



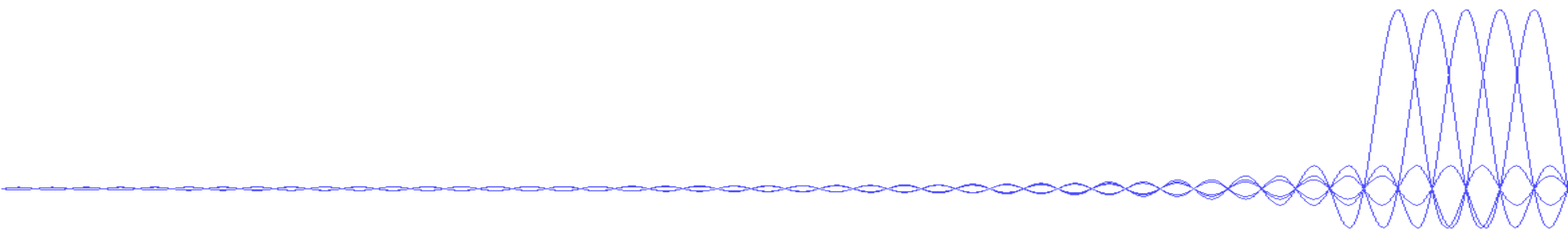
COMPUTER ENGINEERING



UIT
TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NHẬP MÔN MẠCH SỐ

CHƯƠNG 4: BÌA KARNAUGH





Nội dung

- Tổng quan
- Các dạng biểu diễn biểu thức logic
- Thiết kế một mạch số
- Bìa Karnaugh
 - Phương pháp rút gọn bìa Karnaugh
 - Bìa Karnaugh 2 biến
 - Bìa Karnaugh 3 biến
 - Bìa Karnaugh 4 biến
 - Bìa Karnaugh 5 biến
 - Biểu thức mang giá trị tùy định



Bìa Karnaugh

- M. Karnaugh, “The Map Method for Synthesis of combinatorial Logic Circuits”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Communications and Electronics, Vol. 72, pp. 593-599, November 1953.
- Bìa Karnaugh là một công cụ hình học để đơn giản hóa các biểu thức logic



Bìa Karnaugh

- **Bìa Karnaugh** là *biểu diễn của bảng sự thật* dưới dạng một ma trận các ô (matrix of squares/cells) trong đó mỗi ô tương ứng với dạng tích chuẩn (Minterm) hay dạng tổng chuẩn (Maxterm).
- Với một hàm có **n biến (literal)**, chúng ta cần một bảng sự thật có **2^n** hàng, tương ứng bìa Karnaugh có **2^n** ô (cell).
- Để biểu diễn một hàm logic, *một giá trị ngõ ra* trong bảng sự thật sẽ là một giá trị tương ứng trong *một ô (cell)* trong bìa Karnaugh



Phương pháp rút gọn bìa Karnaugh

- Bước 1: Vẽ bìa Karnaugh gồm 2^n ô có hàm logic có n biến ngõ vào
- Bước 2: Đặt giá trị ngõ vào và ngõ ra lên bìa Karnaugh
 - Giá trị ngõ vào giữa 2 ô liên tiếp **chỉ được khác nhau một bit**.
 - Giá trị ngõ ra đặt trong ô tương ứng với giá trị ngõ vào. Cần lưu ý trọng số của mỗi biến ngõ vào để đảm bảo giá trị ngõ ra được đặt đúng.
- Bước 3: Gom nhóm
 - Gom nhóm các ô liên kề nhau có giá trị ngõ ra giống nhau. **Các ô được xem là liên kề nhau khi ngõ vào của nó chỉ khác nhau 1 bit**. Có 2 phương pháp:
 - Gom nhóm theo Minterm: gom nhóm các ô có giá trị “1”
 - Gom nhóm theo Maxterm: gom nhóm các ô có giá trị “0”
 - Mỗi nhóm có thể có 2^i ô (32, 16, 8, 4, 2, 1 ô tương ứng với i là 5, 4, 3, 2, 1, 0)
 - Nhóm có khả năng gom nhóm lớn hơn cần được ưu tiên thực hiện trước. Một ô có thể được gom bởi nhiều nhóm khác nhau.
 - Gom nhóm kết thúc khi tất cả các giá trị “1” trong bìa Karnaugh đã được gom (theo Minterm), hoặc các giá trị “0” trong bìa đã được gom (theo Maxterm)



