2. Projekt: Iterative Löser für LGSe

Abgabe bis Freitag 21.12.2018 auf Moodle. Vorführung am 17./18.12.2018 in den Übungen.

Aufgabenstellung:

1. Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren, das Gauss-Seidel-Verfahren und das SOR-Verfahren jeweils als eine MATLAB-Funktion mit den Eingabeparametern

   - Matrix A und rechte Seite b des zu lösenden Gleichungssystems
   - Startvektor x_0
   - Relaxationsparameter ω (nur für SOR-Verfahren)
   - Toleranz `tol`
   - Maximalanzahl von Iterationen itMax.

   Die Iteration soll abbrechen, wenn für das Residuum $r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$ gilt:

   $$\|r^{(k)}\|/\|b\| \leq \text{tol}.$$

   (Ist das eine sinnvolle Abbruchbedingung?) Zurückgegeben werden soll die berechnete Lösung $x^{(\cdot)}$ im letzten Iterationsschritt sowie die Anzahl der benötigten Iterationen.

2. Wählen Sie jetzt für die Matrix A die folgenden $(n \times n)$-Tridiagonalmatrizen:

   $$\text{tridiag}_n(-1, 2, -1) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \Large 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \Large 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   Bestimmen Sie für $n = 10$ und für $n = 100$ mit den rechten Seiten $b, b_i = 1; i = 1, 2, \ldots, n$, die optimalen Relaxationsparameter $\omega \in (0, 2)$ (mit einer Genauigkeit von 10^{-2}, also zwei Stellen nach dem Komma) für das SOR-Verfahren, indem Sie die Anzahl der benötigten Iterationen halblogarithmisch über ω auftragen (`semilogy`). (Tip: setzen Sie im Fall $n = 100$ eine sinnvolle obere Schranke für die Iterationszahl, sonst warten Sie sehr lange auf das Ergebnis ...). Experimentieren Sie auch mit dem Parameter tol.

3. Das in Punkt 2. zu lösende LGS ergibt sich durch *Diskretisierung* des folgenden Randwertproblem: Bestimme eine Funktion $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, für die gilt:

   $$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$
   $$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

   Dieses Randwertproblem modelliert zum Beispiel (unter gewissen Voraussetzungen ..., ohne dimensionsbehaftete Materialkonstanten) die Auslenkung $u(x)$ (in y-Richtung) einer Saite (elastischen Schnur) unter der Wirkung einer Kräfteverteilung f, wobei die Saite in $x = 0$ und $x = 1$ fest eingespannt ist (daher ist hier keine Auslenkung möglich). Gesucht ist hier also die Funktion u für gegebenes f. Eine *Finite Differenzen Approximation* erhält man wie folgt:

- Man führt auf dem Intervall $[0,1]$ die $n+1$ Gitterpunkte $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ein, wobei $h = 1/n$ der Abstand der Gitterpunkte ist.
- Die Lösung u wir dann approximiert durch eine endliche Folge von Werten $u_j \approx u(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ an den Gitterpunkten x_j.
- Man ersetzt die Ableitungen durch diskrete Differenzenquotienten. Eine beliebte Möglichkeit für die zweite Ableitung ist
$$u_j'' \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$
- Ersetzt man außerdem die rechte Seite in (1) durch die Werte an den Gitterpunkten, $f_j := f(x_j)$, so ergeben sich – unter Benutzung der Randbedingung (2) – die folgenden Gleichungen für die Unbekannten $u_j, j = 1, 2, \ldots, n-1$ ($u_0 = u_n = 0$ wegen (2)):
$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
oder in Matrixform:
$$Au = f; \qquad A = h^{-2}\text{tridiag}_{n-1}(-1, 2, -1),$$
wobei hier u und f die Spaltenvektoren mit $n-1$ Komponenten u_j, f_j , $j = 1, \ldots, n-1$ sind.

Berechnen Sie die exakte Lösung von (1),(2) für die rechte Seite $f(x) = 1$. Benutzen Sie jetzt die Ergebnisse aus Teil 1 und 2, um approximative Lösungen für Gitterweiten $h = 0.1$ bzw. $h = 0.01$ zu berechnen und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung. Berechnen Sie (numerische) Lösungen für interessantere Kräfteverteilungen $f(x)$.

Projektbericht

Das Ergebnis der Bearbeitung des Projektes soll neben dem lauffähigen Programm-Code (inklusive Testskripte) ein kurzer Projektbericht sein. Dieser soll enthalten:

- Titel des Projektes, Kurs, Name, Datum
- Vorstellung des Projektthemas (zwei Sätze)
- Beschreibung des Verfahrens, eventuell kurze Herleitung (unabhängig von der Implementierung).
- Beschreibung wichtiger Aspekte der Implementierung. Eventuell kurze Code-Ausschnitte (falls sinnvoll) mit Erläuterung.
- Darstellung und Diskussion der Ergebnisse, inklusive einer grafischen Darstellung zu Aufgabenteil 2 (und eventuell 3)

Insgesamt sollte der Bericht nicht länger als 2 Seiten sein. Zur Erinnerung:

- Mit Abgabe des Projektes auf Moodle bestätigen Sie, dass Sie den Projektbericht selbstständig erstellt haben. Alle verwendeten Quellen, aus denen Sie Teile entnehmen (Grafiken, wörtliche Formulierungen) müssen genannt werden. Das Einfügen von Formeln als Bilder aus anderen Dokumenten ist nicht gestattet.
- Mit der Abgabe des Projekts auf Moodle bestätigen Sie, dass die den Programm-Code in allen Einzelheiten verstanden haben, und diesen alleine oder zusammen mit höchstens einem Projektpartner/einer Projektpartnerin selbständig erstellt haben.