambda$ tale che $\Lambda = \bigcap_{t>0} \varphi_t(N)$.

A parole questo vuol dire che un insieme attrattivo è l'insieme invariante più grande all'interno di una regione di intrappolamento. Infatti, considerando la collezione $\{\varphi_t(N) : t > 0\}$ di flussi che sono in generale insieme chiusi giacenti l'uno dentro l'altro e mappano in avanti la regione di intrappolamento, se vogliamo che tutti i flussi entrino nella regione di intrappolamento dobbiamo prendere l'intersezione d'essi che è chiusa e in generale non vuota.

Dunque un insieme attrattivo è sempre asintoticamente stabile perchè, per definizione, ogni punto nella regione di intrappolamento rimane in essa e, in particolare, tende all'insieme attrattivo.

Definizione 4.11 (Bacino di attrazione). Si definisce bacino di attrazione l'insieme $W^s(\Lambda)$ tale che per ogni punto $x \in W^s(\Lambda)$ il flusso $\varphi_t(x)$ ha limite per $t \rightarrow \infty$ un punto dell'insieme attrattivo Λ .

Ovverosia il bacino di attrazione è l'insieme di tutti i punti che vengono attratti dall'insieme attrattivo ed è dato dall'unione dei flussi sulla regione di intrappolamento.

Definizione 4.12 (Attrattore). Un insieme Λ si dice attrattore se è un insieme attrattivo ed esiste un punto x tale che $\Lambda = \omega(x)$.

Secondo questa definizione un attrattore è una componente fondamentale di un insieme attrattivo, cioè una componente irriducibile: solitamente un punto o orbite semplici. Tuttavia si possono costruire degli attrattori con geometria più complicata detti attrattori strani.

4.4 Sistemi gradiente

Prendiamo una funzione $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ intorno aperto e consideriamo il suo gradiente:

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

definito come il vettore delle derivate parziali rispetto alle coordinate spaziali. Un sistema dinamico si dice di tipo gradiente se ha la forma:

$$\dot{x} = -\nabla V$$

dove il segno negativo è convenzionale. In particolare, il gradiente è legato al differenziale di V in funzione di x applicato al vettore y dalla relazione:

$$dV_{(x)}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = \nabla V \cdot y$$

che sfruttiamo per calcolare la derivata rispetto al tempo di V lungo il flusso:

$$\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = dV(\varphi^t(x)) \frac{d}{dt} \varphi^t(x)$$

da cui, siccome $\dot{x} = -\nabla V$, otteniamo:

$$\frac{d}{dt} V(\varphi^t(x)) = -|\nabla V|^2$$

più esplicitamente questo si può vedere attraverso le uguaglianze:

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = -|\nabla V|^2$$

dunque la funzione V decresce lungo il flusso perchè la sua derivata temporale è negativa. Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

Teorema 4.4. *Vale sempre che $\dot{V} \leq 0$ lungo il flusso e, in particolare, $\dot{V}(x^*) = 0$ se e solo se x^* è un punto di equilibrio.*

Ne segue che $V(x)$, o eventualmente $V(x) - V(x^*)$, è una funzione di Ljapunov e quindi un minimo isolato x^* della funzione V , chiamata potenziale, è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Osservazione. Siccome V decresce strettamente un sistema gradiente non ammette soluzioni periodiche. Dunque, in particolare, non sono presenti insiemi cicli limite.

Le traiettorie dei sistemi gradiente possono essere comprese da un punto di vista geometrico studiando le superfici di livello. Chiamiamo $N_c = \{x : V(x) = c\}$. Un punto $x \in N_c$ si dice regolare se $\nabla V(x) \neq 0$ e segue dal teorema della funzione implicita che le superfici di livello vicino a punti regolari sono grafici di una funzione. Consideriamo dunque un punto regolare x e un vettore ξ tangente all'insieme di livello N_c in x . Allora possiamo sempre trovare una curva $\gamma(t)$ in N_c tale che $\gamma'(0) = \xi$. Inoltre, siccome V è costante in N_c il suo differenziale si annulla:

$$dV_{(x)}(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V \cdot \gamma(t) = 0$$

in formule possiamo quindi dire che lo spazio tangente è il kernel del differenziale:

$$T_x(N_c) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid dV_{(x)}(\xi) = 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V \cdot \xi = 0\}$$

perciò il gradiente ∇V è ortogonale alle superfici di livello.

Questo fornisce un'interpretazione geometrica dei sistemi gradiente: per definizione le orbite del sistema dinamico $\dot{x} = -\nabla V$ sono tangenti a $-\nabla V$. Dunque le traiettorie attraversano in modo ortogonale le superfici di livello, utilizzando implicitamente l'assunzione che i punti su cui stiamo facendo questa valutazione siano regolari.

Esempio 4.5. Prendiamo $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

che definisce il sistema gradiente $\dot{c} = -\nabla V$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

con equilibri nei punti $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1/2, 0)$ e $x_3 = (1, 0)$. Possiamo linearizzare attorno a questi punti calcolando:

$$Df = \begin{pmatrix} -2(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$Df|_{x_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Df|_{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Df|_{x_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori suggeriscono che x_1 e x_3 sono pozzi, quindi minimi di V , mentre x_2 è un punto sella. Disegnando $V(x, y)$ in 3 dimensioni otteniamo una figura che possiamo proiettare sul piano (x, y) per trovare le superfici di livello da cui costruire il flusso prendendo traiettorie ortogonali ad esse.

Proposizione 4.2. *Se z è un punto α -limite o ω -limite di una traiettoria di un flusso di un sistema di tipo gradiente allora z è un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Supponiamo z sia un ω -limite. Come nella dimostrazione del teorema di LaSalle, dimostriamo che V è costante lungo la soluzione passante per z . Siccome $V(x(t))$ decresce si ha:

$$V(x(t)) \rightarrow \inf_{t \geq 0} V(x(t)) = \alpha$$

per $t \rightarrow \infty$. Inoltre, se $y \in \omega(x)$ allora esiste una sequenza $t_k \rightarrow \infty$ tale che $x(t_k) \rightarrow y$ per definizione di ω -limite. Per continuità di V allora:

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} V(x(t_k)) = V(y) = \alpha$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè V decresce. Questo è vero per ogni $y \in \omega(x)$. Quindi, per ogni $y \in \omega(x)$, vale che $V(y) = \alpha$ e, siccome l'insieme ω è invariante lungo il flusso allora, $V(y(t)) = V(y) = \alpha$. Questo dimostra che V è costante lungo la soluzione e dunque dev'essere che $\dot{V}(y) = 0$ per ogni $y \in \omega(x)$ che perciò è un punto di equilibrio. \square

Quindi, in particolare, se un sistema gradiente ha solo punti di equilibrio isolati allora ogni soluzione o tende ad infinito oppure tende ad un punto di equilibrio.