Phương pháp rút gọn bìa Karnaugh

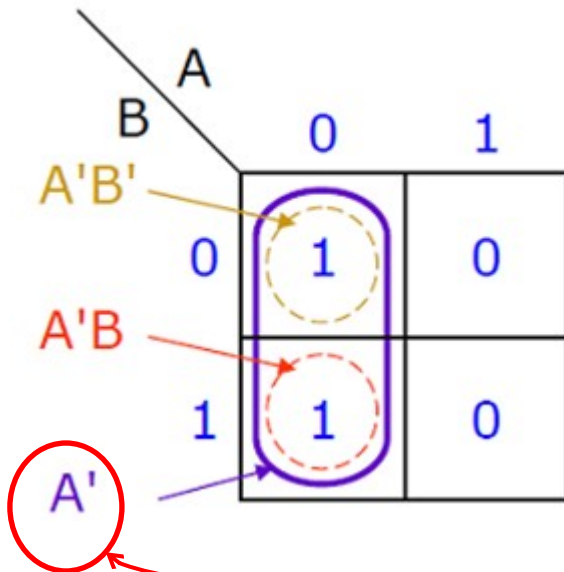
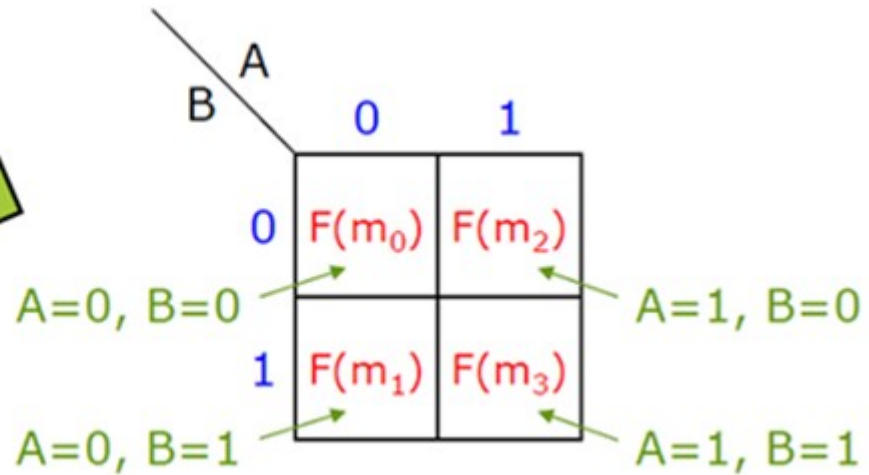
■ Bước 4: Rút gọn biểu thức

- ☐ Nhóm có 2^n ô liên kề nhau sẽ rút gọn được n biến.
- ☐ Mỗi một nhóm sẽ được biểu diễn thành một term của biểu thức rút gọn (theo Minterm hoặc Maxterm)
- ☐ Trong một nhóm, nếu biến ngõ vào nào thay đổi thì được bỏ đi khỏi term đó, nếu biến ngõ vào nào giữ nguyên thì sẽ được giữ lại trong term đó, theo quy tắc:
 - ☐ Nếu trong bước 3 gom nhóm theo Minterm: biến ngõ vào giữ nguyên nếu nó mang giá trị “1”, biến ngõ vào mang dấu bù nếu nó mang giá trị “0”.
 - ☐ Nếu trong bước 3 gom nhóm theo Maxterm: biến ngõ vào giữ nguyên nếu nó mang giá trị “0”, biến ngõ vào mang dấu bù nếu nó mang giá trị “1”.



Bìa Karnaugh 2 biến

	AB	F
(m_0)	00	1
(m_1)	01	1
(m_2)	10	0
(m_3)	11	0



$$F = A'B' + A'B = A'(B' + B) = A'$$



Bìa Karnaugh 3 biến

Ví dụ:

