# Classe NP

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

**26 de julho de 2016**

UFG
Regional Jataí

# Plano de Aula

1. Pensamento
2. Revisão
    - Classe P
    - Classe NP
3. Classe NP
    - CLIQUE

# Sumário

# Pensamento

# Pensamento

## Frase

A força bruta, quando não é governada pela razão, desmorona sob o seu próprio peso.

## Quem?

**Quinto Horácio (65 a.C. - 8 a.C.)**
Filósofo e poeta romano.

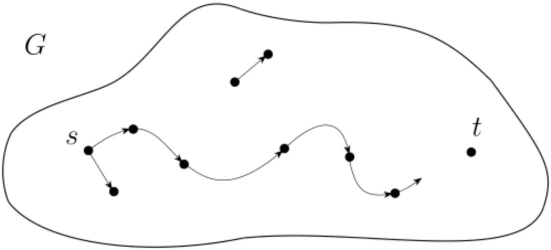
UFG
Regional Jataí

# Sumário

# A Classe P

## Problema do caminho em um grafo

$CAM = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ é um grafo direcionado que tem um caminho direcionado de $s$ para $t\}$.



# A Classe P

## Teorema 7.14

$CAM \in \mathbf{P}$

## Prova

$M =$ "Sobre a cadeia de entrada $\langle G, s, t \rangle$ em que $G$ é um grafo direcionado com nós $s$ e $t$:

1. Ponha uma marca sobre o nó $s$.
2. Repita o seguinte até que nenhum nó adicional seja marcado:
    1. Faça uma varredura em todas as arestas de $G$. Se uma aresta $(a, b)$ for encontrada indo de um nó marcado $a$ para um nó não marcado $b$, marque o nó $b$.
3. Se $t$ estiver marcado, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

# A Classe P

**Problema dos números primos entre si**

PRIM-ES $= \{\langle x, y\rangle \mid x$ e $y$ são primos entre si $\}$.

**Teorema 7.15**

PRIM-ES $\in$ **P**

# A Classe P

## Prova (Parte 1): Algoritmo de Euclides (E)

$E =$ "Sobre a cadeia de entrada $\langle x, y \rangle$ em que $x$ e $y$ são números naturais em binário:

1. Repita até que $y = 0$:
    1. Atribua $x \leftarrow x \bmod y$.
    2. Intercambie $x$ e $y$.
2. Dê como saída $x$".

## Prova (Parte 2): Máquina de Turing que decide PRIM-ES

$R =$ "Sobre a cadeia de entrada $\langle x, y \rangle$ em que $x$ e $y$ são números naturais em binário:

1. Rode $E$ sobre $\langle x, y \rangle$.
2. Se o resultado for 1, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*".

# Classe NP

## Questão

- Tentativas de evitar a força bruta em alguns problemas não têm sido bem sucedidas.
- Não se sabe se existem algoritmos de tempo polinomial que resolvem determinados problemas.

## Possíveis soluções...

- Os algoritmos polinomiais para estes problemas utilizam técnicas desconhecidas; *ou*
- Os algoritmos polinomiais para estes problemas simplesmente **não existem**.

## Curioso...

Existe um grupo de problemas deste tipo que, existindo um algoritmo polinomial que resolve um destes problemas, é possível resolver todos os problemas do grupo.

UFG
Regional Jataí

# Sumário

# A Classe NP

**Problema do caminho hamiltoniano em um grafo**

$CAMHAM = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ é um grafo direcionado com um caminho hamiltoniano de $s$ para $t\}$.

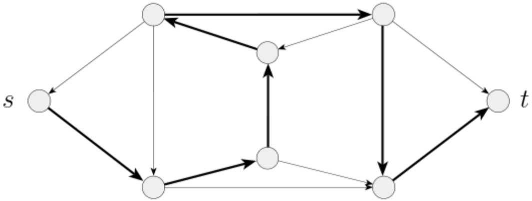



FIGURA 7.17
Um caminho hamiltoniano passa por todo nó exatamente uma vez

UFG
Regional Jataí

# Classe NP

## Característica importante

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

# Classe NP

**Característica importante**

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

**Outro problema polinomialmente verificável...**

$COMPOSTOS = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}$

# Classe NP

**Característica importante**

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

**Outro problema polinomialmente verificável...**

$COMPOSTOS = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}$

**Exemplo**

$33 \in COMPOSTOS \therefore$

# Classe NP

### Característica importante

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

### Outro problema polinomialmente verificável...

$COMPOSTOS = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}$

### Exemplo

$33 \in COMPOSTOS \therefore$

- $3 \times 11 = 33$
- $3, 11 \in \mathbb{Z}$

# Classe NP

## Característica importante

O problema *CAMHAM* tem **verificabilidade polinomial**

## Outro problema polinomialmente verificável...

$COMPOSTOS = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}$

## Exemplo

$33 \in COMPOSTOS \therefore$

- $3 \times 11 = 33$
- $3, 11 \in \mathbb{Z}$

## Porém...

Existem problemas que não podem ser verificados em tempo polinomial. Exemplo: $\overline{CAMHAM}$.

