Terceiro Teste

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

13 de julho de 2017

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e exercícios;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= MIN(10, S) \\ S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + 0,1.EA + EB \end{aligned}$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova,
  - EA é a pontuação total dos exercícios de aquecimentos, e
  - EB é a pontuação total dos exercícios-bônus.

- O conteúdo exigido desta avaliação compreende o seguinte ponto apresentado no Plano de Ensino da disciplina: (3) Problemas Decidíveis e (4) Problemas Indecidíveis.

Nome:

Terceiro Teste

1. (5,0 pt) Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as sequências infinitas sobre $\{0, 1\}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é incontável, usando uma prova por diagonalização.

   R - Vamos supor, por um momento, que $\mathcal{B}$ seja contável. Sendo contável, seja $f : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ a suposta bijeção existente entre $\mathbb{N}$ e $\mathcal{B}$ (tendo em vista que $\mathcal{B}$ não é finito - Definição 4.14). Logo, todos os elementos de $\mathcal{B}$ deveriam participar de f. Entretanto, é possível construir $x \in \mathcal{B}$, a partir de f, que não participa da suposta bijeção.

   Seja $g(n, d)$ a função que retorna o d-ésimo dígito da sequência binária $f(n)$. Sejam $a, b \in \{0, 1\}$ dois dígitos quaisquer. Definimos como $a \circ b$ a concatenação dos dígitos a e b, nesta ordem. Também definimos como $\overline{a}$ o elemento oposto de a (se a=0, $\overline{a} = 1$, e vice-versa) .Logo, é possível construir a sequência infinita x da seguinte forma:

   $$x = \overline{g(1, 1)} \circ \overline{g(2, 2)} \circ \overline{g(3, 3)} \circ \overline{g(4, 4)} \ldots$$

   Como é possível construir x, concluímos que a suposta bijeção f não existe. Logo $\mathcal{B}$ é incontável ■

2. (5,0 pt) Seja $A = \{\langle R, S\rangle \mid R$ e S são expressões regulares e $L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostre que A é decidível.

   R - Para que $L(R) \subseteq L(S)$, é necessário garantir que $L(R) \cup L(S) = L(S)$ (pois toda cadeia em $L(R)$ tem que pertencer também a $L(S)$). Para isto, criamos os AFDs T e U de forma que $L(T) = L(R)$ e $L(U) = L(S)$ (Definição 1.16, e Teorema 1.54). Por fim, criamos o AFD V de forma que $L(V) = L(T) \cup L(U)$ (Teorema 1.25) e verificamos se $\langle U, V\rangle$ é membro de EQ_{AFD} (Teorema 4.5).

   Diante disto, será construído a seguir um decisor M_A para A :

   M_A = "Sobre a entrada $\langle R, S\rangle$, em que R e S são expressões regulares, faça:

   (a) Construa os AFDs U e V conforme descritos anteriormente;
   (b) Construa a MT X que decide EQ_{AFD} (Teorema 4.5);
   (c) Rode X sobre $\langle U, V\rangle$;
      i. Se X aceita, *aceite*;
      ii. Caso contrário, *rejeite*.

   A linguagem A é decidível pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

Teoremas Auxiliares

Definição 1.16: Uma linguagem é chamada de uma linguagem regular se algum autômato finito a reconhece.

Teorema 1.25: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Teorema 1.26: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Teorema 1.39: Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Teorema 1.49: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Teorema 1.54: Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Definição 3.5: Chame uma linguagem de Turing-reconhecível se alguma máquina de Turing a reconhece.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Teorema 3.13: Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing que lhe é equivalente.

Teorema 3.16: Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

Teorema 3.21: Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Teorema 4.1: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.2: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.3: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.4: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.5: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9: Toda linguagem livre-de-contexto é decidível.

Teorema 4.11: A_{MT} é uma linguagem indecidível.

Definição 4.14: Um conjunto A é contável se é finito ou tem o mesmo tamanho que N.

Teorema 4.15: $\mathbb{Q}$ é contável.

Teorema 4.17: $\mathbb{R}$ é incontável.

Corolário 4.18: Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Teorema 4.22: Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Corolário 4.23: $\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.