BC \ A	A	
	0	1
00	0	4
01	1	5
11	3	7
10	2	6

ABC	F
000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	0
110	1
111	0

BC \ A	A	
	0	1
00	0	1
01	0	0
11	1	0
10	1	1

$$F = A'BC' + A'BC + AB'C' + ABC' \quad (\text{đại số})$$

$$F = A'B + AC' + BC' \quad (\text{chưa tối ưu})$$

$$= A'B + AC' \quad (\text{tối ưu})$$



Bìa Karnaugh 3 biến

BC \ A	A	
	0	1
00	0	4
01	1	5
11	3	7
10	2	6

CÁCH 1

C \ AB	AB			
	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

CÁCH 2

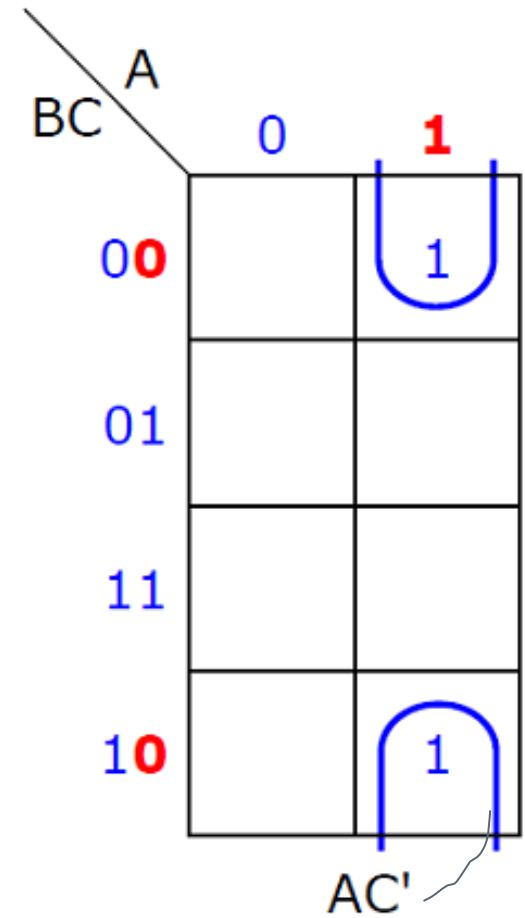
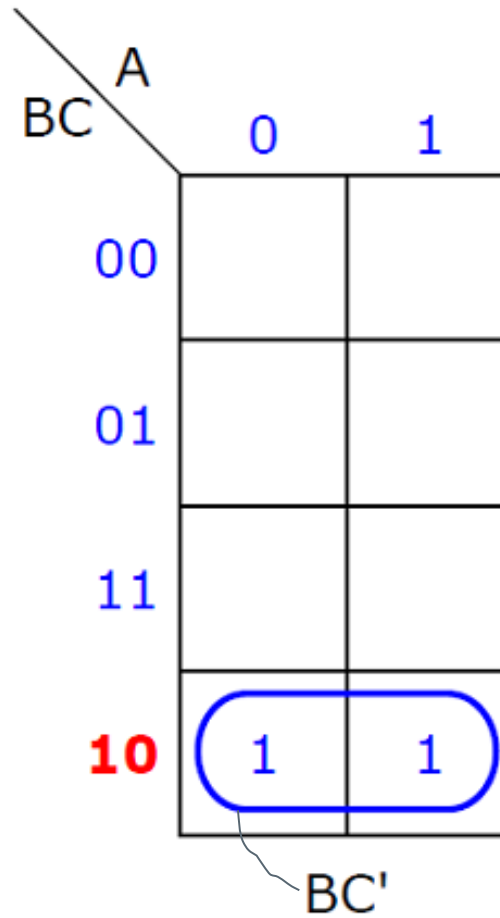
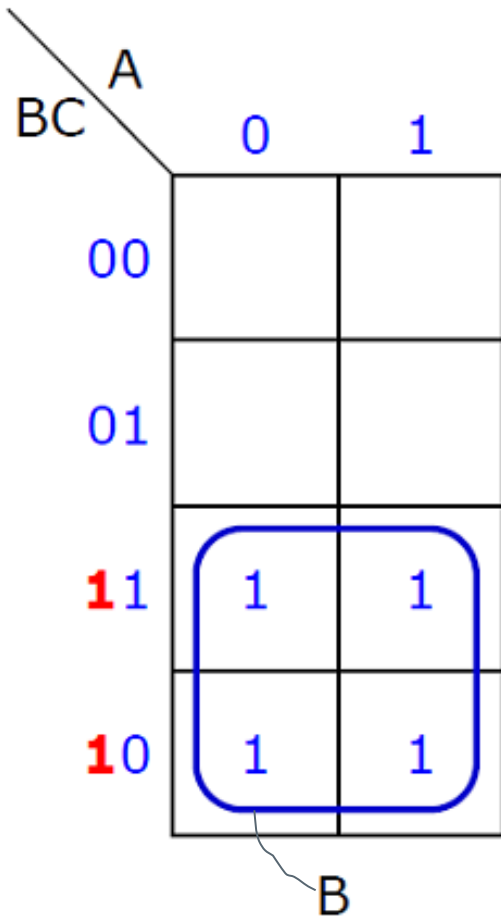
A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

CÁCH 3

Lưu ý: có thể sử dụng cách nào để biểu diễn bìa-K cũng được, nhưng phải lưu ý *trọng số của các biến* thì mới đảm bảo thứ tự các ô theo giá trị thập phân.



