# Método da Diagonalização

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

**18 de janeiro de 2018**

UFG
Regional Jataí

# Plano de Aula

1. Revisão
   - O Problema da Parada

2. Método da Diagonalização

# Sumário

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Descrição

Dadas duas linguagem $L_1$ e $L_2$, identificar se $L_1 = L_2$.

## Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

## Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B\rangle \in EQ_{AFD}$.

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Teorema 4.5

$EQ_{AFD}$ é uma linguagem decidível.

## Lema 4.1

Iremos construir um AFD $C$ a partir de $A$ e $B$ de forma que $C$ aceita as cadeias que são aceitas por $A$ ou por $B$, mas não por ambas. Consequentemente, se $A$ e $B$ reconhecem a mesma linguagem, $C$ não aceitará nada. A linguagem de $C$ é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

## Corolário

$L(C) = \emptyset \leftrightarrow L(A) = L(B)$

# Problema da Igualdade de Linguagens

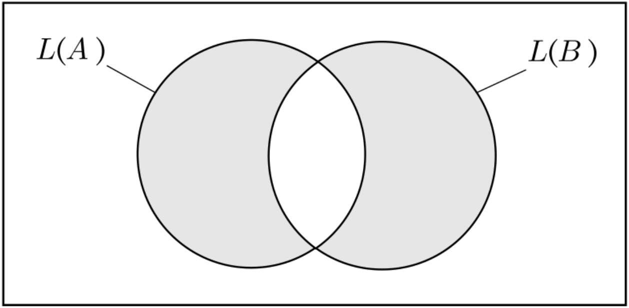



**FIGURA 4.6**
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Teorema 4.5

$EQ_{AFD}$ é uma linguagem decidível.

## Prova

A seguinte MT $F$ decide $EQ_{AFD}$.

$F$ = "Sobre a entrada $\langle A, B\rangle$, em que $A$ e $B$ são AFDs:

1. Construa o AFD $C$ conforme descrito no Lema 4.1;
2. Rode MT $T$ do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C\rangle$;
3. Se $T$ aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

# Teoremas sobre GLC

**Teorema 4.7**

$A_{GLC}$ é uma linguagem decidível.

**Teorema 4.8**

$V_{GLC}$ é uma linguagem decidível.

**Teorema 4.9**

Toda LLC é decidível.

**Cuidado!**

$EQ_{GLC}$ **não** é uma linguagem decidível.

UFG
Regional Jataí

# Relacionamento entre as classes de linguagens

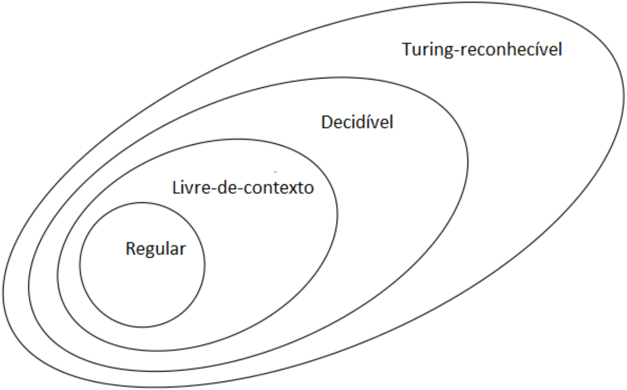



**FIGURA 4.10**
O relacionamento entre classes de linguagens

# O Problema da Parada

**Problema da aceitação para MT**

Dada uma MT $M$ e uma cadeia de entrada $\omega$, identificar se $M$ aceita $\omega$.

**Problema**

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

**Teorema 4.11**

$A_{MT}$ é indecidível.

UFG
Regional Jataí

# O Problema da Parada

## Considerações sobre o Teorema 4.11

$A_{MT}$ é Turing-reconhecível. Pois é possível construir $U$ da seguinte forma:
$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que $M$ é uma MT e $\omega$ uma cadeia:

1. Simule $M$ sobre a entrada $\omega$;
2. Se $M$ em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se $M$ em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

## Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida $A_{MT}$.

