# LR-Zerlegung

- bekannt: Eliminationsverfahren von Gauß
- Verfahren führt zu einer Zerlegung der Koeffizientenmatrix: $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$

## Definition 2.17

Unter einer LR-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verstehen wir eine Zerlegung von $\mathbf{A}$ in der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR}$$

mit einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie einer oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

# Beispiel einer LR-Zerlegung

## Beispiel 2.18

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 8 & 33 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

# Lösung eines LGS mittels LR-Zerlegung

## Algorithmus 2.19

**Eingabe:**

- *reguläre Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, für die eine LR-Zerlegung existiert*
- *rechte Seite* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

**Ausgabe:** *Lösungsvektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

1. *Bestimme eine LR-Zerlegung von* $\mathbf{A}$.
2. *Löse* $\mathbf{L}\mathbf{y} = b$ *durch Vorwärtssubstitution.*
3. *Löse* $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *durch Rückwärtssubstitution.*

**Bemerkung:** Nicht für jede reguläre Matrix $\mathbf{A}$ existiert eine LR-Zerlegung.

## Beispiel 2.20

Wir betrachten das LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 8 & 33 \\ -4 & 10 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 73 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1. Die LR-Zerlegung von **A** kennen wir aus Beispiel 2.18.
2. Vorwärtssubstitution zur Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 15 \\ 73 \\ 12 \end{pmatrix}$$

liefert: $y_1 = 15, y_2 = 73 - 4 \cdot 15 = 13, y_2 = 12 - 3 \cdot 13 + 2 \cdot 15 = 3.$

## Fortsetzung Beispiel.

3. Rückwärtssubstitution zur Lösung von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

liefert:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{3} = 1 \\ x_2 &= \frac{13-5}{4} = 2 \\ x_1 &= \frac{15-2-7}{2} = 3 \end{aligned}$$

# Fragen zur LR-Zerlegung

Schritt 1 aus Algorithmus 2.19 wirft folgende Fragen auf:

1. Wie bestimmt man eine LR-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$?
2. Wann existiert solch eine LR-Zerlegung?
3. Ist solch eine LR-Zerlegung eindeutig bestimmt?

# Beispiel zur Konstruktion einer LR-Zerlegung

## Beispiel 2.21

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}^{(1)}$$

und beliebiger rechter Seite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.
Wir subtrahieren:

- von der zweiten Zeile das zweifache der ersten Zeile,
- von der dritten Zeile das vierfache der ersten Zeile,
- von der vierten Zeile das dreifache der ersten Zeile.

## Fortsetzung Beispiel.

In Matrixschreibweise:

$$\mathbf{L}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}^{(2)}$$

## Fortsetzung Beispiel.

Sei

$$\mathbf{L}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}^{(3)}$$

## Fortsetzung Beispiel.

Sei

$$\mathbf{L}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: \mathbf{A}^{(4)} =: \mathbf{R}$$

Damit haben wir die gewünschte obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R}$.

## Fortsetzung Beispiel.

Fazit:

- Eventuelle Zerlegung mittels $\mathbf{L} := \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$.
- Damit gilt dann $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$.

**Entscheidende Fragen:**

- Wie sehen die $\mathbf{L}_j^{-1}$ aus?
- Ist $\mathbf{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix?

# Frobenius-Matrix

## Definition 2.22

Eine Matrix $\mathbf{L}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Gestalt

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -l_{n,j} & & & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Frobenius-Matrix.

# Diskussion zur Frobenius-Matrix

- Einheitsmatrix mit Ausnahme der $j$-ten Spalte
- In Spalte $j$ unterhalb der Diagonalen die Einträge $-l_{j+1,j}, \dots, -l_{n,j}$
- Wirkung von $\mathbf{L}_j\mathbf{A}$: Das $l_{i,j}$-fache der $j$-ten Zeile von $\mathbf{A}$ wird von Zeile $i$ in $\mathbf{A}$ abgezogen.

