Classe P

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

10 de agosto de 2017

Plano de Aula

1. Revisão
   - Complexidade de Tempo

2. Classe P
   - Complexidade entre Modelos

Sumário

Complexidade

Por que estudar complexidade?

Um problema pode ser até decidível, mas pode levar uma quantidade de tempo ou memória bastante elevada.

Questões do estudo de complexidade

- Quanto tempo[espaço] leva[ocupa] um determinado algoritmo?
- O que faz um algoritmo gastar[ocupar] mais tempo[espaço] do que um outro?
- É possível classificar os algoritmos em termos de complexidade?

UFG
Regional Jataí

Complexidade de Tempo

Problema

Seja a linguagem $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. Quanto tempo uma máquina de Turing simples precisa para decidir A?

Descrição de uma possível MT simples

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada ω:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita se ambos 0s e 1s permanecem sobre a fita:
    1. Faça uma varredura na fita, cortando um único 0 e um único 1.
3. Se 0s ainda permanecerem após todos os 1s tiverem sido cortados, ou se 1s ainda permanecerem após todos os 0s tiverem sido cortados, *rejeite*. Caso contrário, se nem 0s nem 1s permanecerem sobre a fita, *aceite*.

Complexidade de Tempo

Analisando a entrada

- Grafo: número de nós, número de arestas;
- Estrutura de dados: tamanho do vetor, altura da árvore;
- Cadeia: tamanho da cadeia de entrada.

Tipos de Análise

- Análise do pior caso;
- Análise do caso médio;
- Análise do melhor caso.

Utilizaremos aqui...

O tamanho da cadeia de entrada e a análise de pior caso.

Complexidade de Tempo

Definição 7.1

Seja M uma máquina de Turing determinística que pára sobre todas as entradas. O tempo de execução ou **complexidade de tempo** de M é a função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, em que $f(n)$ é o número máximo de passos que M usa sobre qualquer entrada de comprimento n.

Se $f(n)$ for o tempo de execução de M, dizemos que M *roda* em tempo $f(n)$ e que M é uma máquina de Turing *de tempo* $f(n)$. Costumeiramente usamos n para representar o comprimento da entrada.

Complexidade de Tempo

Notação O-Grande

Sejam f e g funções $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.
Vamos dizer que $f(n) = O(g(n))$ se inteiros positivos c e n_0 existem tais que para todo inteiro $n \geq n_0$ em que

$$f(n) \leq c.g(n)$$

Quando $f(n) = O(g(n))$, dizemos que $g(n)$ é um **limitante superior** para $f(n)$, ou mais precisamente, que $g(n)$ é um **limitante superior assintótico** para $f(n)$, para enfatizar que estamos suprimindo fatores constantes.

UFG
Regional Jataí

Complexidade de Tempo

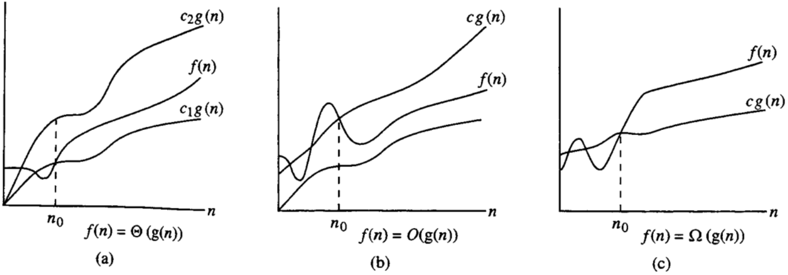


Figura: Comportamento das notações Θ, O e Ω.

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$
\begin{aligned}
O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (1)\\
&= O(5n^3) && (2)\\
&= O(n^3) && (3)
\end{aligned}
$$

É verdade porque...

Basta admitir $c = 6$, e $n_0 = 10$. Logo

$$5n^3 + 2n^2 + 22n + 6 \leq 6n^3$$

para todo $n \geq 10$.