Proposizione 4.3. *Un sistema gradiente linearizzato intorno ad un punto di equilibrio ha solo autovalori reali. Ciò permette di conoscere a priori la struttura locale vicino ad un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che per linearizzare bisogna prendere il gradiente del campo vettoriale, dunque considerare:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$$

che è l'elemento della matrice Hessiana la quale, in particolare, è simmetrica e quindi ha solo autovalori reali. \square

4.5 Sistemi Hamiltoniani

Consideriamo un sistema dinamico n -dimensionale:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$$

e prendiamo una certa quantità $I(x)$ definita attraverso i dati del sistema dinamico. Chiamiamo $I(x)$ quantità conservata lungo il flusso se vale la seguente identità:

$$0 = \frac{d}{dt}I(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla I \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla I \cdot f$$

cioè, a parole, il gradiente di una quantità conservata è ortogonale al campo vettoriale. Questo significa che le traiettorie del flusso giacciono sugli insiemi di livello $I(x(t)) = \text{costante}$.

Esempio 4.6 (Modello preda - predatore di Lotka - Volterra). Questo modello è caratterizzato dalle seguenti due equazioni differenziali accoppiate:

$$\begin{cases} u'(t) = r u(t) - a u(t) v(t) = [r - a v(t)] u(t) \\ v'(t) = -\mu v(t) + d u(t) v(t) = [-\mu + d u(t)] v(t) \end{cases}$$

con $r, a, \mu, d > 0$. Le funzioni u e v determinano il numero rispettivamente di prede e predatori. Osserviamo che se i termini non lineari, cioè quelli di contatto tra le due specie, sono nulli si ottengono due equazioni differenziali disaccoppiate risolte da esponenziali. Ossia la popolazione di prede (predatori) cresce (decresce) esponenzialmente in assenza dell'altra.

I punti d'equilibrio del sistema sono $(u^*, v^*) = (0, 0)$, cioè entrambe le specie sono estinte, e:

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{\mu}{s}, \frac{r}{a} \right)$$

siccome il primo caso non è interessante nel seguito assumeremo u e v strettamente positive. La quantità:

$$H(u, v) = d u(t) - \mu \log(u(t)) + a v(t) - r \log v(t)$$

si conserva, cioè la sua derivata rispetto al tempo è nulla:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(u, v) &= u'(t) \left[d - \frac{\mu}{u(t)} \right] - v'(t) \left[a - \frac{r}{v(t)} \right] = \\ &= [r - a v(t)] u(t) \left[d - \frac{\mu}{u(t)} \right] - [-\mu + d u(t)] v(t) \left[a - \frac{r}{v(t)} \right] = 0\end{aligned}$$

questo implica che le soluzioni giacciono sulle curve $H(u, v) = \text{costante}$. In particolare, l'insieme:

$$\left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid H(u, v) = k > H\left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a}\right) \right\}$$

è una curva compatta e chiusa, non necessariamente circolare, che circonda il punto di equilibrio. Si verifica infatti abbastanza facilmente che tale curva è periodica di periodo calcolabile. Tale risultato ci dice che il sistema di prede e predatori lontano dai punti di equilibrio è costituito da soluzioni oscillanti che oscillano con stessa frequenza ma leggermente sfasati.

Riscriviamo ora il sistema, ponendo $p = \log(u)$ e $q = \log(v)$. In questo modo la funzione H diventa:

$$H(u, v) = h(p, q) = d e^q - \mu p + a e^p - r q$$

e il sistema dinamico si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \log(v) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = (-\mu + d u) = \frac{\partial h}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \log(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = (r - a v) = -\frac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$

che viene chiamato sistema Hamiltoniano. Notiamo per concludere che la funzione h non è in alcun senso l'energia associata al sistema in quest'esempio e determina solamente la struttura delle orbite.

Esercizio 4.1. Aggiungere per la popolazione di prede un termine di crescita di tipo logistico:

$$\begin{cases} u'(t) = (r - b u) u(t) - a u(t) v(t) \\ v'(t) = -\mu v(t) + d u(t) v(t) \end{cases}$$

in modo che in assenza di predatori la popolazione di prede non cresca indefinitamente. Studiare del sistema così definito:

1. i punti di equilibrio;
2. le traiettorie isocline;
3. il ritratto in fase.

In generale, un sistema è Hamiltoniano se può essere scritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

dove, in meccanica, le variabili q_i e p_i vengono chiamate rispettivamente coordinate libere e momenti coniugati e l'Hamiltoniana funzione d'esse ha la forma di un termine cinetico sommato ad un'energia potenziale:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

e, per sistemi olonomi e conservativi, ha interpretazione d'energia totale. In particolare, si può verificare che è una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt} H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0$$

e quindi le orbite del sistema dinamico giacciono sulle superfici $H = \text{costante}$. Tuttavia, come nell'esempio, ciò per classi più generali di sistemi dinamici che non necessariamente legati alla meccanica. Questi sistemi dinamici hanno una certa struttura determinata dalle parentesi di Poisson:

$$\{F, G\} = \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla G = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

dove J è una matrice a blocchi:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

con I matrice identità $n \times n$. Ponendo $z = (p, q)$ le equazioni di Hamilton diventano quindi:

$$\dot{z} = \{z, H\} = J \cdot \nabla H$$

che si verifica immediatamente dalla definizione delle parentesi di Poisson. In particolare questo implica che i punti critici siano dati da $\nabla H = 0$ e che il flusso associato ad un sistema dinamico Hamiltoniano preserva il volume nello spazio delle fasi, proprietà enunciata dal teorema di Liouville che enunceremo e dimostreremo dopo la seguente osservazione.

Osservazione. Per ogni funzione $F = F(z(t), t)$ si ha:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

perciò se H è indipendente dal tempo in maniera esplicita, cioè $H = H(p(t), q(t))$, allora si conserva lungo le traiettorie, che quindi giacciono sui suoi insiemi di livello, infatti:

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T \cdot J \cdot \nabla H = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che J è anti-simmetrica.

A questo punto introduciamo il teorema di Liouville. Prendiamo un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, per generalità, e denotiamone con φ_t il flusso. Consideriamo $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio al tempo $t = 0$: al tempo t esso è spostato in un certo dominio D_t definito attraverso l'azione del flusso su ogni suo punto, cioè $D_t = \varphi_t(D_0)$. Denotiamo con $\text{vol}(D_t)$ il suo volume misurato con una certa misura, ad esempio quella euclidea.

