Prova (Parte 2)

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

07 de março de 2018

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= MIN(10, S) \\ S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + EB \end{aligned}$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova, e
  - EB é a pontuação total dos exercícios-bônus.
- O conteúdo exigido desta avaliação compreende o seguinte ponto apresentado no Plano de Ensino da disciplina: (3) Problemas Decidíveis, (4) Problemas indecidíveis e (5) Complexidade de Tempo.

Nome:

1 Terceiro Teste

1. (5,0 pt) **[Sipser 4.12]** Seja $A = \{\langle R, S\rangle \mid R$ e S são expressões regulares e $L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostre que A é decidível.

   R - Para que $L(R) \subseteq L(S)$, é necessário garantir que $L(R) \cup L(S) = L(S)$ (pois toda cadeia em $L(R)$ tem que pertencer também a $L(S)$). Para isto, criamos os AFDs T e U de forma que $L(T) = L(R)$ e $L(U) = L(S)$ (Definição 1.16, e Teorema 1.54). Por fim, criamos o AFD V de forma que $L(V) = L(T) \cup L(U)$ (Teorema 1.25) e verificamos se $\langle U, V\rangle$ é membro de EQ_{AFD} (Teorema 4.5).

   Diante disto, será construído a seguir um decisor M_A para A :

   $M_A =$ "Sobre a entrada $\langle R, S\rangle$, em que R e S são expressões regulares, faça:

   (a) Construa os AFDs U e V conforme descritos anteriormente;
   (b) Construa a MT X que decide EQ_{AFD} (Teorema 4.5);
   (c) Rode X sobre $\langle U, V\rangle$;
      i. Se X aceita, *aceite*;
      ii. Caso contrário, *rejeite*.

   A linguagem A é decidível pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

2. (5,0 pt) **[Sipser 4.15]** Seja $A = \{\langle R \rangle \mid R$ é uma expressão regular que descreve uma linguagem contendo pelo menos uma cadeia ω que tem 111 como uma subcadeia (i.e., $\omega = x111y$ para alguma x alguma e y)$\}$. Mostre que A é decidível.

   Resposta: É possível criar um AFD B de forma que $L(B)$ seja a expressão regular $\Sigma^*111\Sigma^*$ (Definição 1.16 e Teorema 1.54). Assim, para que R gere pelo menos uma cadeia ω que tem 111 como uma subcadeia, é necessário garantir que $L(R) \cap L(B) \neq \emptyset$. Por fim, vamos criar um outro AFD C de forma que $L(C) = L(R) \cap L(B)$ (pois a classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de interseção) e verificamos se $\langle C \rangle$ é membro de V_{AFD} (Teorema 4.4).

   Diante disto, será construído a seguir um decisor M_A para A :

   M_A = "Sobre a entrada $\langle R \rangle$, em que R é uma expressão regular, faça:

   (a) Construa o AFD B conforme descrito anteriormente;
   (b) Construa o AFD C conforme descrito anteriormente;
   (c) Construa a MT X que decide V_{AFD} (Teorema 4.4);
   (d) Rode X sobre $\langle C \rangle$;
      i. Se X aceita, *rejeite*;
      ii. Caso contrário, *aceite*.

   A linguagem A é decidível pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

Quarto Teste

3. (5,0 pt) **[Sipser 7.6]** Mostre que **P** é fechada sob operação de concatenação.

Prova: Sejam A e B duas linguagens decidíveis em **P**. Sejam M_A e M_B duas máquinas de Turing simples que decidem as linguagens A e B, respectivamente (pois se uma linguagem é decidível, então uma máquina de Turing a decide). Como A e B são decidíveis em tempo polinomial determinístico, A e B pertencem a $\text{TIME}(n^k)$ e $\text{TIME}(n^l)$ respectivamente (em que k e l são números naturais). Iremos construir a máquina de Turing M_{aux}, a partir de M_A e M_B, que decide $A \circ B$ em tempo polinomial. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

(a) Para cada um dos $n+1$ cortes de ω, de forma que $\omega = \omega_A \circ \omega_B$, faça:
   i. Rode M_A sobre ω_A;
   ii. Rode M_B sobre ω_B;
   iii. Se M_A e M_B aceitam, *aceite*.

(b) *Rejeite*".

O tempo de execução t de M_{aux} é igual a soma do tempo de execução dos passos (a) e (b). Logo, $t = O(n) \times (O(n^k) + O(n^l) + O(1)) + O(1) = O(n) \times O(n^{max(k,l)}) = O(n^{max(k,l)+1})$.

Seja $c = max(k,l) + 1$. Temos assim, $t = O(n^c)$. Como c é um número natural, $A \circ B \in \text{TIME}(n^c)$ e, consequentemente, $A \circ B \in$ **P**. Logo, podemos afirmar que **P** é fechada sob a operação de concatenação ■

4. (5,0 pt) **[Sipser 7.9] (Adaptação)** Um triângulo em um grafo não-direcionado é um 3-clique. Mostre que $TRIANG \in \mathbf{NP}$, em que

$$TRIANG = \{\langle G \rangle \mid G \text{ contém um triângulo}\}.$$

Prova: Se TRIANG $\in$ **NP**, então é possível construir uma máquina de Turing não-determinística (MTN) que a decide em tempo polinomial. Construiremos a MTN M que decide TRIANG:

MTN = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, em que G é um grafo não-direcionado, faça:

(a) Selecione, de forma não-determinística, cada conjunto distinto C com três vértices de G:
   i. Verifique se C forma um 3-clique em G.
   ii. Se sim, *aceite*.
   iii. Caso contrário, *rejeite*".

O tempo de execução t de M é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (i), (ii), e (iii). Logo, $t = O(1) + O(1) + O(1) = O(1) = O(n^0)$.

0 é um número natural e TRIANG $\in$ NTIME(n^0). Logo, podemos afirmar que TRIANG $\in$ **NP** ■

Teoremas Auxiliares

Definição 1.16: Uma linguagem é chamada de uma linguagem regular se algum autômato finito a reconhece.

Teorema 1.25: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Teorema 1.26: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Teorema 1.26.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de complemento.

Teorema 1.39: Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Teorema 1.49: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Teorema 1.49.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de intersecção.

Teorema 1.54: Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Definição 3.5: Chame uma linguagem de Turing-reconhecível se alguma máquina de Turing a reconhece.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Teorema 3.13: Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing que lhe é equivalente.

Teorema 3.16: Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

Teorema 3.21: Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Teorema 4.1: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.2: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.3: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.4: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.5: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9: Toda linguagem livre-de-contexto é decidível.

Teorema 4.11: A_{MT} é uma linguagem indecidível.

Definição 4.14: Um conjunto A é contável se é finito ou tem o mesmo tamanho que N.

Teorema 7.8: Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing multifita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $O(t^2(n))$.

Teorema 7.11: Seja $t(n)$ uma função, em que $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing não-determinística de uma única fita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de um única fita equivalente de tempo $2^{O(t(n))}$.

Definição 7.12: **P** é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma única fita. Em outras palavras, $\mathbf{P} = \bigcup_k \mathbf{TIME}\ (n^k)$.

Definição 7.19: **NP** é a classe das linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

Teorema 7.20: Uma linguagem está em **NP** sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial. Em outras palavras, $\mathbf{NP} = \bigcup_k \mathbf{NTIME}\ (n^k)$.