Conjuntos incontáveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

24 de janeiro de 2018

Plano de Aula

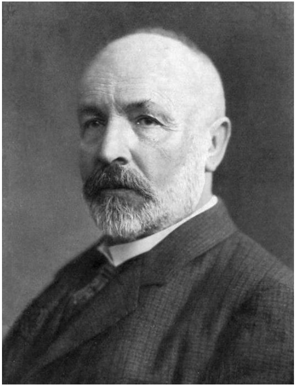
1. Revisão
2. Conjunto Incontáveis

Sumário

1 Revisão

2 Conjunto Incontáveis

Método da diagonalização



Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

Quem?

George Cantor (1845-1918)

Matemático russo.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Função Sobrejetora

Uma função f é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de B (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \to B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos A e B são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de A para B.

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par } \}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e P;

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e P;
- $f : \mathbb{N} \rightarrow P$ em que $f(n) = 2n$;

Método da diagonalização

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

Figura: Visualização de f através de uma tabela.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Conjunto Contável

Um conjunto A é **contável** se é finito ou se tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

$\mathcal{Q}$ é contável (curiosamente)

Logo $\mathcal{Q}$ é finito ou tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

Método da diagonalização

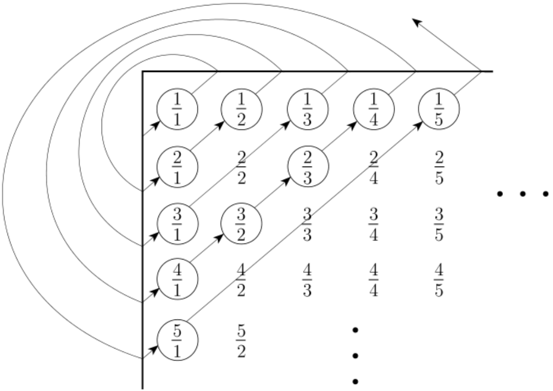


FIGURA 4.16
Uma correspondência de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Sumário

1 Revisão

2 Conjunto Incontáveis

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Ideia da Prova

- De forma a mostrar que $\mathbb{R}$ é incontável, mostramos que nenhuma correspondência existe entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.
  - Supomos, a princípio, que a correspondência f existe.
  - Logo após, apresentamos um valor $x \in \mathbb{R}$ que não está emparelhado com valor algum em $\mathbb{N}$
    (o que indica um absurdo).

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	3,14159...
2	55,55555...
3	0,12345...
4	0,50000...
$\vdots$	$\vdots$

Figura: Suposta correspondência f entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	$3{,}\underline{1}4159\ldots$
2	$55{,}5\underline{5}555\ldots$
3	$0{,}12\underline{3}45\ldots$
4	$0{,}500\underline{0}0\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

$$\boxed{x = 0{,}4641\ldots}$$

Figura: Construção de x a partir da correspondência f.

Conjuntos Incontáveis

Considerações

Apenas deve-se ter o cuidado de escolher dígitos para x diferentes de 0 e 9, devido ao fato de

$$3,999\ldots = 4,000\ldots$$

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

1. Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

1. Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
2. Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

1. Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
2. Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.
3. Como há mais linguagens do que máquinas de Turing, então algumas linguagens não podem ser Turing-reconhecíveis.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C;

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C;
- Logo C é contável.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\Sigma^* & = \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, & 001, & \cdots & \}; \\
A & = \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 001, & \cdots & \}; \\
\chi_A & = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & .
\end{array}
$$

Figura: Construção de $\mathcal{X}A$ a partir da correspondência Σ^*.

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \to B$
(em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
é uma correspondência;

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \rightarrow B$
  (em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
  é uma correspondência;
- Logo, como B é incontável, L é incontável.

Conjuntos Incontáveis

Exercício

Mostrar que o problema da parada é indecidível.

Conjuntos incontáveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

24 de janeiro de 2018

UFG
Regional Jataí