Lemma 4.1. *Utilizzando la notazione appena introdotta, vale che:*

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(D_t)|_{t=0} = \int_{D_0} dx \nabla \cdot f$$

dove:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

divergenza del campo vettoriale.

Dimostrazione. Usiamo lo Jacobiano della trasformazione per scrivere che:

$$\text{vol}(D_t) = \int_{D_t} dx = \int_{D_0} dx \det \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right)$$

e espandiamo in serie di Taylor:

$$\varphi_t(x) = x + f(x)t + O(t^2) \Rightarrow \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} = I + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2)$$

dove abbiamo implicitamente supposto di avere funzioni con proprietà di continuità e differenziabilità opportune per poter sviluppare. Espandiamo ora anche il determinante dello Jacobiano. A questo scopo utilizziamo la formula:

$$\det(I + A\varepsilon) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \text{tr}(A) + O(\varepsilon^2)$$

quindi:

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right) = \det \left(I + \frac{\partial f}{\partial x} t \right) + O(t^2) = 1 + \text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) t + O(t^2)$$

grazie alla quale otteniamo:

$$\text{vol}(D_t) = \int_{D_0} dx \det \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right) = \text{vol}(D_0) + \int_{D_0} dx t \nabla \cdot f + O(t^2)$$

da cui segue l'enunciato. □

Teorema 4.5 (Teorema di Liouville). *Se $\nabla \cdot f = 0$ allora per ogni D_0 vale:*

$$\text{vol}(D_t) = \text{vol}(D_0)$$

cioè il flusso preserva il volume nello spazio delle fasi.

Osserviamo che per un sistema Hamiltoniano, assumendo che l'Hamiltoniana sia opportunamente derivabile il flusso del campo vettoriale è:

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

e perciò si verifica che:

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

per la simmetria delle derivate parziali. Quindi, in particolare, per sistemi Hamiltoniani il flusso preserva il volume nello spazio della fasi.

4.6 Equivalenza tra sistemi dinamici non lineari

Ci poniamo un problema più astratto e generale: come classificare i sistemi dinamici non lineari. Premettiamo che non esiste una classificazione completa e noi non vedremo nemmeno quella presente. Tuttavia, approcciandosi alla questione, sorge una questione interessante: quando due sistemi dinamici descrivono lo stesso fenomeno naturale?

Questa domanda non ha una vera e propria risposta perché ci stiamo scontrando con il problema concettuale che consiste nel definire cosa significa descrivere lo stesso fenomeno. Introduciamo dunque alcuni criteri che ci permettono di dire quando due sistemi dinamici sono equivalenti o meno.

Ovviamente c'è un'equivalenza ovvia: prendendo un sistema e ridefinendone le variabili, in modo non singolare, il sistema che si ottiene è lo stesso dal quale si è partiti. Ci sono però anche casi più interessanti, ad esempio quale sia la relazione tra il sistema linearizzato vicino al punto di equilibrio e il sistema lineare senza correzioni di ordine elevato all'equilibrio.

Vedremo che la definizione di equivalenza può variare in base ai casi.

4.6.1 Coniugazione topologica

Cominciamo subito con una definizione.

Definizione 4.13 (Flussi topologicamente coniugati). Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, sono topologicamente coniugati se esiste un omeomorfismo, cioè una funzione continua e con inversa continua, $h : A \rightarrow B$ tale che:

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x))$$

per ogni $x \in A$ e $t \in \mathbb{R}$, parametro temporale. Ovverosia se il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_t & \\ A & \rightarrow & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \rightarrow & B \\ & \psi_t & \end{array}$$

commuta, cioè l'applicazione di $h \circ \varphi_t$ è equivalente all'applicazione di $\psi_t \circ h$.

A parole diciamo che due sistemi sono topologicamente coniugati se possiamo passare da uno all'altro. In particolare, in due sistemi coniugati topologicamente c'è corrispondenza tra le traiettorie, ovverosia h mappa le traiettorie di un sistema dinamico nell'altro. Prendiamo ad esempio un punto fisso x^* per φ_t :

$$\varphi_t(x^*) = x^* \Rightarrow \psi_t(h(x^*)) = h(\varphi_t(x^*)) = h(x^*)$$

ovvero $h(x^*)$ è un punto fisso di ψ_t . Dunque l'omeomorfismo h porta punti fissi in punti fissi. Ragionamenti analoghi a questo valgono per tutte le orbite.

Notiamo che questa definizione implica, implicitamente, che la parametrizzazione temporale dei due flussi sia la stessa, cioè t è lo stesso parametro in entrambe. Ciò non è necessario e possiamo dare una definizione più debole che richieda solamente che la direzione del tempo sia la stessa.

Definizione 4.14 (Flussi topologicamente equivalenti). Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, sono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo $h : A \rightarrow B$ e una mappa $\tau : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e crescente in t tali che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
& \varphi_{\tau(x,t)} & \\
A & \longrightarrow & A \\
h \downarrow & & \downarrow h \\
B & \longrightarrow & B \\
& \psi_t &
\end{array}$$

commuta, cioè $h(\varphi_{\tau(x,t)}(x)) = \psi_t(h(x))$.

Teorema 4.6. *Due flussi φ e ψ in \mathbb{R} , associati dunque a sistemi dinamici unidimensionali, sono topologicamente equivalenti se e solo se i loro punti fissi, ordinati lungo la linea reale, posso essere messi in corrispondenza uno ad uno in modo che punti fissi corrispondenti abbiamo lo stesso tipo topologico (ad esempio pozzo, sorgente o punto semistabile).*

Dimostrazione. Se i due flussi sono topologicamente equivalenti e conosciamo l'omeomorfismo h allora, per definizione, i punti fissi corrispondono in modo ordinato e hanno lo stesso carattere, cioè lo stesso andamento del flusso in loro prossimità, perchè h è monotono.

Viceversa, supponiamo di avere φ e ψ tali che i punti critici siano in corrispondenza e usiamo questo fatto per costruire esplicitamente h . Supponiamo che i punti di equilibrio siano in numero finito e chiamiamo x_1^*, \dots, x_n^* quelli di φ mentre y_1^*, \dots, y_n^* quelli di ψ . Iniziamo a definire h su questi punti ponendo:

$$h(x_i^*) = y_i^*$$

con $i = 1, \dots, n$. Prendiamo ora una serie di numeri α_k e β_k , con $k = 0, \dots, n$, che giacciono in intervalli vicino a questi punti fissi:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &< x_1^* < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n^* < \alpha_n, \\
\beta_0 &< y_1^* < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < y_n^* < \beta_n
\end{aligned}$$

cioè circondiamo i punti fissi con altri numeri perchè vogliamo dichiarare il comportamento di h su tutta l'asse reale. Poniamo dunque $h(\alpha_k) = \beta_k$.