# O Problema da Parada

### Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT $U$ apresentada anteriormente é uma MT Universal.

### Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

UFG
Regional Jataí

# O Problema da Parada

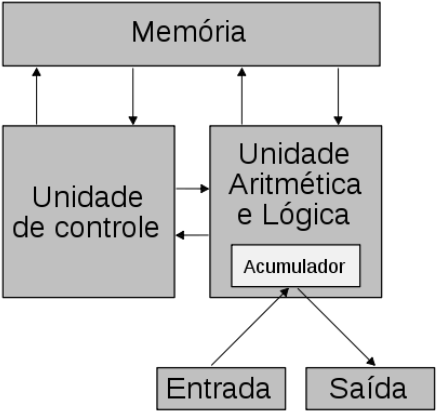
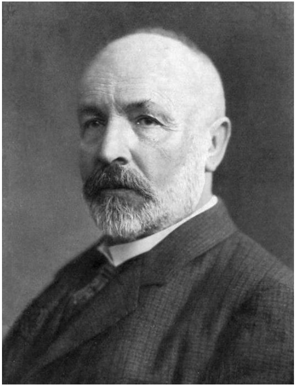



**Figura:** Arquitetura de von Neumann (1945).

# Sumário

# Método da diagonalização



## Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

## Quem?

**George Cantor (1845-1918)**

Matemático russo.

# Método da diagonalização

## Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

# Método da diagonalização

## Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

## Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

# Método da diagonalização

**Problema**

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

**Conjuntos finitos**

Podemos utilizar o método da contagem.

**Proposta de Cantor**

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Função um-para-um

Sejam dois conjuntos $A$ e $B$ e uma função $f$ de $A$ para $B$. Dizemos que $f$ é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Função um-para-um

Sejam dois conjuntos $A$ e $B$ e uma função $f$ de $A$ para $B$. Dizemos que $f$ é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

## Função Sobrejetora

Uma função $f$ é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de $B$ (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de $A$ é mapeado para um único elemento de $B$ e cada elemento de $B$ tem um único elemento de $A$ mapeando para ele.

# Método da diagonalização

## Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \to B$, todo elemento de $A$ é mapeado para um único elemento de $B$ e cada elemento de $B$ tem um único elemento de $A$ mapeando para ele.

## Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos $A$ e $B$ são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de $A$ para $B$.

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par } \}$

## $\mathbb{N}$ e $P$ têm o mesmo tamanho

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

## $\mathbb{N}$ e $P$ têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e $P$;

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

## $\mathbb{N}$ e $P$ têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e $P$;
- $f : \mathbb{N} \to P$ em que $f(n) = 2n$;

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

**Figura:** Visualização de $f$ através de uma tabela.

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

## Conjunto Contável

Um conjunto $A$ é **contável** se é finito ou
se tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

## $\mathcal{Q}$ é contável (curiosamente)

Logo $\mathcal{Q}$ é finito ou tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

# Método da diagonalização

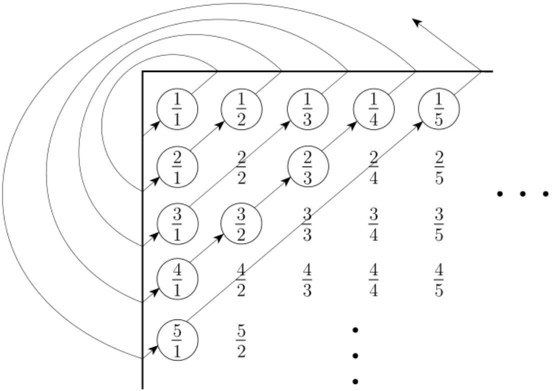



**FIGURA 4.16**
Uma correspondência de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

UFG
Regional Jataí

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

## Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

# Método da Diagonalização

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

**18 de janeiro de 2018**