

Classe NP-Completa

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

01 de agosto de 2016

Plano de Aula

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Classe NP
 - CLIQUE
- 3 *P versus NP*
- 4 NP-Completeness

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Classe NP
 - CLIQUE
- 3 *P versus NP*
- 4 NP-Compleitude

Pensamento



Pensamento



Frase

A força bruta, quando não é governada pela razão, desmorona sob o seu próprio peso.

Quem?

Quinto Horácio (65 a.C. - 8 a.C.)
Filósofo e poeta romano.

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 **Revisão**
 - Classe NP
 - CLIQUE
- 3 *P versus NP*
- 4 NP-Completeness

A Classe NP

Problema do caminho hamiltoniano em um grafo

$CAMHAM = \{\langle G, s, t \rangle \mid G \text{ é um grafo direcionado com um caminho hamiltoniano de } s \text{ para } t\}$.

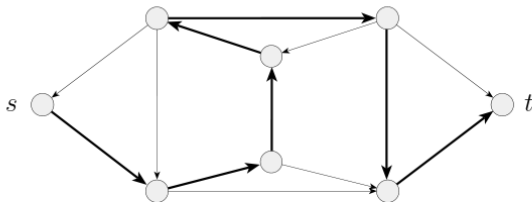


FIGURA 7.17

Um caminho hamiltoniano passa por todo nó exatamente uma vez

Classe NP

Característica importante

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

Outro problema polinomialmente verificável...

$COMPOSTOS = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}$

Exemplo

$33 \in COMPOSTOS \therefore$

- $3 \times 11 = 33$
- $3, 11 \in \mathbb{Z}$

Porém...

Existem problemas que não podem ser verificados em tempo polinomial. Exemplo: CAMHAM.

Classe NP

Definição 7.18

Um **verificador** para uma linguagem A é um algoritmo V , em que

$$A = \{\omega \mid V \text{ aceita } \langle \omega, c \rangle \text{ para alguma cadeia } c\}.$$

Detalhes

Medimos o tempo de um verificador somente em termos do comprimento de ω , portanto um **verificador de tempo polinomial** roda em tempo polinomial no comprimento de ω .

Nomenclaturas...

Uma linguagem A é **polinomialmente verificável** se ela tem um verificador de tempo polinomial.

Classe NP

Certificado (Prova)

- A informação adicional, representada por c , utilizada por um verificador é chamada de **certificado** (ou prova) da pertinência a uma dada linguagem.
- Para verificadores polinomiais, o certificado tem comprimento polinomial (no comprimento de ω).

Exemplo

- Um certificado para uma cadeia $\langle G, s, t \rangle \in \text{CAMHAM}$ é um caminho hamiltoniano de s a t .
- Um certificado para um número composto $x \in \text{COMPOSTOS}$ é um dos seus divisores.

Classe NP

Definição 7.19

NP é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

Teorema 7.20

Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial.

Definição 7.21

$\text{NTIME}(t(n)) = \{L \mid L \text{ é uma linguagem decidida por uma MT não-determinística de tempo } O(t(n))\}$.

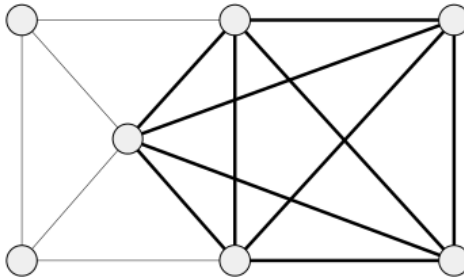
Corolário

$\text{NP} \cong \bigcup_k \text{NTIME}(n^k)$

A Classe NP

Problema do clique em um grafo

$CLIQUE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado com um } k\text{-clique} \}$.



A Classe NP

Teorema 7.24

CLIQUE \in NP

Prova (usando o clique c como certificado para V)

V = “Sobre a cadeia de entrada $\langle\langle G, k \rangle, c \rangle$:

- 1 Teste se c é um conjunto de k nós em G ;
- 2 Teste se G contém todas as arestas conectando nós em c ;
- 3 Se ambos os testes retornam positivo, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

A Classe NP

Teorema 7.24

$\text{CLIQUE} \in \text{NP}$

Prova (construindo a MTN M)

$M =$ “Sobre a cadeia de entrada $\langle G, k \rangle$, em que G é um grafo:

- 1 Não-deterministicamente selecione um subconjunto c de k nós de G ;
- 2 Teste se G contém todas as arestas conectando nós em c ;
- 3 Se sim, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Classe NP
 - CLIQUE
- 3 **P *versus* NP**
- 4 NP-Compleitude

P *versus* NP

Se admitirmos frouxamente que...

Solúvel em tempo polinomial \cong Solúvel “rapidamente”

P *versus* NP

Se admitirmos frouxamente que...