Utilizziamo questi dati per definire h su tutti gli intervalli (x_i^*, x_{i+1}^*) . Prendiamo $x_0 \in (x_i^*, x_{i+1}^*)$. In particolare, il flusso in quest'intervallo è monotono, crescente o decrescente, siccome il sistema dinamico è unidimensionale. Quindi esiste un unico istante t_0 tale che $\varphi_{t_0}(x_0) = \alpha_i$. Per ogni x_0 così scelto definiamo:

$$h(x_0) = y_0 = \psi_{-t_0}(\beta_j)$$

segue così dalle proprietà di ψ che h è un omeomorfismo. Abbiamo dunque una funzione che, fissati certi punti di riferimenti per ogni valore x_0 , determina un valore y_0 . ragionamenti analoghi valgono per intervalli con estremi $\pm\infty$.

Inoltre, se prendiamo:

$$\varphi_{t_0-t}(\varphi_t(x_0)) = \alpha_i$$

per le proprietà gruppali da questa relazione segue:

$$h(\varphi_t(x_0)) = \psi_{-(t_0-t)}(\beta_i) = \psi(\psi_{-t_0}(\beta_i)) = \psi_t(h(x_0))$$

che stabilisce la coniugazione topologica, leggermente più forte di quello che volevamo dimostrare. \square

Esempio 4.7. Prendiamo il flusso generato da $\dot{x} = -x$, cioè $\varphi_t(x) = x e^{-t}$. Consideriamo l'omeomorfismo $y = h(x) = x^3$. Allora il flusso è equivalente a quello ottenuto applicando h :

$$\varphi_t(y) = (x e^{-t})^3 = y e^{-3t}$$

che risolve $\dot{y} = -3y$. Quindi queste due equazioni differenziali sono fra di loro topologicamente coniugate che, in questo caso, significa semplicemente che le loro soluzioni differiscono solo per la velocità della scorrere del tempo.

Definizione 4.15 (Flussi diffeomorfi). Due flussi $\varphi_t : A \rightarrow A$ e $\psi_t : B \rightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, sono diffeomorfi se esiste un diffeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tale che:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_t & \\ A & \rightarrow & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \rightarrow & B \\ & \psi_t & \end{array}$$

commuta.

Questa definizione è più rigida della precedente in quanto diffeomorfismi sono meno comuni di omeomorfismi. Esistono cioè sistemi dinamici topologicamente equivalenti ma non diffeomorfi.

Teorema 4.7 (Coniugazione lineare). Consideriamo i flussi φ_t e ψ_t associati due sistemi dinamici lineari $\dot{x} = Ax$ e $\dot{y} = By$. Allora φ_t e ψ_t sono diffeomorfi se e solo se A è simile a B .

Dimostrazione. Assumiamo che A e B siano simili, cioè che esista una matrice H non singolare tale che $HA = BH$. Poniamo dunque $h(x) = Hx$ con $x \in \mathbb{R}^n$ ottenendo:

$$h(\varphi_t(x)) = H e^{tA} x = e^{tHAH^{-1}} Hx = e^{tB} h(x) = \psi_t(h(x))$$

cioè i flussi sono diffeomorfi. Inoltre la dimostrazione è costruttiva e ci fornisce il diffeomorfismo. Viceversa, supponiamo di avere un diffeomorfismo tale che $g(\varphi_t(x)) = \psi_t(g(x))$. Notiamo che l'origine è un punto fisso di φ perchè quest'ultimo è un flusso associato ad un sistema lineare. Poniamo $g(0) = c$. Allora:

$$g(\varphi_t(0)) = g(0) = c = \psi_t(g(0)) = \psi_t(c) \Rightarrow \psi_t(c) = c$$

e quindi c è un punto fisso di ψ . Defiamo $h(x) = g(x) - c$ in modo che $h(0) = 0$. Valutiamo:

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(g(x)) - c$$

siccome il sistema è lineare, allora:

$$\psi_t(y) = e^{tB} y, \quad \psi_t(g(x)) - c = \psi_t(h(x) + c) - c = \psi_t(h(x))$$

dove abbiamo sfruttato la linearità di ψ . Abbiamo dunque che la funzione h così definita ha le stesse proprietà di g . Per concludere definiamo $H = Dh(0)$. Deriviamo quindi l'equazione precedente rispetto ad x e poi poniamo $x = 0$ ottenendo la relazione:

$$\left[\frac{d}{dx} h(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dx} \psi_t(h(x)) \right] \Big|_{x=0} \Rightarrow \left[\frac{d}{dx} (H e^{tA} x) = \frac{d}{dx} (e^{tB} Hx) \right] \Big|_{x=0} \Rightarrow H e^{tA} = e^{tB} H$$

che derivata rispetto a t e poi calcolata rispetto a $t = 0$ implica $HA = BH$. □

Concludiamo con un risultato fondamentale che rende precisa l'intuizione per la quale il comportamento di un sistema non lineare vicino ad un punto iperbolico è equivalente a quello della sua linearizzazione.

Teorema 4.8 (Hartman - Grobman). *Sia x^* un punto di equilibrio iperbolico di un campo vettoriale $f(x)$ di classe C^1 con flusso $\varphi_t(x)$. Allora esiste un intorno N di x^* tale che φ è topologicamente coniugato alla sua linearizzazione su N .*

Dimostrazione. Diamo un cenno alla dimostrazione riportando solamente i passaggi fondamentali. Prendiamo $\dot{x} = Ax + g(x)$, con A iperbolica e g funzione opportunamente differenziabile. Per l'equazione lineare il flusso è $\psi_t(x) = \exp(tA)x$. Siccome vogliamo un risultato locale per semplicità modifichiamo il problema nell'equazione $\dot{x} = Ax + \tilde{g}(x)$ dove:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{in un intorno } N \text{ di } 0 \\ 0, & \text{fuori da } \tilde{N} (N \subset \tilde{N}) \end{cases}$$

dunque possiamo concentrarci in un intorno N tale che fuori da esso non c'interessa cosa succede. Vogliamo dimostrare che esiste h omeomorfismo tale per cui vale la relazione:

$$\psi_t(h(x)) = h(\varphi_t(x))$$

che, siccome il flusso ψ è lineare, si può scrivere più esplicitamente dicendo che h dev'essere determinato in modo che $h(x) = \exp(-tA) \circ h \circ \varphi_t(x)$.

