Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

17 de janeiro de 2018

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Instrução pelos Colegas
2. Decidibilidade
   - O Problema da Parada

Sumário

Pergunta 1

O problema da aceitação procura compreender se...

(A) uma cadeia descreve um modelo computacional.
(B) um modelo computacional reconhece expressões regulares.
(C) um modelo computacional aceita uma dada cadeia.
(D) uma cadeia é descrita por uma sequência de caracteres.

Pergunta 2

Na linguagem $A_{AFD} = \{\langle B, \omega \rangle \mid B$ é um AFD que aceita a cadeia de entrada $\omega\}$, qual é a afirmação **incorreta** sobre ela?

(A) A linguagem A_{AFD} é um subconjunto de $L(B)$.

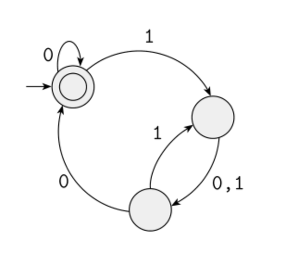
(B) B é a codificação de um AFD.

(C) A_{AFD} é a linguagem de todas as cadeias que contém a codificação de um AFD junto com uma cadeia que este AFD aceita.

(D) $\langle B, \omega \rangle$ é uma cadeia.

Pergunta 3

Qual das alternativas está correta, em relação ao AFD M ao lado?



(A) $A_{AFD} \in \langle M, 0100 \rangle$

(B) $\langle M, 0100 \rangle \in A_{AFD}$

(C) $\langle 0100, M \rangle \in A_{AFD}$

(D) $A_{AFD} \in \langle 0100, M \rangle$

Linguagens Decidíveis

Exemplos de Linguagens Decidíveis

São úteis porque

- Algumas linguagens decidíveis estão associadas a aplicações;
- Algumas linguagens aparentemente triviais não são decidíveis.

Problema da aceitação

Dado um modelo computacional MC e uma cadeia de entrada ω, identificar se MC aceita ω.

Problema da aceitação para AFDs

Problema da aceitação para AFDs

Dado um AFD B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFD} = \{\langle B, \omega\rangle \mid B \text{ é um AFD que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Estratégia de Resolução

Resolver o problema da aceitação para AFDs é decidir se $\omega \in A_{AFD}$.

UFG
Regional Jataí

Problema da aceitação para AFDs

Teorema 4.1

A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Ideia da Prova

$M =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFD, e ω, uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada ω;
2. Se a simulação termina em um estado de aceitação, **aceite**. Senão, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Problema da aceitação para AFDs

Detalhes de implementação

- A entrada $\langle B, \omega \rangle$ representa um AFD e uma cadeia;
  - Uma representação razoável de B seria uma lista de seus cinco componentes: Q, Σ, δ, q_0 e F;
  - M simula B de forma que M **aceita** se B estiver em um estado final, e **rejeita**, caso contrário.

UFG
Regional Jataí

Problema da aceitação para AFNs

Problema da aceitação para AFNs

Dado um AFN B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFN} = \{\langle B, \omega \rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle B, \omega \rangle \in A_{AFN}$.

Problema da aceitação para AFNs

Teorema 4.2

A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Prova

$N =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFN, e ω, uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C, usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.39;
2. Rode a MT M do Teorema 4.1 sobre a cadeia $\langle C, \omega \rangle$;
3. Se M aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Descrição

Dada uma linguagem L, identificar se $L = \emptyset$.

Problema aplicado a AFDs

$V_{AFD} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ é um AFD e } L(A) = \emptyset\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A \rangle \in V_{AFD}$.

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Teorema 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT T decide V_{AFD}.

T = "Sobre a entrada $\langle A \rangle$, em que A é uma AFD:

1. Marque o estado inicial de A;
2. Repita até que nenhum estado novo venha a ser marcado;
    1. Marque qualquer estado que tenha uma transição chegando nele a partir de qualquer estado que já está marcado.
3. Se nenhum estado final estiver marcado, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

Sumário

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

UFG
Regional Jataí

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B\rangle \in EQ_{AFD}$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Corolário

$L(C) = \emptyset \;\leftrightarrow\; L(A) = L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

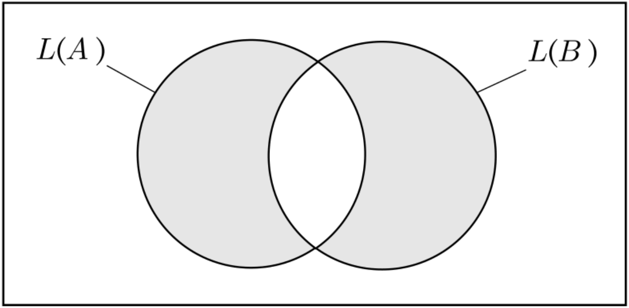


FIGURA 4.6
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT F decide EQ_{AFD}.

F = "Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$, em que A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito no Lema 4.1;
2. Rode MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C \rangle$;
3. Se T aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Cuidado!

EQ_{GLC} **não** é uma linguagem decidível.

Relacionamento entre as classes de linguagens

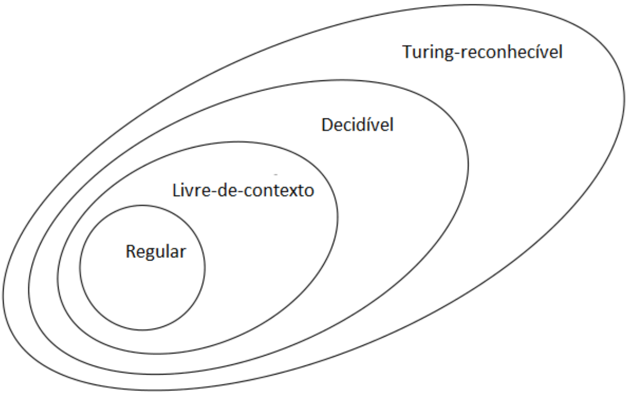


FIGURA 4.10
O relacionamento entre classes de linguagens

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Teorema 4.11

A_{MT} é indecidível.

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

UFG
Regional Jataí

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:
$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, \omega\rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida A_{MT}.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

O Problema da Parada

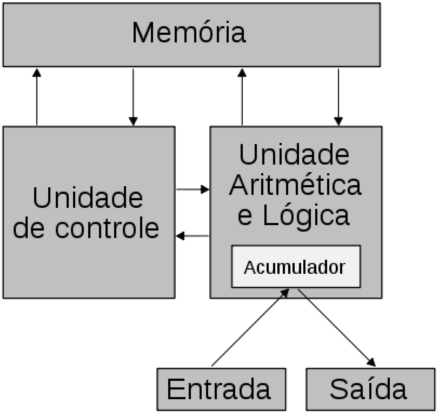


Figura: Arquitetura de von Neumann (1945).

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

17 de janeiro de 2018