Complexidade de Tempo

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de agosto de 2017

UFG Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Problema da Parada
   - Linguagem Turing-Irreconhecíveis

2. Complexidade de Tempo

UFG
Regional Jataí

Sumário

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}
- Vamos construir a MT D conforme a descrição abaixo:
  $D =$ "Sobre a entrada $\langle M \rangle$, em que M é uma MT:
  1. Rode H sobre a entrada $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
  2. Dê como saída o oposto do que H dá como saída; ou seja, se H aceita, *rejeite* e se H rejeita, *aceite*."
- Entretanto, $D(\langle D \rangle)$ leva a uma contradição.
- Logo, A_{MT} é indecidível.

UFG
Regional Jataí

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

Resumindo...

- H aceita $\langle M, \omega \rangle$ exatamente quando M aceita ω.
- D rejeita $\langle M \rangle$ exatamente quando M aceita $\langle M \rangle$.
- D rejeita $\langle D \rangle$ exatamente quando D aceita $\langle D \rangle$ (Absurdo!!!).

Problema da Parada

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \langle M_1 \rangle & \langle M_2 \rangle & \langle M_3 \rangle & \langle M_4 \rangle & \cdots \\
\hline
M_1 & aceite & rejeite & aceite & rejeite & \\
M_2 & aceite & aceite & aceite & aceite & \cdots \\
M_3 & rejeite & rejeite & rejeite & rejeite & \\
M_4 & aceite & aceite & rejeite & rejeite & \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}
$$

A entrada i, j é o valor de H sobre a entrada $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$.

Problema da Parada

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle D \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*	*rejeite*	*aceite*	*rejeite*		*aceite*	
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	$\cdots$	*aceite*	$\cdots$
M_3	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*		*rejeite*	
M_4	*aceite*	*aceite*	*rejeite*	*rejeite*		*aceite*	
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$		
D	*rejeite*	*rejeite*	*aceite*	*aceite*		?	
$\vdots$		$\vdots$					$\ddots$

Figura: Se D estiver na figura, uma contradição ocorre em "?".

UFG Regional Jataí

Linguagens Turing-irreconhecíveis

Teorema 4.22

Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Corolário 4.23

$\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

Sumário

Complexidade

Por que estudar complexidade?

Um problema pode ser até decidível, mas pode levar uma quantidade de tempo ou memória bastante elevada.

Complexidade

Por que estudar complexidade?

Um problema pode ser até decidível, mas pode levar uma quantidade de tempo ou memória bastante elevada.

Questões do estudo de complexidade

- Quanto tempo[espaço] leva[ocupa] um determinado algoritmo?
- O que faz um algoritmo gastar[ocupar] mais tempo[espaço] do que um outro?
- É possível classificar os algoritmos em termos de complexidade?

UFG
Regional Jataí

Complexidade de Tempo

Problema

Seja a linguagem $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$. Quanto tempo uma máquina de Turing simples precisa para decidir A?

Complexidade de Tempo

Problema

Seja a linguagem $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. Quanto tempo uma máquina de Turing simples precisa para decidir A?

Descrição de uma possível MT simples

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada ω:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita se ambos 0s e 1s permanecem sobre a fita:
    1. Faça uma varredura na fita, cortando um único 0 e um único 1.
3. Se 0s ainda permanecerem após todos os 1s tiverem sido cortados, ou se 1s ainda permanecerem após todos os 0s tiverem sido cortados, *rejeite*. Caso contrário, se nem 0s nem 1s permanecerem sobre a fita, *aceite*.

Complexidade de Tempo

Analisando a entrada

- Grafo: número de nós, número de arestas;
- Estrutura de dados: tamanho do vetor, altura da árvore;
- Cadeia: tamanho da cadeia de entrada.

Complexidade de Tempo

Analisando a entrada

- Grafo: número de nós, número de arestas;
- Estrutura de dados: tamanho do vetor, altura da árvore;
- Cadeia: tamanho da cadeia de entrada.

Tipos de Análise

- Análise do pior caso;
- Análise do caso médio;
- Análise do melhor caso.

Complexidade de Tempo

Analisando a entrada

- Grafo: número de nós, número de arestas;
- Estrutura de dados: tamanho do vetor, altura da árvore;
- Cadeia: tamanho da cadeia de entrada.

Tipos de Análise

- Análise do pior caso;
- Análise do caso médio;
- Análise do melhor caso.

Utilizaremos aqui...

O tamanho da cadeia de entrada e a análise de pior caso.

Complexidade de Tempo

Definição 7.1

Seja M uma máquina de Turing determinística que pára sobre todas as entradas. O tempo de execução ou **complexidade de tempo** de M é a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, em que $f(n)$ é o número máximo de passos que M usa sobre qualquer entrada de comprimento n.

