Prova (Extra)

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

12 de setembro de 2016

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos.
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$\begin{aligned} MF &= \begin{cases} 6,0 & \text{, se } PE \geq NM \\ MA & \text{, se } PE < NM \end{cases} \\ NM &= 10 - MA \end{aligned}$$

  em que

  - PE é a pontuação obtida na prova extra,
  - MF é a média final na disciplina,
  - MA é a média atual na disciplina, e
  - NM é a pontuação mínima a ser obtida na prova extra.

- O conteúdo exigido desta avaliação compreende todos os pontos apresentados no Plano de Ensino da disciplina.

Nome:
Assinatura:

1. (2,5 pt) É verdade que se uma linguagem é Turing-reconhecível então algum enumerador a enumera. Por que não podemos usar o algoritmo do enumerador abaixo para provar esta afirmação?

   Seja $s_1, s_2, \ldots$ uma lista de todas as cadeias em Σ^*. Seja M uma máquina de Turing que reconhece uma dada linguagem.

   E = "Ignore a entrada.

   (a) Repita o que se segue para $i = 1, 2, 3, \ldots$;

   (b) Rode M sobre s_i;

   (c) Se ela aceita, imprima s_i".

   R - Por que a máquina de Turing M pode, ao executar o passo (b), entrar em *loop*. Se isto ocorrer em um dado momento, pode ser que haja alguma cadeia, que pertença a $L(M)$, que ainda não foi iterada. Logo, esta cadeia não seria impressa e este enumerador não cumpriria com o prometido.

2. (2,5 pt) Seja $A = \{\langle B \rangle \mid B \text{ é um AFD e } L(B) = 1^*\}$. Mostre que A é decidível.

   R - Primeiro, será criado um AFD S de forma que $L(S) = 1^*$. Isto é possível, pois 1^* é regular (Definição 1.16). Segundo, será construído um decisor M_A para A, conforme descrito a seguir:

   M_A = "Sobre a entrada $\langle B \rangle$, em que B é um AFD, faça:

   (a) Construa o AFD S conforme descrito anteriormente;

   (b) Construa a MT T que decide EQ_{AFD} (Teorema 4.5);

   (c) Rode T sobre $\langle B, S \rangle$;

      i. Se T aceita, *aceite*;

      ii. Caso contrário, *rejeite*.

   A linguagem A é decidível, pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

3. (2,5 pt) Seja $A = \{\langle B, C\rangle \mid B$ é um AFN, C é uma expressão regular e $L(B) \cap L(C) \neq \emptyset\}$. Mostre que A é decidível.

R - Primeiro, será criado um AFD S de forma que $L(S) = L(B) \cap L(C)$. Isto é possível pois $L(B)$ e $L(C)$ são regulares e a classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de intersecção (Teorema 1.39, Teorema 1.54, Definição 1.16 e Teorema 1.49.1). Segundo, será construído um decisor M_A para A, como se segue:

M_A = "Sobre a entrada $\langle B, C\rangle$, em que B é um AFN e C é uma expressão regular, faça:

(a) Construa o AFD S conforme descrito anteriormente;

(b) Construa a MT T que decide V_{AFD} (Teorema 4.4);

(c) Rode T sobre $\langle S\rangle$;

   i. Se T aceita, *rejeite*;

   ii. Caso contrário, *aceita*.

A linguagem A é decidível, pois foi possível construir uma máquina de Turing que a decide (Definição 3.6) ■

4. (2,5 pt) Mostre que **NP** é fechada sob operação de união.

Prova: Sejam A e B duas linguagens decidíveis em NP. Sejam M_A e M_B duas máquinas de Turing não-determinísticas que decidem as linguagens A e B, respectivamente (pois se uma linguagem é decidível, então uma máquina de Turing a decide). Como A e B são decidíveis em tempo polinomial não-determinístico, A e B pertencem a NTIME(n^k) e NTIME(n^l) respectivamente (em que k e l são números naturais). Iremos construir a máquina de Turing não-determinística M_{aux}, a partir de M_A e M_B, que decide $A \cup B$ em tempo polinomial não-determinístico. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

(a) Rode M_A sobre ω.

(b) Rode M_B sobre ω.

(c) Se M_A ou M_B aceita, *aceite*.

(d) Caso contrário, *rejeite*".

O tempo de execução t de M_{aux} é igual a soma do tempo de execução dos passos (a), (b), (c) e (d). Logo, $t = O(n^k) + O(n^l) + O(1) + O(1) = O(n^{max(k,l)})$.

Seja $c = max(k, l)$. Temos assim, $t = O(n^c)$. Como c é um número natural, $A \cup B \in$ NTIME(n^c) e, consequentemente, $A \cup B \in NP$. Logo, podemos afirmar que NP é fechada sob a operação de união ■

Teoremas Auxiliares

Definição 1.16: Uma linguagem é chamada de uma linguagem regular se algum autômato finito a reconhece.

Teorema 1.25: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Teorema 1.26: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Teorema 1.26.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de complemento.

Teorema 1.39: Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

Teorema 1.49: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

Teorema 1.49.1: A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de intersecção.

Teorema 1.54: Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Definição 3.5: Chame uma linguagem de Turing-reconhecível se alguma máquina de Turing a reconhece.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível ou simplesmente decidível se alguma máquina de Turing a decide.

Teorema 3.13: Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing que lhe é equivalente.

Teorema 3.16: Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

Teorema 3.21: Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

Teorema 4.1: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.2: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.3: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.4: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.5: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9: Toda linguagem livre-de-contexto é decidível.

Teorema 4.11: A_{MT} é uma linguagem indecidível.

Definição 4.14: Um conjunto A é contável se é finito ou tem o mesmo tamanho que N.