Complexidade de Tempo

$f_1(n) = 5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$

$$\begin{aligned} O(f_1(n)) &= O(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) && (4) \\ &= O(5n^3) && (5) \\ &= O(n^3) && (6) \end{aligned}$$

Também é verdade dizer que...

$f_1(n) = O(n^4)$, pois n^4 é maior que n^3 e portanto é ainda um limitante assintótico superior sobre f_1.

Mas...

$f_1(n) \neq O(n^2)$.

Complexidade de Tempo

$f_2(n) = \log_{13} n + 5$

$$\begin{aligned} O(f_2(n)) &= O(\log_{13} n + 5) && (7) \\ &= O(\log_{13} n) && (8) \\ &= O(\log n) && (9) \end{aligned}$$

Porque...

$$\log n = \log_{10} n = \frac{\log_{13} n}{\log_{13} 10}$$

Sumário

Complexidade de Tempo

Definição 7.7

Seja $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função. Defina a **classe de complexidade de tempo**, **TIME**$(t(n))$, como sendo a coleção de todas as linguagens que são decidíveis por uma máquina de Turing de tempo $O(t(n))$.

Complexidade de Tempo

Definição 7.7

Seja $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ uma função. Defina a **classe de complexidade de tempo**, $\textbf{TIME}(t(n))$, como sendo a coleção de todas as linguagens que são decidíveis por uma máquina de Turing de tempo $O(t(n))$.

Exemplo

- $A = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$
- $A \in \textbf{TIME}(n^2)$, pois

UFG
Regional Jataí

Complexidade de Tempo

Definição 7.7

Seja $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função. Defina a **classe de complexidade de tempo**, **TIME($t(n)$)**, como sendo a coleção de todas as linguagens que são decidíveis por uma máquina de Turing de tempo $O(t(n))$.

Exemplo

- $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$
- $A \in$ **TIME(n^2)**, pois
- M_1 decide A em tempo $O(n^2)$

Complexidade de Tempo

Problema

Seja a linguagem $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. Quanto tempo uma máquina de Turing simples precisa para decidir A?

Descrição de uma possível MT simples

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada ω:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita se ambos 0s e 1s permanecem sobre a fita:
    1. Faça uma varredura na fita, cortando um único 0 e um único 1.
3. Se 0s ainda permanecerem após todos os 1s tiverem sido cortados, ou se 1s ainda permanecerem após todos os 0s tiverem sido cortados, *rejeite*. Caso contrário, se nem 0s nem 1s permanecerem sobre a fita, *aceite*.

Complexidade de Tempo

Problema

Existe uma máquina que decide assintoticamente a linguagem A mais rapidamente?

Complexidade de Tempo

Problema

Existe uma máquina que decide assintoticamente a linguagem A mais rapidamente?

Com outras palavras...

$A \in \mathbf{TIME}(t(n))$, para algum $t(n) = o(n^2)$?

Complexidade de Tempo

Descrição de uma outra MT simples

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada ω:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita enquanto alguns 0s e alguns 1s permanecem sobre a fita:
   1. Faça uma varredura na fita, verificando se o número total de 0s e 1s remanescentes é par ou ímpar. Se for ímpar, *rejeite*.
   2. Faça uma varredura novamente na fita,
      cortando alternadamente um 0 não e outro sim
      (começando com o primeiro 0)
      e então cortando alternadamente um 1 não e outro sim
      (começando com o primeiro 1).
3. Se nenhum 0 e nenhum 1 permanecer sobre a fita, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

Complexidade de Tempo

Problema

Podemos decidir a linguagem A em tempo $O(n)$ (também chamado **tempo linear**)?

Complexidade de Tempo

Problema

Podemos decidir a linguagem A em tempo $O(n)$ (também chamado **tempo linear**)?

Sim... é possível!

Se utilizarmos uma máquina de Turing com duas fitas!