# Classe NP

## Definição 7.18

Um **verificador** para uma linguagem $A$ é um algoritmo $V$, em que

$$A = \{\omega \mid V \text{ aceita } \langle \omega, c \rangle \text{ para alguma cadeia } c\}.$$

# Classe NP

## Definição 7.18

Um **verificador** para uma linguagem $A$ é um algoritmo $V$, em que

$$A = \{\omega \mid V \text{ aceita } \langle \omega, c \rangle \text{ para alguma cadeia } c\}.$$

## Detalhes

Medimos o tempo de um verificador somente em termos do comprimento de $\omega$, portanto um **verificador de tempo polinomial** roda em tempo polinomial no comprimento de $\omega$.

UFG
Regional Jataí

# Classe NP

## Definição 7.18

Um **verificador** para uma linguagem $A$ é um algoritmo $V$, em que

$$A = \{\omega \mid V \text{ aceita } \langle \omega, c \rangle \text{ para alguma cadeia } c\}.$$

## Detalhes

Medimos o tempo de um verificador somente em termos do comprimento de $\omega$, portanto um **verificador de tempo polinomial** roda em tempo polinomial no comprimento de $\omega$.

## Nomenclaturas...

Uma linguagem $A$ é **polinomialmente verificável** se ela tem um verificador de tempo polinomial.

# Classe NP

## Certificado (Prova)

- A informação adicional, representada por $c$, utilizada por um verificador é chamada de **certificado** (ou prova) da pertinência a uma dada linguagem.

# Classe NP

## Certificado (Prova)

- A informação adicional, representada por $c$, utilizada por um verificador é chamada de **certificado** (ou prova) da pertinência a uma dada linguagem.
- Para verificadores polinomiais, o certificado tem comprimento polinomial (no comprimento de $\omega$).

# Classe NP

## Certificado (Prova)

- A informação adicional, representada por $c$, utilizada por um verificador é chamada de **certificado** (ou prova) da pertinência a uma dada linguagem.
- Para verificadores polinomiais, o certificado tem comprimento polinomial (no comprimento de $\omega$).

## Exemplo

- Um certificado para uma cadeia $\langle G, s, t\rangle \in CAMHAM$ é um caminho hamiltoniano de $s$ a $t$.

# Classe NP

## Certificado (Prova)

- A informação adicional, representada por $c$, utilizada por um verificador é chamada de **certificado** (ou prova) da pertinência a uma dada linguagem.
- Para verificadores polinomiais, o certificado tem comprimento polinomial (no comprimento de $\omega$).

## Exemplo

- Um certificado para uma cadeia $\langle G, s, t\rangle \in CAMHAM$ é um caminho hamiltoniano de $s$ a $t$.
- Um certificado para um número composto $x \in COMPOSTOS$ é um dos seus divisores.

# Classe NP

## Definição 7.19

**NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

# Classe NP

**Definição 7.19**

**NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

**Teorema 7.20**

Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial.

# Classe NP

## Definição 7.19

**NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

## Teorema 7.20

Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial.

## Definição 7.21

**NTIME(t(n))** $= \{L \mid L$ é uma linguagem decidida por uma MT não-determinística de tempo $O(t(n))\}$.

UFG
Regional Jataí

# Classe NP

**Definição 7.19**

**NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

**Teorema 7.20**

Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial.

**Definição 7.21**

$\textbf{NTIME(t(n))} = \{L \mid L$ é uma linguagem decidida por uma MT não-determinística de tempo $O(t(n))\}$.

**Corolário**

$\textbf{NP} \cong \bigcup_k \textbf{NTIME}(n^k)$

# A Classe NP

## Problema do clique em um grafo

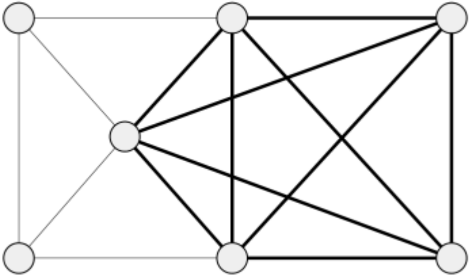
$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ é um grafo não-direcionado com um $k$-clique $\}$.

UFG
Regional Jataí

# A Classe NP

## Problema do clique em um grafo

$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ é um grafo não-direcionado com um $k$-clique $\}$.



# A Classe NP

**Teorema 7.24**

CLIQUE $\in$ **NP**

# A Classe NP

**Teorema 7.24**

CLIQUE $\in$ **NP**

**Prova (usando o clique $c$ como certificado para $V$)**

$V$ = "Sobre a cadeia de entrada $\langle\langle G, k\rangle, c\rangle$:

1. Teste se $c$ é um conjunto de $k$ nós em $G$;
2. Teste se $G$ contém todas as arestas conectando nós em $c$;
3. Se ambos os testes retornam positivo, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

UFG
Regional Jataí

# A Classe NP

**Teorema 7.24**

CLIQUE $\in$ **NP**

# A Classe NP

**Teorema 7.24**

CLIQUE $\in$ **NP**

**Prova (construindo a MTN $M$)**

$M =$ "Sobre a cadeia de entrada $\langle G, k \rangle$, em que $G$ é um grafo:

1. Não-deterministicamente selecione um subconjunto $c$ de $k$ nós de $G$;
2. Teste se $G$ contém todas as arestas conectando nós em $c$;
3. Se sim, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*.

# Classe NP

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

**26 de julho de 2016**

UFG
Regional Jataí