Supponiamo quindi di avere H_t omeomorfismo che soddisfi la relazione:

$$H_1(x) = e^{-A} H_1(\varphi_1(x))$$

per $t = 1$. Supponiamo di poter dimostrare che H_1 è unico. Poniamo:

$$H_t(x) = e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x) \Rightarrow e^{-A} \circ H_t \circ \varphi_1(x) = e^{-A} \circ e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t \circ \varphi_1(x)$$

e, utilizzando le proprietà gruppali del flusso, scriviamo:

$$e^{-A} \circ e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t \circ \varphi_1(x) = e^{-A} \circ e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_t(x) = e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x) = H_t(x)$$

dunque H_t soddisfa la stessa relazione di H_1 . Quindi siccome H_1 è unico coincide con H_t , cioè:

$$H_1 = e^{-tA} \circ H_1 \circ \varphi_t(x)$$

definisce l'omeomorfismo per ogni t . Il problema ora è trovare H_1 . Poniamo $H_1^{(0)}(x) = x$ e definiamo:

$$H_1^{(i+1)} = e^{-A} \circ H_1^{(i)} \circ \varphi_1(x)$$

con $i = 0, 1, \dots, \infty$. Rimane da dimostrare che quest'iterazione converge. Fatto ciò abbiamo che l'omeomorfismo si può determinare iterativamente a partire dalla linearizzazione. \square

Ricordiamo di aver visto che per sistemi lineari gli spazi E^s ed E^u , rispettivamente stabile e instabile, sono invarianti durante la dinamica, cioè cominciando con condizioni iniziali in uno di essi vi si rimane. Vogliamo ora vedere la generalizzazione per sistemi lineari iperbolici. Questo ci porta a discutere le varietà invarianti. Sia perciò Λ un insieme invariante. Definiamo:

$$W^s(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Lambda\}$$

il suo insieme stabile o bacino di attrazione e, allo stesso modo:

$$W^u(\Lambda) = \{x \notin \Lambda : \varphi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Lambda\}$$

il suo insieme instabile o bacino di repulsione. In particolare, $W^s(\Lambda)$ e $W^u(\Lambda)$ sono insiemi invarianti. Concentriamoci su sull'insieme stabile sapendo che ragionamenti analoghi valgono per quello instabile eventualmente invertendo il senso del tempo. Se $z \in W^s(\Lambda)$, per definizione $\varphi_s(z)$ ha la proprietà che per ogni $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_t(\varphi_s(z)) = \varphi_{s+t}(z) \rightarrow \Lambda$$

per $t \rightarrow \infty$. Questo implica che $\varphi_s(x) \in W^s(\Lambda)$ e quindi $W^s(\Lambda)$ è un insieme stabile.

Esempio 4.8. Consideriamo il sistema dinamico non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases}$$

con linearizzazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

che ha autovalori ± 1 e dunque un punto sella. In particolare l'asse dell x è il sottospazio E^s stabile mentre l'asse y è quello instabile E^u . Troviamo W^s e W^u nel sistema non lineare. Abbiamo che W^u è ancora l'asse delle y infatti se $x_0 = 0$ allora $\dot{x} = -x$ è risolta da:

$$x(t) = x_0 e^{-t} = 0 \Rightarrow \dot{y} = y + x^2 = y$$

con soluzione da $y(t) = y_0 \exp(t)$. Dunque $y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$, ovvero sia ogni dato iniziale lungo y tende al punto fisso per $t \rightarrow -\infty$. Questa è appunto la proprietà che definisce l'insieme instabile. Cerchiamo ora W^s . Supponiamo di prendere dati iniziali $(x_0, y_0) \in W^s$ da cui cerchiamo di ricavare la forma di questo insieme stabile. Abbiamo che:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ \dot{y} = y + x_0^2 e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-t} y) = e^{-t} \dot{y} - y e^{-t} = e^{-t} (\dot{y} - y) = x_0^2 e^{-3t}$$

da cui integrando:

$$e^{-t} y(t) = y_0 + \int_0^t d\tau x_0^2 e^{-3\tau} = y_0 + \frac{x_0^2}{3} (1 - e^{-3t}) = y_0 + \frac{x_0^2}{3} (1 - e^{-3t}) = \left(y_0 + \frac{x_0^2}{3}\right) - \frac{x_0^2}{3} e^{-3t}$$

e prendendo:

$$W^s = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x^2}{3} \right\}$$

abbiamo $y_0 + x_0^2/3 = 0$ per il dato iniziale. Quindi la soluzione:

$$(x, y) = \left(x_0 e^{-t}, -\frac{x_0^2}{3} e^{-2t} \right)$$

rimane su W^s e tende a $(0, 0)$ per $t \rightarrow \infty$.

Dunque l'insieme stabile in questo caso è una curva e lo possiamo chiamare varietà stabile. Inoltre in generale vale che E^s è tangente alla varietà stabile W^s nel punto fisso. Questo vale anche in questo caso, come si può vedere in figura 35, in cui l'asse x è l'insieme stabile e l'origine è il punto di equilibrio.

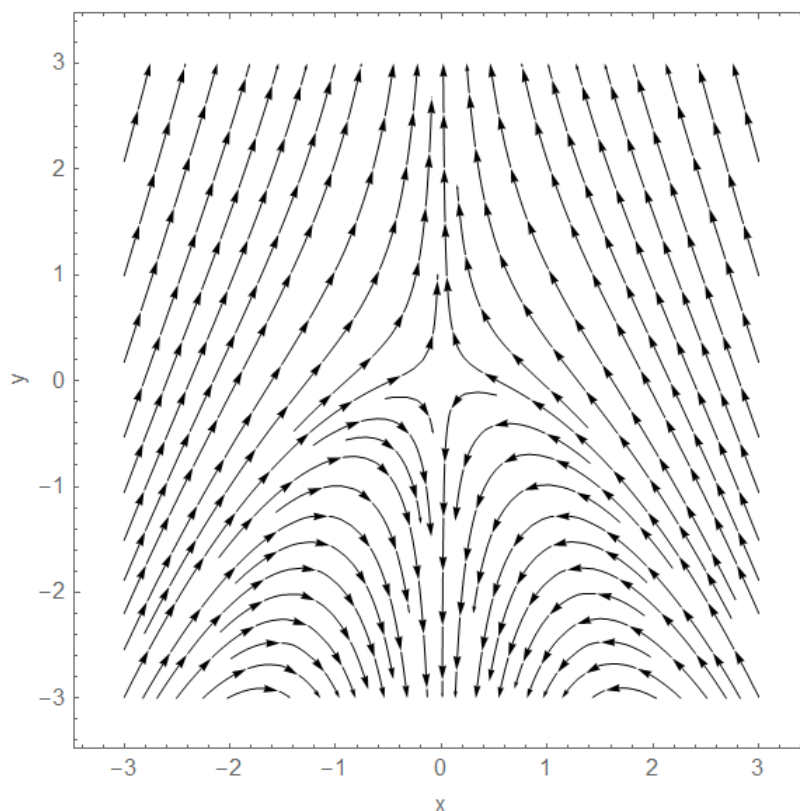


Figura 35: ritratto in fase del sistema dinamico non lineare

Definizione 4.16 (Orbita eteroclina). Un'orbita Γ si dice eteroclina se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti ad un insieme invariante B e asintoticamente indietro ad insieme invariante A , cioè $\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(B)$.

