Numerik 1 21.01.19 Wahid Far, Okhtay

3.Projekt: Newton-Verfahren

Bei diesem Projekt soll mithilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise Nullstellen bestimmt werden und stellt die effektivste näherungsweise Nullstellenbestimmung einer Funktion dar.
Dabei sollen Vektoren als Fraktale farblich gekennzeichnet werden, wodurch man anhand der Farben die konvergenten und divergenten Vektormengen erkennt .

Theorie:

Das Newton-Verfahren orientiert sich wie andere Näherungsverfahren an den Banachschen Fixpunktsatz. Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt für das Newton-Verfahren folgendes:
(konvergente Folge $x^{(k)}$ mit $k \in \boldsymbol{N}$, $x^{(k)} \in \boldsymbol{R^n}$, Grenzwert z, Konvergenzordnung p=2 , 0<c<1)

|| $x^{(k+1)}$ - z || <= c || $x^{(k)}$ - z ||^2 für alle k >= k

Das heißt, durch p=2 beginnen wir das Newton-Verfahren und erreichen somit eine quadratisch lokale Konvergenz.
Im Allgemeinen wird beim klassischen Ablauf des Newton-Verfahrens ein Startvektor vorrausgesetzt, der nah genug an einer Nullstelle liegt, so dass dieser Startvektor näherungsweise gegen diese Nullstelle konvergiert.

Aufgabe1:

Hier sollten wir die Nullstellen zwei gegebener Funktionen f1(x1,x2)= x1^2 + x2 – 4 und f2(x1,x2) = x2 e^{-x1} – 2 mithilfe derer Jakobimatrix bestimmen.
Hierzu nutzen wir zur Lösung der Matrix $f(x1, x2) = \begin{pmatrix} f1 \\ f2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Funktionen zur Lösung für die LR-Zerlegung, um dieses LGS lösen zu können.
Hierzu haben wir auch eine Testfunktion verfasst, wo bezüglich 3 Startvektoren zum Testen festgelegt haben (x_1 = [0.1,0.1] ;x_2 = [5,5]; x_3 = [20,20];).

code Testskript:

```
x_1 = [0.1,0.1];
x_2 = [5,5];
x_3 = [20,20];
tol = 1e-3;
itMax = 1000;
f = @(x) [x(1)^2+x(2)-4;x(2)*exp(-x(1))-2];
Jf = @(x) [2*x(1),1;-x(2)*exp(-x(1)),exp(-x(1))];

[x_neu , it] = Newton (f, Jf, x_1, tol, itMax)
disp ('test mit x_1 fertig');
[x_neu , it] = Newton (f, Jf, x_2, tol, itMax)
disp ('test mit x_2 fertig');
[x_neu , it] = Newton (f, Jf, x_3, tol, itMax)
disp ('test mit x_3 fertig');
```

x_1 benötigte 69 Iterationen und x_2 benötigte 26 Iterationen damit sie jeweils mit der Toleranz 1e-3 gegen eine Nullstelle konvergieren.
Für x_3 haben 2 Iterationen ausgereicht, um festzustellen dass der Vektor divergiert und demnach gegen keine Nullstelle konvergieren kann.

<u>Aufgabe2:</u>

In dieser Aufgabe sollte das zuvor implementierte Newton-Verfahren angewandt werden um ein Newton-Fraktal zu erzeugen. Dazu hatten wir die komplexe Funktion $z^3 = 1$ mit $z \in \boldsymbol{C}$ gegeben.
Dieses Problem übertrugen wir aus dem komplexen in den reellen Bereich :

$$f((x,y)^T) = \begin{pmatrix} x^3 - 3\mathrm{xy} - 1 \\ -y^3 + 3\mathrm{x}^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Zuweisen der Farben habe ich durch die Switch-Case Bedingung umgesetzt wo jeder spezifische Nullstelle ein „Farbwert" zugeordnet wurde, worauf hierbei nur zu achten war, dass man nicht die Farben direkt dem Pixel zuordnen konnte da man natürlich die Nullstellen zuerst noch bestimmen musste. Mit dem Hinzufügen einer weiteren Switch-Case Bedingung konnte man dieses Problem lösen.

Die „Farbwerte" wurden dann mit 20 multipliziert um den unterschied stärker hervorzubringen.Leider konnten hierbei nur zwei Nullstellen bestimmt werden, wodurch ein anderes Fraktalbild entstanden ist. Das heißt auf dem abgebildeten Bild sind nur zwei Farben zu erkennen: