Problema da Parada e Linguagens Turing-irreconhecíveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

06 de julho de 2017

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Conjunto Incontáveis
2. Problema da Parada
3. Linguagem Turing-Irreconhecíveis

Sumário

1. Revisão
   - Conjunto Incontáveis
2. Problema da Parada
3. Linguagem Turing-Irreconhecíveis

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Ideia da Prova

- De forma a mostrar que $\mathbb{R}$ é incontável, mostramos que nenhuma correspondência existe entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.
  - Supomos, a princípio, que a correspondência f existe.
  - Logo após, apresentamos um valor $x \in \mathbb{R}$ que não está emparelhado com valor algum em $\mathbb{N}$
    (o que indica um absurdo).

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	3,14159...
2	55,55555...
3	0,12345...
4	0,50000...
$\vdots$	$\vdots$

Figura: Suposta correspondência f entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	$3,\underline{1}4159\ldots$
2	$55,5\underline{5}555\ldots$
3	$0,12\underline{3}45\ldots$
4	$0,500\underline{0}0\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

$$\boxed{x = 0,4641\ldots}$$

Figura: Construção de x a partir da correspondência f.

Conjuntos Incontáveis

Considerações

Apenas deve-se ter o cuidado de escolher dígitos para x diferentes de 0 e 9, devido ao fato de

$$3,999\ldots = 4,000\ldots$$

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

1. Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
2. Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.
3. Como há mais linguagens do que máquinas de Turing, então algumas linguagens não podem ser Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C;
- Logo C é contável.

Conjuntos Incontáveis

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\Sigma^* = & \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, & 001, & \cdots & \}; \\
A = & \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 001, & \cdots & \}; \\
\chi_A = & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & .
\end{array}
$$

Figura: Construção de $\mathcal{X}A$ a partir da correspondência Σ^*.

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \rightarrow B$
(em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
é uma correspondência;
- Logo, como B é incontável, L é incontável.

Sumário

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}
- Vamos construir a MT D conforme a descrição abaixo:

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}
- Vamos construir a MT D conforme a descrição abaixo:
  $D =$ "Sobre a entrada $\langle M \rangle$, em que M é uma MT:
  1. Rode H sobre a entrada $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
  2. Dê como saída o oposto do que H dá como saída; ou seja, se H aceita, *rejeite* e se H rejeita, *aceite*."

UFG
Regional Jataí

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}
- Vamos construir a MT D conforme a descrição abaixo:
  $D =$ "Sobre a entrada $\langle M \rangle$, em que M é uma MT:
  1. Rode H sobre a entrada $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
  2. Dê como saída o oposto do que H dá como saída; ou seja, se H aceita, *rejeite* e se H rejeita, *aceite*."
- Entretanto, $D(\langle D \rangle)$ leva a uma contradição.

UFG
Regional Jataí

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

- Vamos supor que H decida A_{MT}
- Vamos construir a MT D conforme a descrição abaixo:
  $D =$ "Sobre a entrada $\langle M \rangle$, em que M é uma MT:
  1. Rode H sobre a entrada $\langle M, \langle M \rangle \rangle$.
  2. Dê como saída o oposto do que H dá como saída; ou seja, se H aceita, *rejeite* e se H rejeita, *aceite*."
- Entretanto, $D(\langle D \rangle)$ leva a uma contradição.
- Logo, A_{MT} é indecidível.

UFG
Regional Jataí

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

Resumindo...

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

Resumindo...

- H aceita $\langle M, \omega \rangle$ exatamente quando M aceita ω.

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

Resumindo...

- H aceita $\langle M, \omega \rangle$ exatamente quando M aceita ω.
- D rejeita $\langle M \rangle$ exatamente quando M aceita $\langle M \rangle$.

Problema da Parada

A_{MT} é indecidível (Ideia da prova)

Resumindo...

- H aceita $\langle M, \omega \rangle$ exatamente quando M aceita ω.
- D rejeita $\langle M \rangle$ exatamente quando M aceita $\langle M \rangle$.
- D rejeita $\langle D \rangle$ exatamente quando D aceita $\langle D \rangle$ (Absurdo!!!).

Problema da Parada

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*	*rejeite*	*aceite*	*rejeite*	
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	$\cdots$
M_3	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	
M_4	*aceite*	*aceite*	*rejeite*	*rejeite*	
$\vdots$			$\vdots$		

A entrada i, j é o valor de H sobre a entrada $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$.

UFG
Regional Jataí

Problema da Parada

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle D \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*	*rejeite*	*aceite*	*rejeite*		*aceite*	
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	$\cdots$	*aceite*	$\cdots$
M_3	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*		*rejeite*	
M_4	*aceite*	*aceite*	*rejeite*	*rejeite*		*aceite*	
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$		
D	*rejeite*	*rejeite*	*aceite*	*aceite*		?	
$\vdots$		$\vdots$					$\ddots$

Figura: Se D estiver na figura, uma contradição ocorre em "?".

Sumário

Linguagens Turing-irreconhecíveis

Teorema 4.22

Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Linguagens Turing-irreconhecíveis

Teorema 4.22

Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Corolário 4.23

$\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

Problema da Parada e Linguagens Turing-irreconhecíveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

06 de julho de 2017

UFG
Regional Jataí