Se $f(n)$ for o tempo de execução de M, dizemos que M *roda* em tempo $f(n)$ e que M é uma máquina de Turing *de tempo* $f(n)$. Costumeiramente usamos n para representar o comprimento da entrada.

Complexidade de Tempo

Notação O-Grande

Sejam f e g funções $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
Vamos dizer que $f(n) = O(g(n))$ se inteiros positivos c e n_0 existem tais que para todo inteiro $n \geq n_0$ em que

$$f(n) \leq c.g(n)$$

Quando $f(n) = O(g(n))$, dizemos que $g(n)$ é um **limitante superior** para $f(n)$, ou mais precisamente, que $g(n)$ é um **limitante superior assintótico** para $f(n)$, para enfatizar que estamos suprimindo fatores constantes.

UFG
Regional Jataí

Complexidade de Tempo

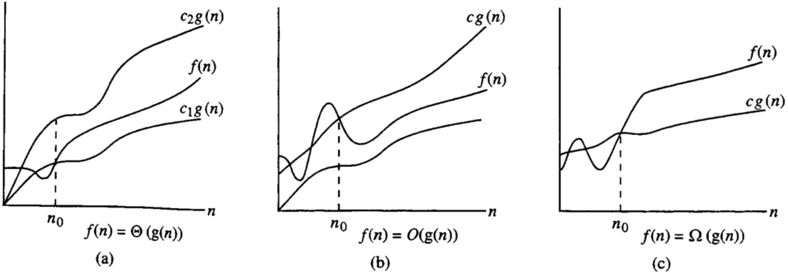

Figura: Comportamento das notações Θ, O e Ω.

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$
\begin{aligned}
O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (1)\\
&= O(5n^3) && (2)\\
&= O(n^3) && (3)
\end{aligned}
$$

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$O(f_1(n)) = O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) \quad (1)$$
$$= O(5n^3) \quad (2)$$
$$= O(n^3) \quad (3)$$

É verdade porque...

Basta admitir $c = 6$, e $n_0 = 10$. Logo

$$5n^3 + 2n^2 + 22n + 6 \leq 6n^3$$

para todo $n \geq 10$.

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$
\begin{aligned}
O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (4)\\
&= O(5n^3) && (5)\\
&= O(n^3) && (6)
\end{aligned}
$$

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$
\begin{aligned}
O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (4)\\
&= O(5n^3) && (5)\\
&= O(n^3) && (6)
\end{aligned}
$$

Também é verdade dizer que...

$f_1(n) = O(n^4)$, pois n^4 é maior que n^3 e portanto é ainda um limitante assintótico superior sobre f_1.

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$\begin{aligned} O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (4)\\ &= O(5n^3) && (5)\\ &= O(n^3) && (6) \end{aligned}$$

Também é verdade dizer que...

$f_1(n) = O(n^4)$, pois n^4 é maior que n^3 e portanto é ainda um limitante assintótico superior sobre f_1.

Mas...

$f_1(n) \neq O(n^2)$.

Complexidade de Tempo

$f_2(n) = \log_{13} n + 5$

Complexidade de Tempo

$f_2(n) = \log_{13} n + 5$

$$
\begin{aligned}
O(f_2(n)) &= O(\log_{13} n + 5) && (7)\\
&= O(\log_{13} n) && (8)\\
&= O(\log n) && (9)
\end{aligned}
$$

Complexidade de Tempo

$f_2(n) = \log_{13} n + 5$

$$
\begin{aligned}
O(f_2(n)) &= O(\log_{13} n + 5) && (7)\\
&= O(\log_{13} n) && (8)\\
&= O(\log n) && (9)
\end{aligned}
$$

Porque...

$$\log n = \log_{10} n = \frac{\log_{13} n}{\log_{13} 10}$$

Complexidade de Tempo

$f_3(n) = 3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2$

Complexidade de Tempo

$f_3(n) = 3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2$

$$
\begin{aligned}
O(f_3(n)) &= O(3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2) && (10)\\
&= O(3n\log_2 n) && (11)\\
&= O(n\log n) && (12)
\end{aligned}
$$

Complexidade de Tempo

$f_3(n) = 3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2$

$$
\begin{aligned}
O(f_3(n)) &= O(3n\log_2 n + 5n\log_2\log_2 n + 2) && (10)\\
&= O(3n\log_2 n) && (11)\\
&= O(n\log n) && (12)
\end{aligned}
$$

Porque...

$\log n$ domina sobre $\log\log n$.

UFG Regional Jataí

Complexidade de Tempo

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de agosto de 2017