Quarto Teste

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

02 de agosto de 2016

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= MIN(10, S) \\ S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + 0,1.E \end{aligned}$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova, e
  - E é a pontuação total dos exercícios.

- O conteúdo exigido desta avaliação compreende o seguinte ponto apresentado no Plano de Ensino da disciplina: (5) Complexidade de Tempo e (6) NP-Completude.

Nome:
Assinatura:

Quarto Teste

1. (5,0 pt) Mostre que **NP** é fechada sob a operação de concatenação.

   Prova: Sejam A e B duas linguagens decidíveis em NP. Sejam M_A e M_B duas máquinas de Turing não-determinísticas que decidem as linguagens A e B, respectivamente (pois se uma linguagem é decidível, então uma máquina de Turing a decide). Como A e B são decidíveis em tempo polinomial não-determinístico, A e B pertencem a NTIME(n^k) e NTIME(n^l) respectivamente (em que k e l são números naturais). Iremos construir a máquina de Turing não-determinística M_{aux}, a partir de M_A e M_B, que decide $A \circ B$ em tempo polinomial não-determinístico. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

   M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

   (a) Não-deterministicamente selecione um corte de ω, de forma que $\omega = \omega_A \circ \omega_B$:

      i. Rode M_A sobre ω_A.

      ii. Rode M_B sobre ω_B.

      iii. Se M_A e M_B aceitam, *aceite*.

      iv. Caso contrário, *rejeite*".

   O tempo de execução t de M_{aux} é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (i), (ii), (iii) e (iv). Logo, $t = O(n) + O(n^k) + O(n^l) + O(1) + O(1) = O(n^{max(k,l)})$.

   Seja $c = max(k,l)$. Temos assim, $t = O(n^c)$. Como c é um número natural, $A \circ B \in$ NTIME(n^c) e, consequentemente, $A \circ B \in NP$. Logo, podemos afirmar que NP é fechada sob a operação de concatenação ■

2. (5,0 pt) Um triângulo em um grafo não-direcionado é um 3-clique. Mostre que TRIANGULO $\in$ **P**, em que

$$\text{TRIANGULO} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ contém um triângulo } \}.$$

Prova: Se TRIANGULO $\in$ **P**, então é possível construir uma máquina de Turing simples que a decide em tempo polinomial. Construiremos M que decide TRIANGULO:

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, em que G é um grafo não-direcionado, faça:

(a) Para cada conjunto distinto C com três vértices de G, faça:

   i. Verifique se C forma um 3-clique em G.

   ii. Se sim, *aceite*.

(b) *Rejeite*".

O tempo de execução t de M é igual a soma do tempo de execução dos passos (a) e (b). Logo, $t = O(n^3)(O(n^2) + O(1)) + O(1) = O(n^5)$.

5 é um número natural e TRIANGULO $\in$ TIME(n^5). Logo, podemos afirmar que TRIANGULO $\in$ **P** ■