Bìa Karnaugh 3 biến





Bìa Karnaugh 3 biến

$$f(a,b,c) = abc' + b'c + a'$$

(chưa tối ưu)

	a	
bc	0	1
00	1	
01	1	1
11	1	
10	1	1



Bìa Karnaugh 3 biến

$$F = m_1 + m_3 + m_5$$
$$= M_0 M_2 M_4 M_6 M_7$$

		a	
		0	1
bc	00	0	0
	01	1	1
	11	1	0
	10	0	0





Bìa Karnaugh 3 biến

$$G = (m_1 + m_3 + m_5)'$$
$$= (M_0 M_2 M_4 M_6 M_7)'$$

G

		a	
		bc	
		0	1
bc	00	1	1
	01	0	0
	11	0	1
	10	1	1



G

a

bc



Bìa Karnaugh 3 biến

Ví dụ:

		x	
		0	1
yz	00		
	01	1	
	11	1	1
	10		1

Rút gọn chưa tối ưu

Rút gọn tối ưu



Bìa Karnaugh 3 biến

Ví dụ:

		a	
		0	1
bc	00	1	
	01	1	1
	11		1
	10	1	1



$F =$

:



Bìa Karnaugh 4 biến

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

minterm locations

Simplify

$F =$

ab					
cd		00	01	11	10
		1	1	1	1
00	1	1	1	1	1
01			1		
11			1	1	1
10	1	1	1	1	1



Bìa Karnaugh 4 biến

$$f_1 = \sum m(1, 3, 4, 5, 10, 12, 13)$$



Bìa Karnaugh 4 biến

$$f_2 = \sum m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$$



Bìa Karnaugh 5 biến

■ Ví dụ:

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$

A = 0					A = 1			
BC \ DE	00	01	11	10	10	11	01	00
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Vẽ bìa Karnaugh như hình bên để vẫn đảm bảo quy tắc: hai ô liên kề nhau chỉ được khác nhau 1 bit giá trị ngõ vào



Bìa Karnaugh 5 biến

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$

A=0					A=1			
BC \ DE	00	01	11	10	10	11	01	00
00	1	1					1	1
01	1		1	1	1	1	1	1
11			1	1	1	1		
10		1				1	1	



Bìa Karnaugh 5 biến

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$

A=0				A=1				
BC	00	01	11	10	10	11	01	00
DE	00	1	1				1	1
01	1		1	1	1	1	1	1
11			1	1	1	1		
10		1				1	1	

$$F = BE + B'CE' + B'C'D' + AB'D' + ACDE'$$



Bìa Karnaugh 5 biến

Phương pháp khác

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

A = 1



Bìa Karnaugh 5 biến

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1		
01	1		1	1
11			1	1
10		1		

