Prova (Parte 2)

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

04 de setembro de 2017

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= MIN(10, S) \\ S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + 0,1.EA + EB \end{aligned}$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova,
  - EA é a pontuação total dos exercícios de aquecimentos, e
  - EB é a pontuação total dos exercícios-bônus.

- O conteúdo exigido desta avaliação compreende o seguinte ponto apresentado no Plano de Ensino da disciplina: (3) Problemas Decidíveis, (4) Problemas Indecidíveis e (5) Complexidade de Tempo.

Nome:

Terceiro Teste

1. (5,0 pt) Seja $A = \{\langle R \rangle \mid R$ é uma expressão regular que descreve uma linguagem contendo pelo menos uma cadeia ω que tem 111 como uma subcadeia (i.e., $\omega = x111y$ para alguma x e para alguma y em Σ^*)$\}$. Mostre que A é decidível.

   Resposta: É possível criar um AFD B de forma que $L(B)$ seja a expressão regular $\Sigma^*111\Sigma^*$ (Definição 1.16 e Teorema 1.54). Assim, para que R gere pelo menos uma cadeia ω que tem 111 como uma subcadeia, é necessário garantir que $L(R) \cap L(B) \neq \emptyset$. Por fim, vamos criar um outro AFD C de forma que $L(C) = L(R) \cap L(B)$ (pois a classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de interseção) e verificamos se $\langle C \rangle$ é membro de V_{AFD} (Teorema 4.4).

   Diante disto, será construído a seguir um decisor M_A para A :

   M_A = "Sobre a entrada $\langle R \rangle$, em que R é uma expressão regular, faça:

   (a) Construa o AFD B conforme descrito anteriormente;
   (b) Construa o AFD C conforme descrito anteriormente;
   (c) Construa a MT X que decide V_{AFD} (Teorema 4.4);
   (d) Rode X sobre $\langle C \rangle$;
      i. Se X aceita, *rejeite*;
      ii. Caso contrário, *aceite*.

   A linguagem A é decidível pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

2. (5,0 pt) Seja $T = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que T é contável.

   Resposta: Seja $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de 2, 3 ou 5$\}$. Ora, $\mathbb{M}$ é contável, pois

   - todos elementos de $\mathbb{M}$ são distintos entre si, e
   - como cada elemento de $\mathbb{M}$ é um número natural, é possível estabelecer uma ordem crescente a partir de seus valores.

   Ora T tem o mesmo tamanho de $\mathbb{M}$, pois é possível estabelecer a bijeção $f : T \to \mathbb{M}$ em que $f(i, j, k) = 2^i 3^j 5^k$. Com T tem o mesmo tamanho de $\mathbb{M}$, T é contável ■

Quarto Teste

3. (5,0 pt) Mostre que **P** é fechada sob operação de complemento.

   Prova: Seja A uma linguagem decidível em **P**. Seja M_A a máquina de Turing simples (MT) que decide a linguagem A (Definção 3.6) em tempo polinomial. Como A é decidível em tempo polinomial, A pertence a TIME(n^k) (em que k é uma constante positiva). Iremos construir a MT M_{aux}, a partir de M_A, que decide $\overline{A}$ em tempo polinomial. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

   M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

   (a) Rode M_A sobre ω.

   (b) Se M_A rejeita, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*".

   O tempo de execução t de M_{aux} é igual a soma do tempo de execução dos passos (a) e (b). Logo, $t = O(n^k) + O(1) = O(n^k)$. Como k é uma constante positiva, $\overline{A} \in$ TIME(n^k) e, consequentemente, $\overline{A} \in$ **P**. Logo, podemos afirmar que **P** é fechada sob a operação de complemento ■

4. (5,0 pt) Seja CONEXO = $\{\langle G \rangle \mid G$ é um grafo simples conexo $\}$.
   Mostre que CONEXO está em **NP**.

   Prova: Se CONEXO $\in$ **NP**, então é possível construir uma máquina de Turing (MT) que a decide em tempo polinomial não-determinístico. Construiremos a MT não-determinística M que decide CONEXO:

   M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

   (a) Selecione o primeiro nó de G e marque-o.

   (b) Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:

      i. Para cada nó em G, marque-o se ele está ligado por uma aresta a um nó que já está marcado.

   (c) Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados.

   (d) Se eles estão, *aceite*; caso contrário, *rejeite*".

   O tempo de execução t de M é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (b), (c) e (d). Logo, $t = O(1) + O(n) \times O(n^3) + O(n) + O(1) = O(n^4)$. 4 é um número natural e CONEXO $\in$ NTIME(n^4). Logo, podemos afirmar que CONEXO $\in$ **NP** ■

Teoremas Auxiliares

Definição 1.16: Uma linguagem é chamada de uma linguagem regular se algum autômato finito a reconhece.

Teorema 1.25: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Teorema 1.26: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Teorema 1.39: Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Teorema 1.49: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Teorema 1.54: Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Definição 3.5: Chame uma linguagem de Turing-reconhecível se alguma máquina de Turing a reconhece.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Teorema 3.13: Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing que lhe é equivalente.

Teorema 3.16: Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

Teorema 3.21: Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Teorema 4.1: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.2: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.3: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.4: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.5: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9: Toda linguagem livre-de-contexto é decidível.

Teorema 4.11: A_{MT} é uma linguagem indecidível.

Definição 4.14: Um conjunto A é contável se é finito ou tem o mesmo tamanho que N.

Teorema 4.15: $\mathbb{Q}$ é contável.

Teorema 4.17: $\mathbb{R}$ é incontável.

Corolário 4.18: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Teorema 4.22: Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Corolário 4.23: $\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

Teorema 7.8: Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing multifita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $O(t^2(n))$.

Teorema 7.11: Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing não-determinística de uma única fita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $2^{O(t(n))}$.

Definição 7.12: **P** é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita. Em outras palavras, $\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}\ (n^k)$.

Definição 7.19: **NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

Teorema 7.20: Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial. Em outras palavras, $\mathbf{NP} = \bigcup_k \mathbf{NTIME}\ (n^k)$.