Ad esempio un'orbita eteroclina connette nel piano due punti sella. Inoltre A e B possono anche coincidere e in questo caso l'orbita si dice omoclina.

Definizione 4.17 (Orbita omoclina). Un'orbita Γ si dice omoclina se $\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(A)$.

Nel caso l'orbita sia omoclina essa quindi ritorna al punto di partenza, cioè al punto critico. Notiamo che studiando solamente il sistema linearizzato non possiamo sapere se il sottospazio instabile sia dato da due direzioni indipendenti o se da qualche parte nello spazio delle fasi coincidano queste.

Orbite omocline sono tipiche dei sistemi Hamiltoniani, vediamo un'esempio.

Esempio 4.9. Prendiamo il sistema dinamico Hamiltoniano:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + x \end{cases}$$

con Hamiltoniana:

$$H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$$

e punti di equilibrio $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Linearizzando:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

notiamo che il punto $(0, 0)$ ha autovalori ± 1 dunque è un punto sella mentre i punti $(\pm 1, 0)$ hanno autovalori immaginari $\pm \sqrt{2}i$ quindi sono dei centri. Studiando il diagramma in fase, le cui orbite giacciono sulle curve di livello definite da $H(x, y) = \text{costante}$, otteniamo così delle orbite omocline che tendono a $(0, 0)$ per $t \rightarrow \pm\infty$.

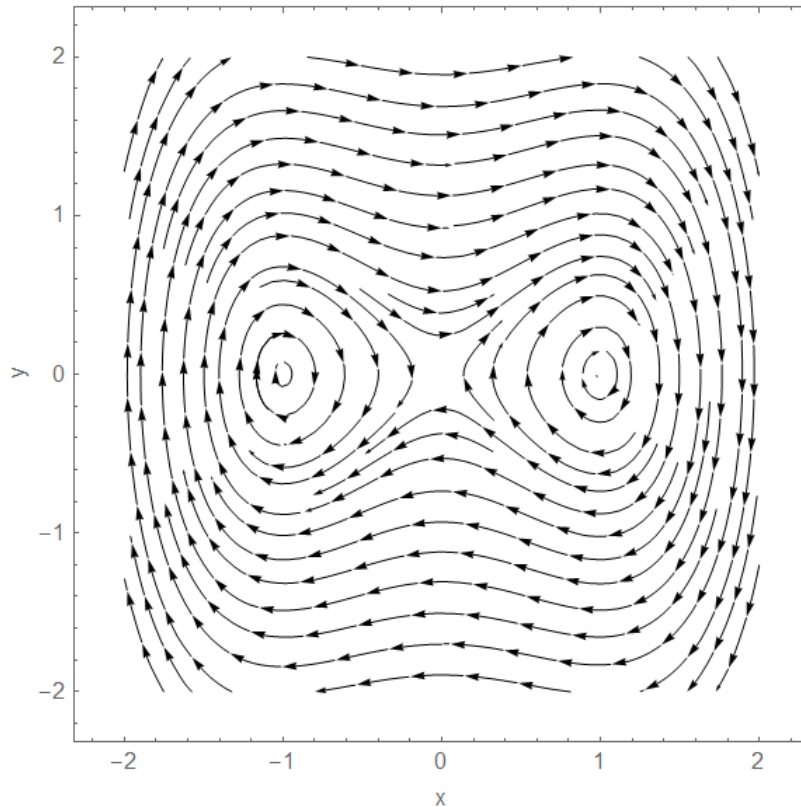


Figura 36: ritratto in fase del sistema dinamico

Questa è una proprietà ricorrente nel caso dei sistemi Hamiltoniani perchè è semplice costruire un'Hamiltoniana le cui superfici di livello sono curve chiuse attorno al punto critico.

Per concludere questa sezione osserviamo che sotto determinate condizioni gli insiemi invarianti sono varietà differenziabili cioè, a parole semplici, estensioni in dimensione più elevata di una curva ed enunciamo con il seguente risultato. Prendiamo f campo vettoriale di classe C^1 e x^* punto iperbolico. Poniamo $A = Df(x^*)$ e, cambiando variabile $x \rightarrow (x + x^*)$, otteniamo un sistema dinamico del tipo:

$$\dot{x} = Ax + g(x)$$

dove $g(x) = f(x + x^*) - Ax$, $g(0) = 0$ e $Dg(0) = 0$.

Teorema 4.9 (Varietà stabile locale). *Sia A iperbolica, $g \in C^k$ con $k \geq 1$ e U intorno di 0 punto fisso. Supponiamo anche che $g(x)$ sia di ordine x per $x \rightarrow 0$, cioè che il sistema dinamico sia formato dalla linearizzazione determinata da A ed una funzione non lineare. Siano E^s ed E^u sottospazi rispettivamente stabile e instabile di A parte lineare. Sotto queste condizioni esiste un intorno $\tilde{U} \subset U$ tale che:*

$$W_{loc}^s(0) = \{x \in W^s(0) : \varphi_t(x) \in \tilde{U}, t \geq 0\}$$

è una varietà differenziabile C^k , in questo caso è un grafico di Lipschitz, tangente a E^s in 0, cioè $T_0 W_{loc}^s = E^s$.

Dimostrazione. Segue dal teorema della funzione implicita. Per una dimostrazione in due dimensioni si può vedere il testo di Hirsch - Smale - Devaney. \square

Un problema ancor più complesso è il seguente. Avendo un punto fisso iperbolico x^* l'insieme stabile è invariante e dopo un certo punto arriva alla varietà stabile locale. Viceversa possiamo prendere la varietà stabile locale ed estenderla indietro nel tempo, cioè possiamo considerare il seguente oggetto

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_{-t}(W_{loc}^s(x^*))$$

che è la varietà stabile globale. Il problema è capire quale sia la struttura.

4.7 Piano delle fasi

Studiamo alcune tecniche di risoluzione dei sistemi dinamici bidimensionali nel cosiddetto piano delle fasi. In questo caso abbiamo due sole variabili dunque prendiamo un sistema con la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

e lo studiamo utilizzando alcune tecniche topologiche. Prendiamo $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva chiusa e vediamo il campo vettoriale $f = (P, Q)$ su di essa. Chiamiamo θ l'angolo tra f e l'asse delle x .

Definizione 4.18 (Indice di Poincaré). Data ogni curva chiusa γ e un campo vettoriale, definiamo l'indice di Poincaré il rapporto:

$$I_\gamma(f) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

dove $\Delta\theta$ è il cambiamento netto dell'angolo θ dopo un giro.

L'indice è cioè il numero intero di rotazioni che il vettore f compie mentre si muove lungo γ fino a tornare al punto di partenza. Più concretamente prediamo la definizione dell'angolo θ :

$$\tan(\theta) = \frac{Q}{P}$$

da cui ricaviamo le due equazioni:

$$\sec^2(\theta)d\theta = \frac{PdQ - QdP}{P^2}, \quad \sec^2(\theta) = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$

la prima differenziando e la seconda tramite l'uso di opportune formule trigonometriche. Da queste troviamo una rappresentazione integrale dell'indice:

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}$$

che ci permette di calcolare l'indice dato il campo vettoriale e la curva.

Questo indice possiede la seguente importante proprietà: se deformiamo in modo continuo la curva γ , senza mai attraversare un punto di equilibrio dove il campo vettoriale si annulla e conseguentemente anche il denominatore $P^2 + Q^2$, l'indice non cambia. Analogamente, se teniamo fissa γ e variamo il campo vettoriale in maniera continua allora l'indice non cambia. Il motivo di quest'invarianza è che l'indice è una funzione continua, in quanto è calcolato in modo continuo a partire dalla curva e dal campo vettoriale, tuttavia, per la sua definizione, può dipendere solamente da valori interi. Una funzione continua che prende solo valori interi è necessariamente una costante.

Teorema 4.10. *Sia A matrice non singolare, $\dot{x} = Ax = f(x)$ e γ una curva chiusa che racchiuda orientata in senso orario l'origine. Allora $I_\gamma(f) = \text{sgn}(\det(A))$.*

Dimostrazione. Sia A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice non singolare, cioè tale che $ad \neq 0$ o $bc \neq 0$. Questo significa che può essere portata, attraverso una sua deformazione continua e dunque senza cambiare il segno del determinante, in una delle due seguenti forme:

$$\begin{pmatrix} \text{sgn}(a) & 0 \\ 0 & \text{sgn}(d) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \text{sgn}(b) \\ \text{sgn}(c) & 0 \end{pmatrix}$$

a seconda che $ad \neq 0$ o $bc \neq 0$. Scegliamo la prima. Portiamo γ nel cerchio unitario C intorno all'origine. Quindi, osservando che:

$$\begin{pmatrix} P \rightarrow \text{sgn}(a)x \\ Q \rightarrow \text{sgn}(d)y \end{pmatrix}$$

otteniamo:

$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \text{sgn}(a) \text{sgn}(d) \frac{y dx - x dy}{y^2 + x^2}$$

che svolgiamo passando in coordinate polari:

$$I_\gamma(f) = \frac{\text{sgn}(a) \text{sgn}(d)}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)}{r^2} = \text{sgn}(a) \text{sgn}(d) = \text{sgn}(\det(A))$$

□

Teorema 4.11. *Se la curva γ non contiene punti critici allora $I_\gamma(f) = 0$ per ogni scelta del campo vettoriale e quindi per ogni sistema dinamico.*

Dimostrazione. Possiamo rimpicciolire γ in modo arbitrario finché il campo vettoriale è costante su γ . Lo possiamo fare ignorando i punti critici perché non ve ne sono. Quindi l'indice è nullo per definizione siccome il campo vettoriale è costante, cioè punta nella stessa direzione, lungo tutta la curva. □

Notiamo che non vale il viceversa. Ovvero $I = 0$ non implica che non ci siano punti di equilibrio dentro la curva. Infatti supponiamo di prendere una curva contenente x_i^* con $i = 1, \dots, n$ punti di equilibrio e deformiamola opportunamente senza farli fuoriuscire. In particolare, possiamo immaginare di circondare ogni punto d'equilibrio con un piccolo cerchio, connesso con gli altri cerchi, e perciò non è ambigua la notazione $I_{x_i^*}(f)$ con cui denotiamo l'indice di un punto di equilibrio. Così facendo nel limite si ottiene che:

$$I_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n I_{x_i^*}(f)$$

in quanto i contributi non relativi ai cerchi si cancellano. Gli indici $I_{x_i^*}(f)$ possono essere sia negativi che positivi e quindi $I_\gamma = 0$ non implica l'assenza di punti d'equilibrio perché potrebbero esserci cancellazioni tra i vari loro contributi.

Teorema 4.12. *Se la curva γ è un'orbita periodica di f allora $I_\gamma(f) = 1$*

Dimostrazione. Segue dal fatto che se γ è un'orbita periodica allora f , per definizione, è sempre tangente ad essa. □

Corollario 4.1. *Ogni orbita periodica contiene almeno un punto d'equilibrio.*

Teorema 4.13 (Poincarè-Bendixson). *Sia φ_t un flussi su \mathbb{R}^2 e $D \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme chiuso, limitato e invariante in avanti. Allora per ogni $x \in D$ l'insieme ω -limite $\omega(x)$ contiene un punto d'equilibrio oppure è una traiettoria periodica.*

Questo teorema implica che nello spazio delle fasi bidimensionale non può succedere nulla di più complicato del flusso tendente come ω -limite ad un punto d'equilibrio o ad una traiettoria periodica. Ciò non vale in dimensioni più elevate. Prima di vederne la dimostrazione abbiamo bisogno di introdurre alcuni concetti.

Definizione 4.19 (Sezione trasversa). Diciamo che un arco S è una sezione trasversa al flusso φ^t se è trasverso al campo vettoriale $f(x)$.

In particolare se $f(y) \neq 0$ esiste sempre una sezione trasversa eventualmente prendendo un intorno piccolo a piacere. Notiamo che le traiettorie tagliano quest'oggetto sempre nello stesso senso. Allarghiamo la sezione trasversa per definire un intorno cilindrico:

$$A = \bigcup_{|t| < \tau} \varphi^t(S)$$

con τ valore del parametro temporale sufficientemente piccolo. Notiamo che il bordo dell'intorno A si trova per il valore $t = \tau$ e prendendo $x \in A$ esiste un valore $t = s$ tale $\varphi^s(x)$ sia il punto d'intersezione con S .