Solúvel em tempo polinomial \cong Solúvel “rapidamente”

Podemos admitir que...

P versus NP

Se admitirmos frouxamente que...

Solúvel em tempo polinomial \cong Solúvel “rapidamente”

Podemos admitir que...

- **P**: a classe de linguagens para as quais a pertinência pode ser *decidida* rapidamente;

P versus NP

Se admitirmos frouxamente que...

Solúvel em tempo polinomial \cong Solúvel “rapidamente”

Podemos admitir que...

- **P**: a classe de linguagens para as quais a pertinência pode ser *decidida* rapidamente;
- **NP**: a classe de linguagens para as quais a pertinência pode ser *verificada* rapidamente.

P versus NP

Temos que...

P versus NP

Temos que...

- $\text{HAMPATH} \in \text{NP}$ e
- $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$

P versus NP

Temos que...

- $\text{HAMPATH} \in \text{NP}$ e
- $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$

Mas não sabemos se...

P versus NP

Temos que...

- $\text{HAMPATH} \in \text{NP}$ e
- $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$

Mas não sabemos se...

- $\text{HAMPATH} \in \text{P}$ ou
- $\text{CLIQUE} \in \text{P}$

P versus NP

Temos que...

- $\text{HAMPATH} \in \text{NP}$ e
- $\text{CLIQUE} \in \text{NP}$

Mas não sabemos se...

- $\text{HAMPATH} \in \text{P}$ ou
- $\text{CLIQUE} \in \text{P}$

Sabem-se que...

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME} = \bigcup_k \text{TIME}(2^{n^k})$$

P versus NP

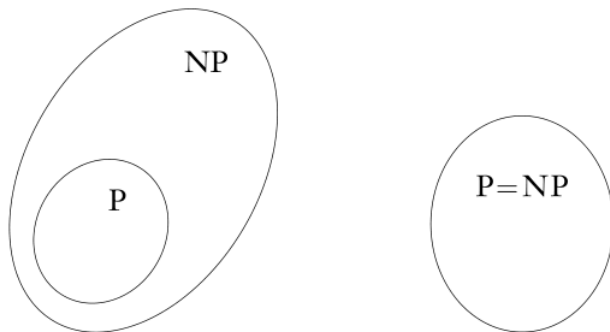


FIGURA 7.26
Uma dessas possibilidades é correta

Sumário

- 1 Pensamento
- 2 Revisão
 - Classe NP
 - CLIQUE
- 3 *P versus NP*
- 4 NP-Compleitude

NP-Completeness

Teorema de Cook-Levin (7.27)

$\text{SAT} \in \mathbf{P}$ se, e somente se, $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

NP-Compleitude

Teorema de Cook-Levin (7.27)

$\text{SAT} \in \mathbf{P}$ se, e somente se, $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Teorema 7.31

Se $A \leq_P B$ e $B \in \mathbf{P}$, então $A \in \mathbf{P}$.

NP-Compleitude

Teorema de Cook-Levin (7.27)

$\text{SAT} \in \mathbf{P}$ se, e somente se, $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Teorema 7.31

Se $A \leq_P B$ e $B \in P$, então $A \in P$.

Teorema 7.32

3SAT é redutível em tempo polinomial a CLIQUE.

NP-Completeness

Definição de NP-Completeness

Uma linguagem B é NP-completa se ela satisfaz duas condições:

- 1 B está em NP, e
- 2 toda A em NP é redutível em tempo polinomial a B .

NP-Completo

Definição de NP-Completo

Uma linguagem B é NP-completa se ela satisfaz duas condições:

- 1 B está em NP, e
- 2 toda A em NP é redutível em tempo polinomial a B .

Teorema 7.35

Se B for NP-completa e $B \in P$, então $P = NP$.

NP-Compleitude

Definição de NP-Compleitude

Uma linguagem B é NP-completa se ela satisfaz duas condições:

- 1 B está em NP, e
- 2 toda A em NP é redutível em tempo polinomial a B .

Teorema 7.35

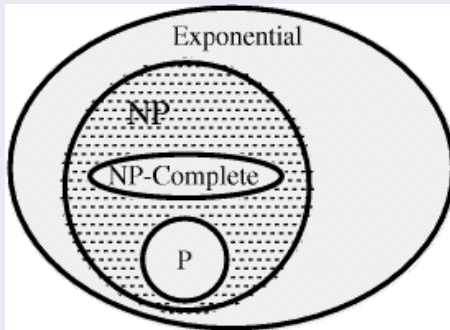
Se B for NP-completa e $B \in P$, então $P = NP$.

Teorema 7.36

Se B for NP-completa e $B \leq_p C$ para $C \in NP$, então C é NP-completa.

P versus NP

Se $P \subseteq NP$, então...



Classe NP-Completa

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

01 de agosto de 2016