Activity CH4: ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่สำคัญ

1. อายุของไวรัส A ที่อุณหภูมิห้อง (หน่วย : สัปดาห์) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} k(2x^3 + x^5) & ; 0 < x < 3 \\ 0 & ; x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

1.1 จงหาความน่าจะเป็นที่ไวรัส A จะมีอายุอย่างน้อย 2.25 สัปดาห์ที่อุณหภูมิห้อง

วิธีทำ

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} k(2x^3 + x^5)\,dx + 0dx = 1$$

$$k \int_{0}^{3} (2x^3 + x^5)\,dx = 1$$

$$k\,(162) = 1$$

$$k = \frac{1}{162}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{162}(2x^3 + x^5) & ; 0 < x < 3 \\ & ; x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

1.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ไวรัส A จะมีอายุระหว่าง 1.75 ถึง 2.75 สัปดาห์ที่อุณหภูมิห้อง

วิธีทำ

$$P(1.75 < X < 2.75) = {}_{1.75}\int^{2.75} \frac{1}{162}(2x^3 + x^5)$$
$$= 0.563$$

1.3 จงหาอายุเฉลี่ยของไวรัส A ที่อุณหภูมิห้อง

$$E(x) = {}_{-\infty}\int^{0} x\, f(x)\, dx$$
$$= {}_{-\infty}\int^{0} x(0)dx + {}_{0}\int^{3} x \left[\frac{1}{162}(2x^3 + x^5)\right] dx + {}_{-\infty}\int^{0} x\,(0)dx$$
$$= 2.5286$$

1.4 จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุของไวรัส A ที่อุณหภูมิห้อง

$E(x^2) = {}_{-\infty}\int^{0} x^2 f(x)\, dx$

$= {}_{0}\int^{3} x^2 \left[\frac{1}{162} (2x^3 + x^5) \right] dx$

$= 6.5625$

$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$

$= 6.5625 - (2.5286)^2$

$= 0.1687$

$\sigma = \sqrt{0.1687}$

$= 0.4107$

2. แบตเตอรี่ชนิดหนึ่งมีอายุการใช้งานเฉลี่ย 3 ปี และความแปรปรวน 0.25 ปี^{2} สมมติว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ชนิดนี้มีการแจกแจงปกติ จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งาน

ให้ X แทนอายุการใช้งานของแบตเตอร์รี่

2.1 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานน้อยกว่า 2.3 ปี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
P(x < 2.3) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{2.3-3}{0.5}\right) \\
&= P(z < -1.4) \\
&= 0.5 - P(-1.4 < z < 0) \\
&= 0.5 - P(0 < z < 1.4) \\
&= 0.5 - 0.4192 \\
&= 0.0808
\end{aligned}
$$

2.2 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานมากกว่า 2.3 ปี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
P(x < 2.3) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{2.3-3}{0.5}\right) \\
&= P(z > -1.4) \\
&= P(-1.4 < z < 0) + 0.5 \\
&= P(0 < z < 1.4) + 0.5 \\
&= 0.4192 + 0.5 \\
&= 0.9192
\end{aligned}
$$

2.3 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานน้อยกว่า 3.95 ปี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
P(x < 3.95) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{3.95-3}{0.5}\right) \\
&= P(z < 1.9) \\
&= 0.5 + P(0 < z < 1.9) \\
&= 0.5 + 0.4713 \\
&= 0.9713
\end{aligned}
$$

2.4 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานมากกว่า 3.95 ปี

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
P(x < 3.95) &= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{3.95-3}{0.5}\right) \\
&= P(z > 1.9) \\
&= 0.5 - P(0 < z < 1.9) \\
&= 0.5 - 0.4713 \\
&= 0.0287
\end{aligned}
$$

2.5 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานระหว่าง 2.3 ถึง 3.95 ปี

วิธีทำ

$$P(2.3 < x < 3.95) = P\left(\frac{2.3-3}{0.5} < \frac{\times - \mu}{\sigma} < \frac{3.95-3}{0.5}\right)$$
$$= P(-1.4 < z < 1.9)$$
$$= P(0 < z < 1.4) + P(0 < z < 1.9)$$
$$= 0.4192 + 0.4713$$
$$= 0.8905$$