# Inverse einer Frobenius-Matrix

## Lemma 2.23

*Es sei $\mathbf{L}_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Frobenius-Matrix mit der Darstellung wie in Definition 2.22.*

*Dann gilt:*

$$\mathbf{L}_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & +l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & +l_{n,j} & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Das Inverse einer Frobenius-Matrix ist wieder eine Frobenius-Matrix.
- Zur Bestimmung der inversen Matrix müssen wir nur die Vorzeichen in Spalte $j$ unterhalb der Diagonalen herumdrehen.

## Lemma 2.24

*Es seien $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_{n-1}$ Frobenius-Matrizen mit der Darstellung wie in Definition 2.22, also für $\mathbf{L}_j$ mit Einträgen in Spalte $j$.*

*Dann gilt:*

$$\mathbf{L} := \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\cdots\mathbf{L}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- Damit ist $\mathbf{L}$ tatsächlich eine normierte untere Dreiecksmatrix.
- Wenn die Matrizen $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_{n-1}$ vorliegen, können wir $\mathbf{L}$ direkt (also ohne weitere Rechnung) angeben.

### Beispiel 2.25

Mit Lemma 2.24 folgt als LR-Zerlegung für Beispiel 2.21:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Grundversion einer LR-Zerlegung

## Algorithmus 2.26

$\mathbf{A}^{(1)} := \mathbf{A}$
**for** $j := 1$ **to** $n-1$ **do**
  **for** $i := j+1$ **to** $n$ **do**
    $l_{i,j} := a_{i,j}^{(j)} / a_{j,j}^{(j)}$
  **end**
  *Definiere* $\mathbf{L}_j$ *gemäß 2.22*
  $\mathbf{A}^{(j+1)} := \mathbf{L}_j \mathbf{A}^{(j)}$
**end**
$\mathbf{R} := \mathbf{A}^{(n)}$

# Hauptabschnittsmatrix

## Definition 2.27

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt

$$\mathbf{A}[k] := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

die führende $k \times k$-Hauptabschnittsmatrix von $\mathbf{A}$ und $\det(\mathbf{A}[k])$ die führende $k$-te Hauptabschnittsdeterminante.

## Beispiel 2.28

Für die $3 \times 3$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sind die drei führenden Hauptabschnittsmatrizen:

$$\mathbf{A}[1] = (1), \quad \mathbf{A}[2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}[3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

# Existenz einer LR-Zerlegung

## Satz 2.29

*Es sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine reguläre Matrix.*

*Dann besitzt* $\mathbf{A}$ *genau dann eine LR-Zerlegung, wenn* $\det(\mathbf{A}[k]) \neq 0$ *für alle* $k = 1, \ldots, n$ *gilt.*

## Beispiel 2.30

- Die Matrix $\mathbf{A}$ aus Beispiel 2.28 besitzt eine LR-Zerlegung.
- Für die reguläre Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

existiert keine LR-Zerlegung.

# Eigenschaften von Dreiecksmatrizen

## Lemma 2.31

(i) *Sind* $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $\mathbf{L}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *untere (normierte) Dreiecksmatrizen, so ist auch* $\mathbf{L}\mathbf{L}'$ *eine untere (normierte) Dreiecksmatrix.*

(ii) *Ist* $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *eine reguläre untere (normierte) Dreiecksmatrix, so ist auch* $\mathbf{L}^{-1}$ *eine untere (normierte) Dreiecksmatrix.*

(iii) *Die Aussagen (i) und (ii) gelten analog für obere (normierte) Dreiecksmatrizen.*

# Eindeutigkeit der LR-Zerlegung

## Satz 2.32

*Es sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine reguläre Matrix mit* $\det(\mathbf{A})[k] \neq 0$ *für* $k = 1, \ldots, n$.

*Dann ist die existierende LR-Zerlegung von* $\mathbf{A}$ *eindeutig bestimmt.*

## Beweis.

- Es seien $\mathbf{L}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} = \mathbf{L}_2\mathbf{R}_2$ zwei LR-Zerlegungen für $\mathbf{A}$.
- Daraus folgt $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$.
- Nach Lemma 2.31 ist $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$ eine untere normierte Dreiecksmatrix.
- Aus der Gleichheit und den speziellen Eigenschaften folgt $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{E} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$.
- Damit folgt $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ und $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$.