A=0

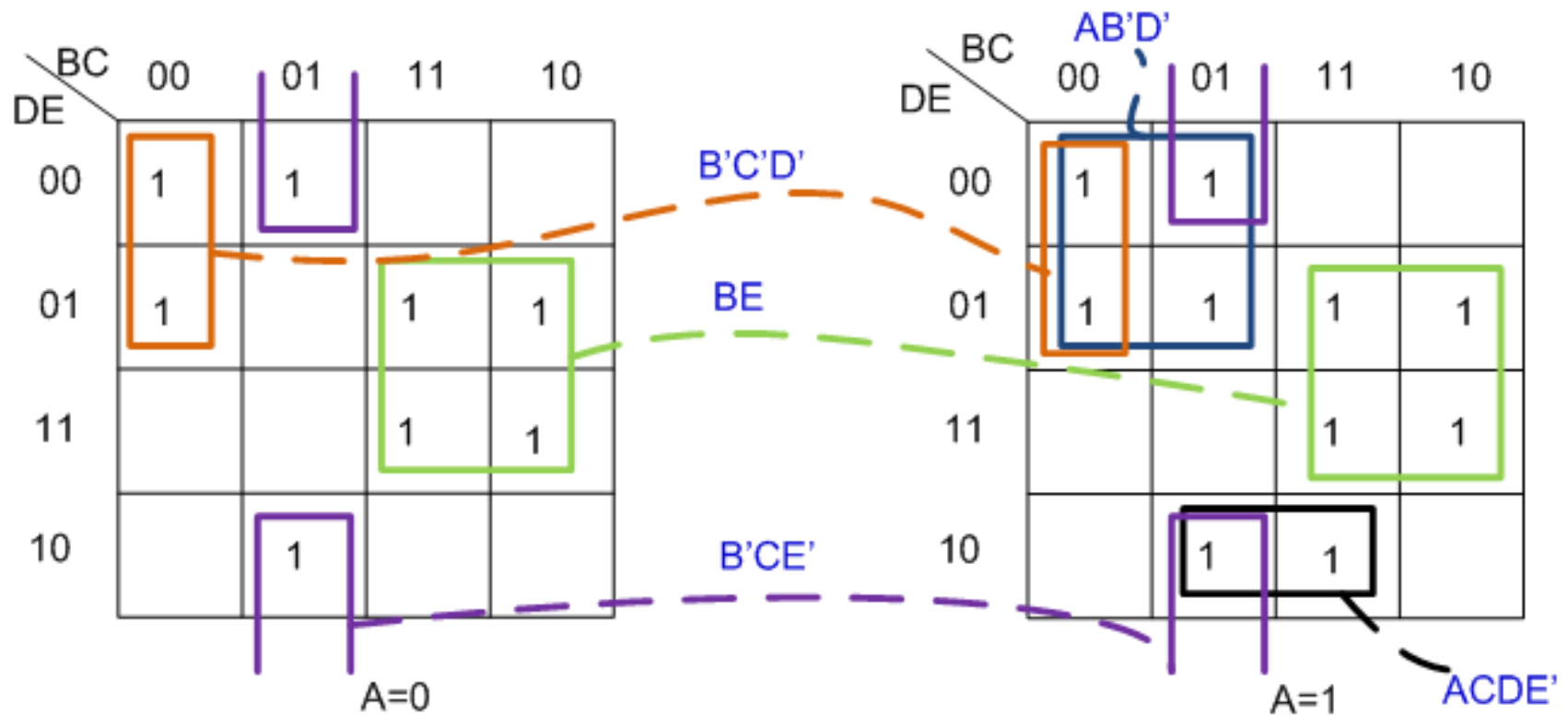
BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11			1	1
10		1	1	

A=1



Bìa Karnaugh 5 biến

$$F = \sum (31, 30, 29, 27, 25, 22, 21, 20, 17, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 0)$$



$$F = BE + B'CE' + B'C'D' + AB'D' + ACDE'$$



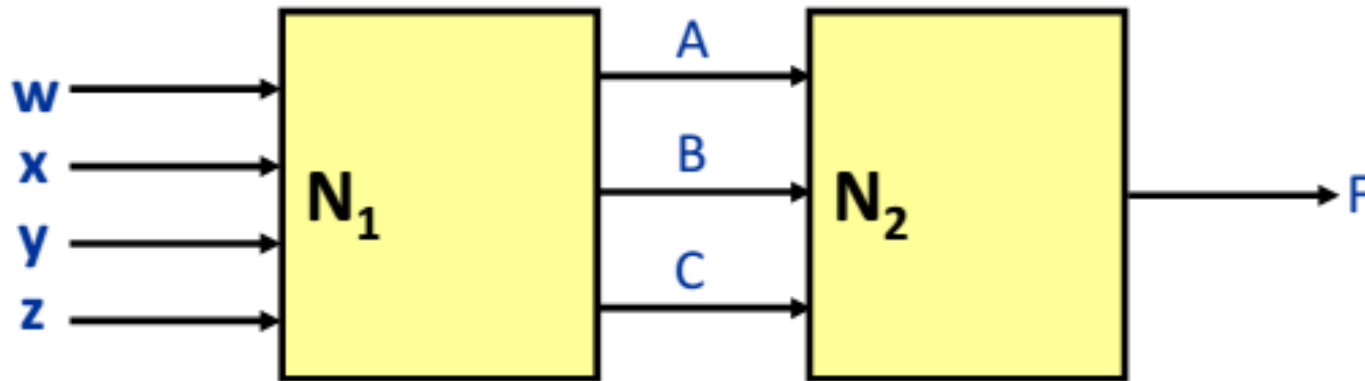
Đơn giản biểu thức theo Maxterm (Product of Sum)

■ Khoanh tròn giá trị 0 thay vì giá trị 1

Ví dụ: $f = x'z' + wyz + w'y'z' + x'y$



Biểu thức mang giá trị tùy định



- Giả thuyết: N_1 không bao giờ cho kết quả $ABC = 001$ và $ABC = 110$
- Câu hỏi : F cho ra giá trị gì trong trường hợp $ABC = 001$ và $ABC = 110$?
We don't care!!!