2.6 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานตั้งแต่ 1.85 ถึง 2.85 ปี

วิธีทำ

$$P(1.8 < x < 2.85) = P\left(\frac{1.85-3}{0.5} < \frac{\times - \mu}{\sigma} < \frac{2.85-3}{0.5}\right)$$
$$= P(-2.3 \leq z \leq -0.3)$$
$$= P(-2.3 \leq z \leq 0) - P(-0.3 \leq z \leq 0)$$
$$= P(0 \leq z \leq 2.3) - P(0 \leq z \leq 0.3)$$
$$= 0.4893 - 0.1179$$
$$= 0.3714$$

2.7 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุการใช้งานระหว่าง 3.15 ถึง 3.95 ปี

วิธีทำ

$$P(3.15 < x < 3.95) = P\left(\frac{3.15-3}{0.5} < \frac{\times - \mu}{\sigma} < \frac{3.95-3}{0.5}\right)$$
$$= P(0.3 < z < 1.9)$$
$$= P(0 < z < 1.9) - P(0 < z < 0.3)$$
$$= 0.4713 - 0.1179$$
$$= 0.3534$$

3. ผู้จัดการฝ่ายการผลิตของบริษัทผลิตแท่งคอนกรีตแห่งหนึ่ง พบว่าน้ำหนักของแท่งคอนกรีตที่ผลิตได้มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 15 กิโลกรัม และมีความแปรปรวนเท่ากับ 0.08 กิโลกรัม^2 หากกำหนดว่าคอนกรีตเกรด A เป็นคอนกรีตที่มีน้ำหนักอยู่ระหว่าง 15 ± 0.45

3.1 จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทแห่งนี้จะผลิตคอนกรีตเกรด A

วิธีทำ

ให้ X แทนน้ำหนักของแท่งคอนกรีต

$$P(14.55 < x < 15.45) = P\left(\frac{14.55-3}{0.5} < \frac{\times - \mu}{\sigma} < \frac{15.45-3}{0.5}\right)$$
$$= P(-1.59 < z < 1.59)$$
$$= P(-1.59 < z < 0) + P(0 < z < 1.59)$$
$$= 0.4441 + 0.4441$$
$$= 0.8882$$

3.2 ถ้าบริษัทแห่งนี้พบว่าบริษัทผลิตคอนกรีตเกรด A ได้ร้อยละ 90 จงหาว่าน้ำหนักของคอนกรีตที่น้อยที่สุดและมากที่สุด ของคอนกรีตเกรด A ที่บริษัทแห่งนี้ผลิตได้

วิธีทำ

ให้ X แทนน้ำหนักของแท่งคอนกรีต

a และ b แทนน้ำหนักของคอนกรีตที่น้อยที่สุดและมากที่สุด ตามลำดับ

P(0 < Z < 1.64) = 0.45

$z = \frac{\times - \mu}{\sigma}$

$-1.64 = \frac{a - 15}{0.2828}$ a ≈ 14.5362

$1.64 = \frac{b - 15}{0.2828}$ b ≈ 15.4638

4. คะแนนจากการสอบรายวิชาสถิติ มีการแจกแจงปกติ มีคะแนนเฉลี่ย 52 คะแนน และความแปรปรวน 81 คะแนน^2 ถ้าภาควิชาสถิติต้องการตัดเกรด A สำหรับผู้ที่สอบได้คะแนนสูง 5 % แรก จงหาว่าผู้ที่ได้ระดับคะแนน A จะต้องได้คะแนนอย่างต่ำกี่คะแนน

$P(0 < z < 1.64) = 0.45$

$P(z > 1.64) = 0.05$

$P(52 < x < a) = 0.45$

$$P\left(\frac{52-52}{9} < \frac{\times - \mu}{\sigma} < \frac{a-52}{9}\right) = 0.45$$

$$\frac{a-52}{9} = 0.45$$

$$a = (0.45 * 9) + 52$$

$$a \approx 56.05$$