Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de junho de 2016

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- **Problema 4.12:**
  Seja $A = \{\langle R, S\rangle \mid R$ e S são expressões regulares e $L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostre que A é decidível.
- Candidaturas até amanhã (07 de junho, 09h30);
- Apresentação e resposta por escrito $\rightarrow$
  Segunda (14 de junho, 11h30);
- 20 minutos de apresentação.

Candidato

???

UFG
Regional Jataí

Sumário

UFG
Regional Jataí

Pensamento

Pensamento

Frase

Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.

Quem?

John von Neumann (1903-1957)
Cientista da computação húngaro/americano.

UFG Regional Jataí

Sumário

Introdução

Propósitos da Teoria da Computação

- Conhecer o poder dos algoritmos;
- Explorar os limites da solubilidade algorítmica;
- Identificar algoritmos insolúveis.

Por que devemos estudar insolubilidade?

- Relaxamento dos requisitos;
- Conhecimento das limitações dos modelos computacionais.

UFG
Regional Jataí

Linguagens Decidíveis

Exemplos de Linguagens Decidíveis

São úteis porque

- Algumas linguagens decidíveis estão associadas a aplicações;
- Algumas linguagens aparentemente triviais não são decidíveis.

Problema da aceitação

Dado um modelo computacional MC e uma cadeia de entrada ω, identificar se MC aceita ω.

Problema da aceitação para AFDs

Problema da aceitação para AFDs

Dado um AFD B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFD} = \{\langle B, \omega \rangle \mid B \text{ é um AFD que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Estratégia de Resolução

Resolver o problema da aceitação para AFDs é decidir se $\omega \in A_{AFD}$.

Problema da aceitação para AFDs

Teorema 4.1

A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Ideia da Prova

$M =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFD, e ω, uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada ω;
2. Se a simulação termina em um estado de aceitação, **aceite**. Senão, **rejeite**."

Problema da aceitação para AFDs

Detalhes de implementação

- A entrada $\langle B, \omega \rangle$ representa um AFD e uma cadeia;
    - Uma representação razoável de B seria uma lista de seus cinco componentes: Q, Σ, δ, q_0 e F;
    - M simula B de forma que M **aceita** se B estiver em um estado final, e **rejeita**, caso contrário.

Problema da aceitação para AFNs

Problema da aceitação para AFNs

Dado um AFN B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFN} = \{\langle B, \omega\rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle B, \omega\rangle \in A_{AFN}$.

Problema da aceitação para AFNs

Teorema 4.2

A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Prova

$N =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFN, e ω, uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C, usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.39;
2. Rode a MT M do Teorema 4.1 sobre a cadeia $\langle C, \omega \rangle$;
3. Se M aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Descrição

Dada uma linguagem L, identificar se $L = \emptyset$.

Problema aplicado a AFDs

$V_{AFD} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ é um AFD e } L(A) = \emptyset\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A \rangle \in V_{AFD}$.

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Teorema 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Teorema 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT T decide V_{AFD}.

$T =$ "Sobre a entrada $\langle A \rangle$, em que A é uma AFD:

1. Marque o estado inicial de A;
2. Repita até que nenhum estado novo venha a ser marcado;
    1. Marque qualquer estado que tenha uma transição chegando nele a partir de qualquer estado que já está marcado.
3. Se nenhum estado final estiver marcado, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

Sumário

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B\rangle \in EQ_{AFD}$.

UFG
Regional Jataí

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Corolário

$L(C) = \emptyset \leftrightarrow L(A) = L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

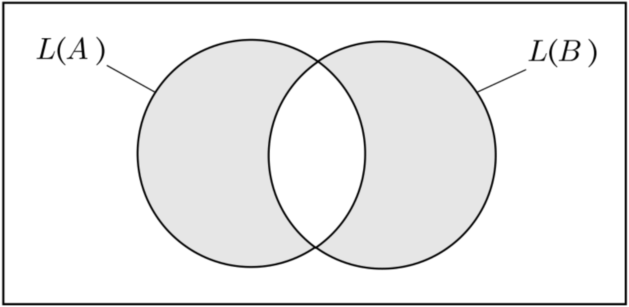


FIGURA 4.6
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT F decide EQ_{AFD}.
F = "Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$, em que A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito no Lema 4.1;
2. Rode MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C \rangle$;
3. Se T aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Cuidado!

EQ_{GLC} **não** é uma linguagem decidível.

Relacionamento entre as classes de linguagens

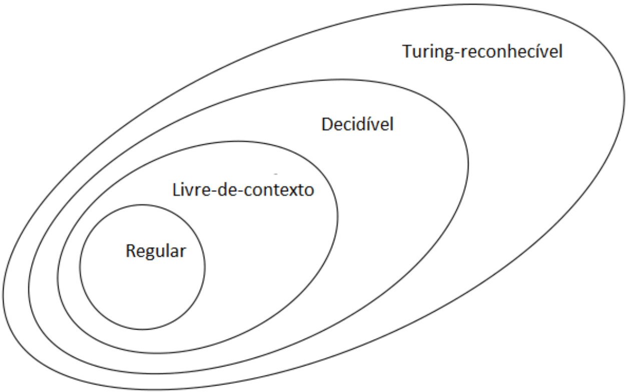


FIGURA 4.10
O relacionamento entre classes de linguagens

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$$

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Teorema 4.11

A_{MT} é indecidível.

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:
U = "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida A_{MT}.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

O Problema da Parada

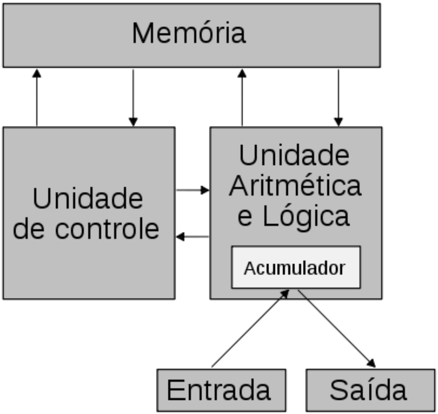
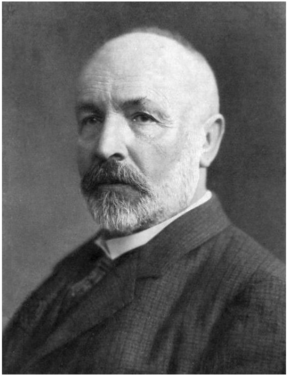


Figura: Arquitetura de von Neumann (1945).

Método da diagonalização



Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

Quem?

George Cantor (1845-1918)

Matemático russo.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Função Sobrejetora

Uma função f é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de B (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \to B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos A e B são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de A para B.

UFG
Regional Jataí

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de junho de 2016