# Aufwand der LR-Zerlegung

## Algorithmus 2.33

*Konkreter Kern der LR-Zerlegung:*

**for** $j := 1$ **to** $n - 1$ **do**
    **for** $i := j + 1$ **to** $n$ **do**
        $l_{i,j} := a_{i,j} / a_{j,j}$
        **for** $k := j + 1$ **to** $n$ **do**
            $a_{i,k} := a_{i,k} - l_{i,j} * a_{j,k}$
        **end**
    **end**
**end**

Hauptaufwand: innerste Schleife, dort zwei Operationen

Wenn wir über alle Schleifendurchläufe der innersten Schleife summieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} 2 &= 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (n-j) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\
&= 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \approx \frac{2}{3} n^3
\end{aligned}$$

**Fazit:** Der Zeitaufwand der LR-Zerlegung beträgt $O(n^3)$.

# LR-Zerlegung mit Pivotisierung

- Die Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
hat keine LR-Zerlegung.
- Die Matrix $\mathbf{A}$ ist aber regulär und somit wäre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ stets eindeutig lösbar.
- Wie können wir dieses Problem lösen? Zeilenvertauschung!
- Mit geeigneten Zeilenvertauschungen existiert stets eine LR-Zerlegung.
- Formal repräsentieren wir Zeilenvertauschungen durch eine Permutationsmatrix.

# Existenz einer Zerlegung mit Zeilenvertauschung

## Satz 2.34

*Jede reguläre Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *besitzt eine Zerlegung der Gestalt*

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$$

*mit*

- *einer Permutationsmatrix* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- *einer normierten unteren Dreiecksmatrix* $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *und*
- *einer oberen Dreiecksmatrix* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

## Beispiel 2.35

Wir betrachten die reguläre Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 2.30, für die keine LR-Zerlegung existiert.

Dagegen ist, wenn wir die zweite und dritte Zeile von **A** vertauschen, eine LR-Zerlegung möglich:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

# Lösung eines LGS mittels LR-Zerlegung und Pivotisierung

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{LRx} = \mathbf{Pb}$$

führt zu folgendem Algorithmus:

## Algorithmus 2.36

**Eingabe:**

- *reguläre Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- *rechte Seite* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

**Ausgabe:**

1. *Bestimme eine Zerlegung* $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$.
2. *Setze* $\mathbf{c} := \mathbf{Pb}$.
3. *Löse* $\mathbf{Ly} = \mathbf{c}$ *durch Vorwärtssubstitution.*
4. *Löse* $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$ *durch Rückwärtssubstitution.*

# Matrix zur Vertauschung zweier Zeilen

Wir bezeichnen mit $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Permutationsmatrix, welche die *i*-te und die *j*-te Zeile untereinander vertauscht.

$\mathbf{P}_{ij}$ entspricht der Einheitsmatrix, wobei *i*-te und *j*-te Zeile vertauscht sind.

$$
P_{ij} := \begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
 \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
 & & & i & & & & j & & &
\end{array}
\end{array}
$$

# Beispiel zu LR-Zerlegung mit Pivotisierung

## Beispiel 2.37

Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die beiden ersten Zeilen und erhalten damit

$$\mathbf{P}_{1,2}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Fortsetzung Beispiel.

Mit der Frobenius-Matrix

$$\mathbf{L}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{P}_{1,2} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1.5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Fortsetzung Beispiel.

Jetzt ist keine Zeilenvertauschung notwendig, dies machen wir durch

$$\mathbf{P}_{2,2} := \mathbf{E}$$

deutlich. Mit der Frobenius-Matrix

$$\mathbf{L}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\mathbf{L}_2\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{L}_1\mathbf{P}_{1,2}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 \end{pmatrix}$$

## Fortsetzung Beispiel.

In der letzten Iteration vertauschen wir mittels $\mathbf{P}_{3,4}$ die dritte und vierte Zeile.