Complexidade de Tempo

Descrição de uma outra MT simples

M_3 = "Sobre a cadeia de entrada ω:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Faça uma varredura nos 0s sobre a fita 1 até o primeiro 1. Ao mesmo tempo, copie os 0s para a fita 2.
3. Faça uma varredura nos 1s sobre a fita 1 até o final da entrada. Para cada 1 lido sobre a fita 1, corte um 0 sobre a fita 2. Se todos os 0s estiverem cortados antes que todos os 1s sejam lidos, *rejeite*.
4. Se todos os 0s tiverem agora sido cortados, *aceite*. Se algum 0 permanecer, *rejeite*.

Relacionamentos de Complexidade entre Modelos

Teorema 7.8

Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing multifita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $O(t^2(n))$.

Relacionamentos de Complexidade entre Modelos

Teorema 7.8

Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing multifita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $O(t^2(n))$.

Teorema 7.11

Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing não-determinística de uma única fita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $2^{O(t(n))}$.

A Classe P

Diferenças de complexidade de tempo

- MT simples x MT multi-fita:
  potência quadrática (ou *polinomial*)
- MT simples x MT não-determinística:
  no máximo *exponencial*.

A Classe P

Diferenças entre as taxas de crescimento

Exemplo: n^3 e 2^n

A Classe P

Diferenças entre as taxas de crescimento

Exemplo: n^3 e 2^n

- Admita $n = 1000$;

A Classe P

Diferenças entre as taxas de crescimento

Exemplo: n^3 e 2^n

- Admita $n = 1000$;
- Logo, $n^3 = 1$ bilhão;

A Classe P

Diferenças entre as taxas de crescimento

Exemplo: n^3 e 2^n

- Admita $n = 1000$;
- Logo, $n^3 = 1$ bilhão;
- Mas, 2^n é maior que o número de átomos do universo.

A Classe P

Definição 7.12

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita.
Em outras palavras

$$\mathbf{P} = \bigcup_{k} \mathbf{TIME}\left(n^{k}\right).$$

A Classe P

Definição 7.12

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita. Em outras palavras

$$\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}\left(n^k\right).$$

P é importante porque...

A Classe P

Definição 7.12

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita.
Em outras palavras

$$\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}\left(n^k\right).$$

P é importante porque...

- **P** é invariante para todos os modelos de computação polinomialmente equivalentes à máquina de Turing determinística de uma única fita;

A Classe P

Definição 7.12

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita. Em outras palavras

$$\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}\left(n^k\right).$$

P é importante porque...

- **P** é invariante para todos os modelos de computação polinomialmente equivalentes à máquina de Turing determinística de uma única fita;
- **P** corresponde aproximadamente à classe de problemas que são realisticamente solúveis em um computador.

A Classe P

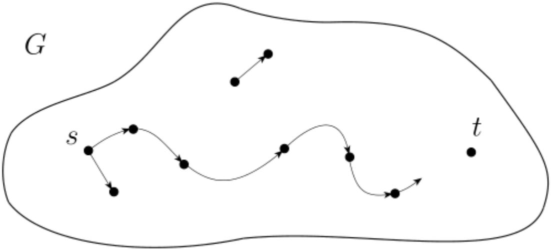
Problema do caminho em um grafo

$CAM = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ é um grafo direcionado que tem um caminho direcionado de s para $t\}$.

A Classe P

Problema do caminho em um grafo

$CAM = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ é um grafo direcionado que tem um caminho direcionado de s para $t\}$.



A Classe P

Teorema 7.14

$CAM \in \mathbf{P}$

A Classe P

Teorema 7.14

$CAM \in \mathbf{P}$

Prova

$M =$ "Sobre a cadeia de entrada $\langle G, s, t\rangle$ em que G é um grafo direcionado com nós s e t:

1. Ponha uma marca sobre o nó s.
2. Repita o seguinte até que nenhum nó adicional seja marcado:
    1. Faça uma varredura em todas as arestas de G. Se uma aresta (a, b) for encontrada indo de um nó marcado a para um nó não marcado b, marque o nó b.
3. Se t estiver marcado, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

Classe P

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

10 de agosto de 2017