Biểu thức mang giá trị tùy định

- Trong trường hợp trên thì chúng ta phải làm thế nào để đơn giản N2?

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X 0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X 0
1	1	1	1

Giả sử $F(0,0,1) = 0$ và $F(1,1,0)=0$, ta có biểu thức sau:

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A'B'C' + A'BC' + A'BC + ABC \\&= A'C'(B' + B) + (A' + A)BC \\&= A'C' \cdot 1 + 1 \cdot BC \\&= A'C' + BC\end{aligned}$$



Biểu thức mang giá trị tùy định

- Tuy nhiên, nếu giả sử $F(0,0,1)=1$ và $F(1,1,0)=1$, ta có biểu thức sau:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	X 1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	X 1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= A'B'C' + A'B'C + A'BC' + A'BC + ABC' + ABC \\
 &= A'B'(C' + C) + A'B(C' + C) + AB(C' + C) \\
 &= A'B' \cdot 1 + A'B \cdot 1 + AB \cdot 1 \\
 &= A'B' + A'B + AB \\
 &= A'B' + A'B + A'B + AB \\
 &= A'(B' + B) + (A' + A)B \\
 &= A' \cdot 1 + 1 \cdot B \\
 &= A' + B
 \end{aligned}$$

So sánh với giả thuyết trước đó:
 $F(A,B,C) = A'C' + BC$, giải pháp nào chi phí ít hơn (tốt hơn)?



Biểu thức mang giá trị tùy định

Tất cả các ô 1 phải được khoanh tròn, nhưng với ô có giá trị X thì tùy chọn, các ô này chỉ được

- xem xét là 1 nếu đơn giản biểu thức theo dạng **SOP**
- hoặc xem xét là 0 nếu đơn giản biểu thức theo dạng **POS**

$$f = \sum m(1,3,5,7,9) + \sum d(6,12,13)$$

cd \ ab	00	01	11	10
00			X	
01	1	1	X	1
11	1	1		
10		X		

Simplify

$$f =$$

cd \ ab	00	01	11	10
00			X	
01	1	1	X	1
11	1	1		
10		X		



Tóm tắt nội dung chương học

- Qua Phần 2 - Chương 4, sinh viên cần nắm những nội dung chính sau:
 - Phương pháp rút gọn biểu thức logic để tối ưu thiết kế bằng bìa Karnaugh 2 biến, 3 biến, 4 biến và 5 biến

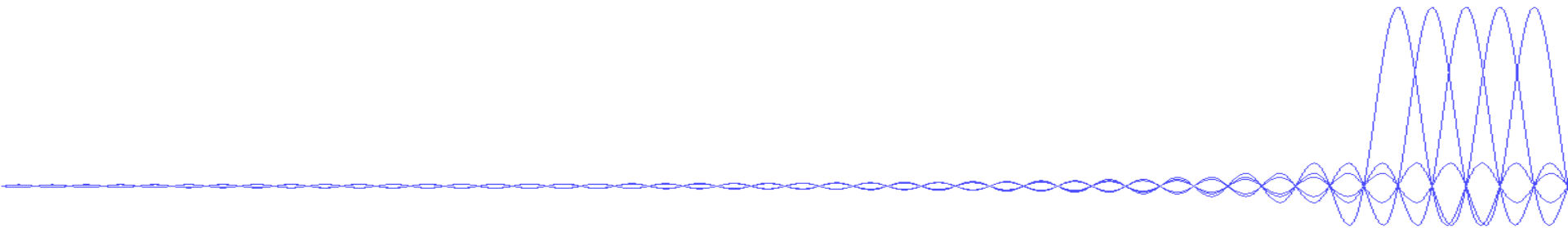


COMPUTER ENGINEERING



UIT
TRƯỜNG ĐẠI HỌC
CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Thảo luận?





■ Rút gọn biểu thức sau

$$z = \overline{A}B(\overline{D} + \overline{C}D) + B(A + \overline{A}CD)$$

□ Bằng các định lý Boolean

□ Bằng bìa K



Kiểm tra 15'

■ Rút gọn biểu thức sau

$$F(x,y,z) = xy + xz' + yz + xyz$$

□ Bằng các định lý Boolean

□ Bằng bìa K