Anschließend ist keine weitere Transformation mehr notwendig, d. h. wir wählen $\mathbf{L}_3 := \mathbf{E}$ und erhalten damit:

$$\mathbf{L}_3\mathbf{P}_{3,4}\mathbf{L}_2\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{L}_1\mathbf{P}_{1,2}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{pmatrix} =: \mathbf{R}$$

## Fortsetzung Beispiel.

Wenn wir jetzt durch

$$\mathbf{c} := \mathbf{L}_3 \mathbf{P}_{3,4} \mathbf{L}_2 \mathbf{P}_{2,2} \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_{1,2} \mathbf{b}$$

die gleichen Transformationen auch auf die rechte Seite $\mathbf{b}$ anwenden, könnten wir das ursprüngliche LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels Rückwärtssubstitution für

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

lösen.

# Grundversion einer LR-Zerlegung mit Pivotisierung

## Algorithmus 2.38

$\mathbf{A}^{(1)} := \mathbf{A}$

**for** $j := 1$ **to** $n-1$ **do**

  *Wähle aus der $j$-ten Spalte von $\mathbf{A}^{(j)}$ ein Element $a_{ij}^{(j)} \neq 0$ mit $i \geq j$*

  $\tilde{\mathbf{A}}^{(j)} := \mathbf{P}_{j,i}\mathbf{A}_{(j)}$

  **for** $i := j+1$ **to** $n$ **do**

    $l_{i,j} := \tilde{a}_{i,j}^{(j)} / \tilde{a}_{j,j}^{(j)}$

  **end**

  *Definiere $\mathbf{L}_j$ gemäß 2.22*

  $\mathbf{A}^{(j+1)} := \mathbf{L}_j \tilde{\mathbf{A}}^{(j)}$

**end**

$\mathbf{R} := \mathbf{A}^{(n)}$

# Bemerkungen zur Pivotisierung

- Im Allgemeinen wählt man das Pivotelement $a_{ij}^{(j)}$ so, dass

$$a_{ij}^{(j)} = \max_{j \leq k \leq n} |a_{kj}^{(j)}|$$

gilt.

- Insbesondere führt man auch dann eine Zeilenvertauschung durch, wenn $a_{jj}^{(j)} \neq 0$ gilt.
- Grund: bessere numerische Stabilität
- Man nennt das hier gezeigte Vorgehen Spaltenpivotisierung.
- Algorithmus 2.38 liefert tatsächlich eine Zerlegung der Form $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$. Auf einen Beweis hierfür verzichten wir.

# Bemerkungen zu einer Implementierung

- Die durchgeführten Zeilenvertauschungen merken wir uns einfach ein einer Permutation $\pi$ repräsentiert als Array.
- Initialisierung: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$
- Aus $\pi$ können am Ende $\mathbf{P}$ bestimmen.
- Die $l_{i,j}$ tragen wir in der Matrix $\mathbf{L}$ ein.
- Wenn wir in Iteration $j$ eine Zeilenvertauschung der Zeilen $i$ und $j$ vornehmen, tauschen wir auch in $\mathbf{L}$ die Einträge in diesen Zeilen, aber nur bis zur Spalte $j-1$.

# Beispiele zur LR-Zerlegung mit Pivotisierung

## Beispiel 2.39

Für Beispiel 2.37 erhalten wir:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe und Herleitung, Tafel ✎

## Beispiel 2.40

Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und führen eine LR-Zerlegung mit Pivotisierung durch, wobei wir jeweils durch Zeilenvertauschung das betragsmäßig größte Element auf die Diagonale ziehen.

Als Ergebnis erhalten wir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{27}{22} \end{pmatrix}$$

Durchführung Tafel ✎.

## Fortsetzung Beispiel.

Jetzt betrachten wir noch das LGS

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} =: \mathbf{b}$$

Wir berechnen $\mathbf{Pb}$:

$$\mathbf{Pb} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} =: \mathbf{c}$$

Wir lösen $\mathbf{Ly} = \mathbf{c}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

ergibt $y_1 = 11, y_2 = \frac{53}{4}, y_3 = \frac{81}{22}$.

## Fortsetzung Beispiel.

Wir lösen $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{27}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \frac{53}{4} \\ \frac{81}{22} \end{pmatrix}$$

ergibt $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$.