Prova (Parte 2)

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

29 de agosto de 2016

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= MIN(10, S) \\ S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + EB \end{aligned}$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova, e
  - EB é a pontuação total dos exercícios-bônus.

- O conteúdo exigido desta avaliação compreende o seguinte ponto apresentado no Plano de Ensino da disciplina: (3) Problemas Decidíveis, (4) Problemas Indecidíveis, (5) Complexidade de Tempo e (6) NP-Completude.

Nome:
Assinatura:

Terceiro Teste

1. (5,0 pt) Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as sequências infinitas sobre $\{0, 1\}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é incontável, usando uma prova por diagonalização.

   Prova: Vamos supor por um momento que $\mathcal{B}$ seja contável. Se $\mathcal{B}$ for contável, então existe uma bijeção entre $\mathcal{B}$ e $\mathbb{N}$. Ora, é possível construir $x \in \mathcal{B}$ de forma que x não participe desta bijeção. x pode ser construído da seguinte forma:

   - Seja $f(n)$ a suposta bijeção existente (em que $n \in \mathbb{N}$);
   - Se 0 é o valor de um dígito, então 1 é o seu valor oposto;
     e se 1 é o valor de um dígito, então 0 é o seu valor oposto;
   - Seja a n-ésima correspondência de $f(n)$ o par $\langle n, f(n)\rangle$;
   - Construa x de forma que, para todos os seus dígitos, seu n-ésimo dígito seja formado pelo valor oposto do n-ésimo dígito de $f(n)$ da n-ésima correspondência.

   Assim, $x \in \mathcal{B}$, mas não participa da bijeção. Isto é absurdo. Logo, esta bijeção não existe. Por isso, $\mathcal{B}$ é incontável ■

2. (5,0 pt) Esta fórmula é satisfazível?

$$\neg x \wedge (y \vee z) \wedge (\neg y \vee x)$$

Justifique a sua resposta.

Sim, é satisfazível. Basta atribuirmos para x, y e z os valores 0, 0 e 1, respectivamente. Esta valoração garante à fórmula o valor 1, tornando-a satisfazível.

Quarto Teste

3. (5,0 pt) Seja CONEXO $= \{\langle G\rangle \mid G$ é um grafo simples conexo $\}$.
   Mostre que CONEXO está em **P**.

   Prova: Se CONEXO $\in$ **P**, então é possível construir uma máquina de Turing simples que a decide em tempo polinomial. Construiremos M que decide CONEXO:

   $M =$ "Sobre a entrada $\langle G\rangle$, a codificação de um grafo G:

   (a) Selecione o primeiro nó de G e marque-o.

   (b) Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:

      i. Para cada nó em G, marque-o se ele está ligado por uma aresta a um nó que já está marcado.

   (c) Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados.

   (d) Se eles estão, *aceite*; caso contrário, *rejeite*".

   O tempo de execução t de M é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (b), (c) e (d). Logo, $t = O(1) + O(n) \times O(n^3) + O(n) + O(1) = O(n^4)$. 4 é um número natural e CONEXO $\in$ TIME(n^5). Logo, podemos afirmar que CONEXO $\in$ **P** ■

4. (5,0 pt) Mostre que **NP** é fechada sob operação de intersecção.

Prova: Sejam A e B duas linguagens decidíveis em NP. Sejam M_A e M_B duas máquinas de Turing não-determinísticas que decidem as linguagens A e B, respectivamente (pois se uma linguagem é decidível, então uma máquina de Turing a decide). Como A e B são decidíveis em tempo polinomial não-determinístico, A e B pertencem a NTIME(n^k) e NTIME(n^l) respectivamente (em que k e l são números naturais). Iremos construir a máquina de Turing não-determinística M_{aux}, a partir de M_A e M_B, que decide $A \cap B$ em tempo polinomial não-determinístico. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

(a) Rode M_A sobre ω.

(b) Rode M_B sobre ω.

(c) Se M_A e M_B aceitam, *aceite*.

(d) Caso contrário, *rejeite*".

O tempo de execução t de M_{aux} é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (b), (c) e (d). Logo, $t = O(n^k) + O(n^l) + O(1) + O(1) = O(n^{max(k,l)})$.

Seja $c = max(k, l)$. Temos assim, $t = O(n^c)$. Como c é um número natural, $A \cap B \in$ NTIME(n^c) e, consequentemente, $A \cap B \in NP$. Logo, podemos afirmar que NP é fechada sob a operação de intersecção ■

Teoremas Auxiliares

Definição 1.16: Uma linguagem é chamada de uma linguagem regular se algum autômato finito a reconhece.

Teorema 1.25: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Teorema 1.26: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Teorema 1.26.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de complemento.

Teorema 1.39: Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Teorema 1.49: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Teorema 1.49.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de intersecção.

Teorema 1.54: Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Definição 3.5: Chame uma linguagem de Turing-reconhecível se alguma máquina de Turing a reconhece.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Teorema 3.13: Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing que lhe é equivalente.

Teorema 3.16: Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

Teorema 3.21: Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Teorema 4.1: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.2: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.3: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.4: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.5: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9: Toda linguagem livre-de-contexto é decidível.

Teorema 4.11: A_{MT} é uma linguagem indecidível.

Definição 4.14: Um conjunto A é contável se é finito ou tem o mesmo tamanho que N.