

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

13 de junho de 2016

Plano de Aula

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Decidibilidade
 - O Problema da Parada
- 3 Método da Diagonalização

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Decidibilidade
 - O Problema da Parada
- 3 Método da Diagonalização

Pensamento



Pensamento



Frase

Young man, in mathematics you don't understand things.
You just get used to them.

Quem?

John von Neumann (1903-1957)

Cientista da computação
húngaro/americano.

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 **Revisão**
 - Decidibilidade
 - O Problema da Parada
- 3 Método da Diagonalização

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2 , identificar se $L_1 = L_2$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2 , identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B \rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B \rangle \in EQ_{AFD}$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceite as cadeias que são aceitas por A ou por B , mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$$

Corolário

$$L(C) = \emptyset \iff L(A) = L(B)$$

Problema da Igualdade de Linguagens

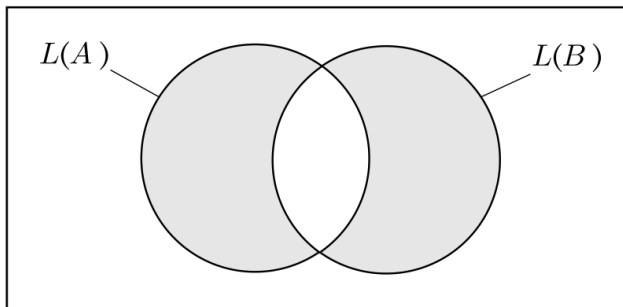


FIGURA 4.6

A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT F decide EQ_{AFD} .

F = “Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$, em que A e B são AFDs:

- 1 Construa o AFD C conforme descrito no Lema 4.1;
- 2 Rode MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C \rangle$;
- 3 Se T aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**.”

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Cuidado!

EQ_{GLC} **não** é uma linguagem decidível.

Relacionamento entre as classes de linguagens

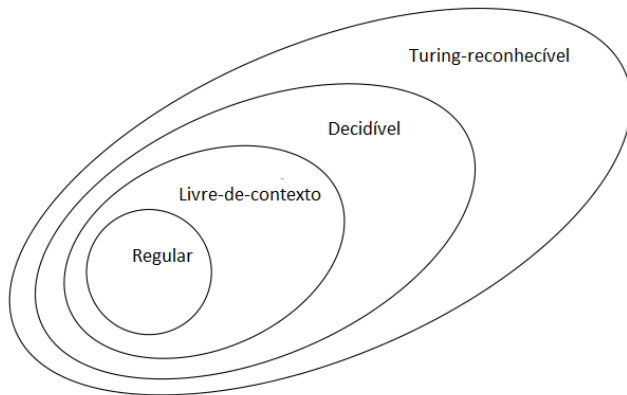


FIGURA 4.10

O relacionamento entre classes de linguagens

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω , identificar se M aceita ω .

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω , identificar se M aceita ω .

Problema

$A_{MT} = \{ \langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega \}$

Teorema 4.11

A_{MT} é indecidível.

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

$U =$ “Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

- 1 Simule M sobre a entrada ω ;
- 2 Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**.”

Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida A_{MT} .



regional.jatai

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

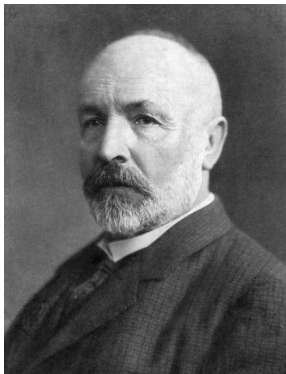
É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.

A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

Método da diagonalização



Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

Quem?

George Cantor (1845-1918)
Matemático russo.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!



Sumário

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Decidibilidade
 - O Problema da Parada
- 3 Método da Diagonalização

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B . Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B . Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Função Sobrejetora

Uma função f é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de B (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos A e B são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de A para B .

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

\mathbb{N} e P têm o mesmo tamanho

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

\mathbb{N} e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre \mathbb{N} e P ;

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

\mathbb{N} e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre \mathbb{N} e P ;
- $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ em que $f(n) = 2n$;

Método da diagonalização

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
\vdots	\vdots

Figura: Visualização de f através de uma tabela.

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Conjunto Contável

Um conjunto A é **contável** se é finito ou se tem o mesmo tamanho de \mathbb{N} .

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

\mathcal{Q} é contável (curiosamente)

Logo \mathcal{Q} é finito ou tem o mesmo tamanho de \mathbb{N} .

Método da diagonalização

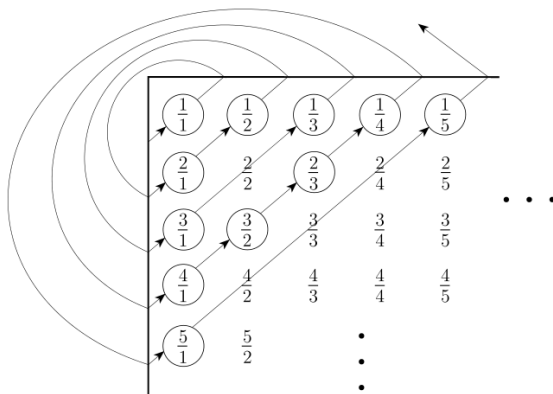


FIGURA 4.16

Uma correspondência de \mathcal{N} e \mathcal{Q}

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de \mathcal{Q} , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de \mathcal{Q} , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de \mathcal{Q} , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que \mathbb{R} é incontável introduzindo o método da diagonalização.

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de \mathcal{Q} , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que \mathbb{R} é incontável introduzindo o método da diagonalização.

Teorema 4.17

\mathbb{R} é incontável.

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

13 de junho de 2016