Lemma 4.2. *Se φ^t taglia una sezione trasversa in una certa serie di istanti $t_1 < t_2 < \dots$ eventualmente infinita, allora le intersezioni $\varphi^{t_j}(x)$, che costituiscono una successione di valori su S , sono una successione monotona.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che le traiettorie non si intersecano. \square

Lemma 4.3. *Se $y \in S$ e anche $y \in \omega(x)$ allora y è l'unica intersezione di $\omega(x)$ con S .*

Dimostrazione. Per assurdo sia $y' \in \omega(x) \cap S$, con $y' \neq y$. Quindi prendiamo due sequenze temporali $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$ tali che $\varphi^{t_k}(x) = x_k \rightarrow y$ e $\varphi^{t'_k}(x) = x'_k \rightarrow y'$. Possiamo così trovare valori abbastanza grandi di t tali che tutti i x_k e x'_k sono in un intorno cilindrico di S . Allora non è restrittivo supporre che tutti gli x_k e x'_k siano su S , eventualmente modificando i valori $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$. A questo punto da $\{t_k\}$ e $\{t'_k\}$ possiamo trovare $\{t''_k\}$ tale che $\varphi^{t''_k}(x)$ oscilli lungo S , cioè non sia monotona, in contraddizione con il lemma precedente. \square

Possiamo ora dimostrare il teorema di Poincaré - Bendixson.

Dimostrazione. Se $\omega(x)$ non contiene punti di equilibrio e prendiamo $y \in \omega(x)$ allora neanche $\omega(y) \subset \omega(x)$ contiene punti di equilibrio. Vogliamo dimostrare che questo insieme limite è un'orbita periodica. Consideriamo $z \in \omega(y)$ e S sezione trasversa che contiene z . Siccome $z \in \omega(y)$ possiamo trovare una successione $\{t_k\}$ tale che $\varphi^{t_k}(y) \rightarrow z$. Non è restrittivo assumere che $\{\varphi^{t_k}(y)\}$ giacciono su S . Tuttavia per il secondo lemma tutti i punti $\varphi^{t_k}(y)$ sono in $\omega(x)$, perchè è invariante, e inoltre $z \in \omega(x)$, perchè $\omega(y) \subset \omega(x)$. Inoltre, sempre per il secondo lemma, l'intersezione $\omega(x)$ con S è unica e quindi tutti questi punti coincidono con z . Perciò la traiettoria di y è periodica. Abbiamo dunque dimostrato che la traiettoria, che chiamiamo γ , è contenuta in $\omega(x)$.

Dimostriamo ora che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi^{t_k}(x), \gamma) = 0 \quad (14)$$

cioè che coincidono. Ancora prendiamo γ traiettori, S sezione trasversa, $y \in \omega(x)$ e una successione $\{t_k\}$ tale che $x_k = \varphi^{t_k}(x) \rightarrow y$. Come prima possiamo pensare che $x_k \in S$ e inoltre che $\varphi^{t_k}(x) \notin S$ quando $t_k < t < t_{k+1}$ per lo stesso argomento. Per k sufficientemente grande allora x_k è arbitrariamente vicino ad y e perciò $t_{k+1} - t_k$ è arbitrariamente vicino al periodo T di γ . Infatti $\varphi^{t_k}(x_k)$ è arbitrariamente prossimo a y . In quest'intervallo la distanza $\varphi^t(x_j)$ e $\varphi^t(y)$ è limitata da una costante moltiplicata per $\text{dist}(y, x_k)$. Da questo segue (14). \square

Esempio 4.10 (Modello della reazione chimica di glicolisi). Consideriamo il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} = b - ay - x^2 y \end{cases}$$

con $a, b > 0$. Questo descrive una reazione chimica contenente due reagenti X e Y immersi in una concentrazione di oggetti esterni A che si può legare ad entrambi i reagenti. Si trova che le concentrazioni x ed y di questi due reagenti variano nel tempo con andamento determinato dalle equazioni differenziali riportate.

Per studiare il sistema ricaviamo le isocline:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{a + x^2}, \quad \dot{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a + x^2}$$

e il punto critico:

$$(x^*, y^*) = \left(b, \frac{b}{a+b^2}\right)$$

che si trova ponendo a zero le equazioni differenziali.

Disegnando ora il diagramma in fase possiamo identificare una regione C_1 che è delimitata dalla linea spezzata congiungente i punti:

$$\left(0, \frac{a}{b}\right) \rightarrow \left(b, \frac{a}{b}\right) \rightarrow (x_3 > b, y_3) \rightarrow (x_3, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow \left(0, \frac{a}{b}\right)$$

dove le coordinate (x_3, y_3) identificano un punto arbitrario sulla curva $\dot{x} = 0$ scelto in modo che la retta che si origina nel punto precedente non la intersechi due volte. Sui bordi della regione così definita, che risulta essere un trapezio rettangolo, il flusso è sempre entrante in essa.

Ad esempio, prendendo la retta $x = 0$ si vede che:

$$\begin{cases} \dot{x} = a y \\ \dot{y} = b - a y \end{cases}$$

dove $\dot{x} > 0$, cioè il flusso va verso destra, sempre e $\dot{y} > 0$, cioè il flusso va verso l'alto, per $y < b/a$. Allora si può studiare linearizzando con la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -a - x^2 \end{pmatrix}$$

calcolata nel punto d'equilibrio:

$$\begin{pmatrix} (-a + b^2)/(a + b^2) & a + b^2 \\ -2b^2/(a + b^2) & -a - b^2 \end{pmatrix}$$

in particolare il suo determinante è $a + b^2 > 0$ e la traccia è:

$$\frac{-a + b^2 - (a + b^2)^2}{a + b^2} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < \frac{1}{2}(-1 - 2b^2 + \sqrt{1 + 2b^2})$$

quindi se sono entrambi positivi, per il dato insieme dei parametri, il punto d'equilibrio è un nodo instabile o un fuoco. Questo significa che il flusso è uscente dal punto di equilibrio e quindi identificando un cerchietto C_0 attorno al punto fisso abbiamo che:

$$D = C_1 \cup C_0$$

è un anello invariante in avanti e privo di punti d'equilibrio. Conseguentemente per il teorema di Poincaré - Bendixson esiste un'orbita periodica, cioè la reazione chimica può essere oscillante per alcuni valori dei parametri.