Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de junho de 2016

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- **Problema 4.12:**
  Seja $A = \{\langle R, S\rangle \mid R$ e S são expressões regulares e $\mathrm{L}(R) \subseteq \mathrm{L}(S)\}$. Mostre que A é decidível.
- Candidaturas até amanhã (07 de junho, 09h30);
- Apresentação e resposta por escrito $\rightarrow$
  Segunda (14 de junho, 11h30);
- 20 minutos de apresentação.

Candidato

???

UFG
Regional Jataí

Sumário

Pensamento

Pensamento

Frase

Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.

Quem?

John von Neumann (1903-1957)
Cientista da computação húngaro/americano.

UFG
Regional Jataí

Sumário

Introdução

Propósitos da Teoria da Computação

- Conhecer o poder dos algoritmos;
- Explorar os limites da solubilidade algorítmica;
- Identificar algoritmos insolúveis.

Por que devemos estudar insolubilidade?

- Relaxamento dos requisitos;
- Conhecimento das limitações dos modelos computacionais.

UFG
Regional Jataí

Linguagens Decidíveis

Exemplos de Linguagens Decidíveis

São úteis porque

- Algumas linguagens decidíveis estão associadas a aplicações;
- Algumas linguagens aparentemente triviais não são decidíveis.

Problema da aceitação

Dado um modelo computacional MC e uma cadeia de entrada ω, identificar se MC aceita ω.

Problema da aceitação para AFDs

Problema da aceitação para AFDs

Dado um AFD B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFD} = \{\langle B, \omega \rangle \mid B$ é um AFD que aceita a cadeia de entrada $\omega\}$

Estratégia de Resolução

Resolver o problema da aceitação para AFDs é decidir se $\omega \in A_{AFD}$.

Problema da aceitação para AFDs

Teorema 4.1

A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Ideia da Prova

$M =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFD, e ω, uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada ω;
2. Se a simulação termina em um estado de aceitação, **aceite**. Senão, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Problema da aceitação para AFDs

Detalhes de implementação

- A entrada $\langle B, \omega \rangle$ representa um AFD e uma cadeia;
  - Uma representação razoável de B seria uma lista de seus cinco componentes: Q, Σ, δ, q_0 e F;
  - M simula B de forma que M **aceita** se B estiver em um estado final, e **rejeita**, caso contrário.

Problema da aceitação para AFNs

Problema da aceitação para AFNs

Dado um AFN B e uma cadeia de entrada ω, identificar se B aceita ω.

Problema

$A_{AFN} = \{\langle B, \omega \rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle B, \omega \rangle \in A_{AFN}$.

Problema da aceitação para AFNs

Teorema 4.2

A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Prova

$N =$ "Sobre a entrada $\langle B, \omega \rangle$, em que B é um AFN, e ω, uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C, usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.39;
2. Rode a MT M do Teorema 4.1 sobre a cadeia $\langle C, \omega \rangle$;
3. Se M aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Descrição

Dada uma linguagem L, identificar se $L = \emptyset$.

Problema aplicado a AFDs

$V_{AFD} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ é um AFD e } L(A) = \emptyset\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A \rangle \in V_{AFD}$.

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Teorema 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Vacuidade de uma Linguagem

Teorema 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT T decide V_{AFD}.
T = "Sobre a entrada $\langle A \rangle$, em que A é uma AFD:

1. Marque o estado inicial de A;
2. Repita até que nenhum estado novo venha a ser marcado;
    1. Marque qualquer estado que tenha uma transição chegando nele a partir de qualquer estado que já está marcado.
3. Se nenhum estado final estiver marcado, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

Sumário

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B\rangle \in EQ_{AFD}$.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Corolário

$L(C) = \emptyset \;\leftrightarrow\; L(A) = L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

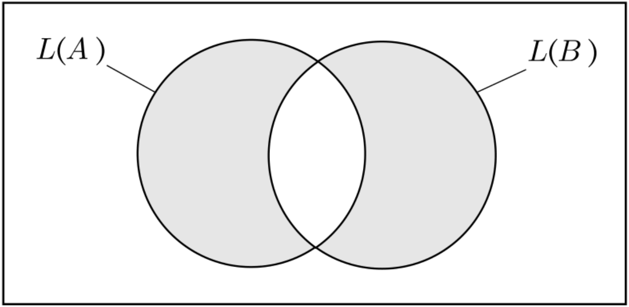


FIGURA 4.6
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT F decide EQ_{AFD}.

F = "Sobre a entrada $\langle A, B\rangle$, em que A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito no Lema 4.1;
2. Rode MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C\rangle$;
3. Se T aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Cuidado!

EQ_{GLC} **não** é uma linguagem decidível.

Relacionamento entre as classes de linguagens

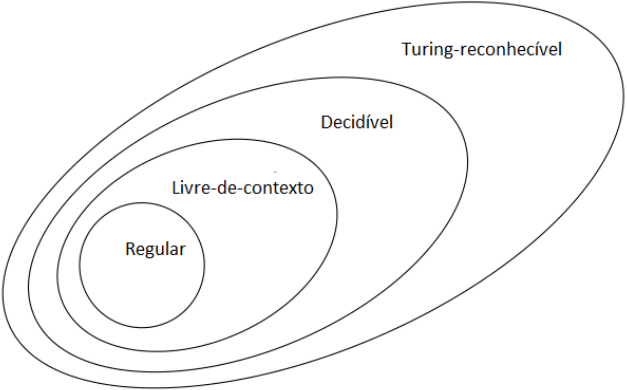


FIGURA 4.10
O relacionamento entre classes de linguagens

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

UFG
Regional Jataí

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M$ é uma MT que aceita a cadeia de entrada $\omega\}$

Teorema 4.11

A_{MT} é indecidível.

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

U = "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

U = "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida A_{MT}.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

UFG
Regional Jataí

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

O Problema da Parada

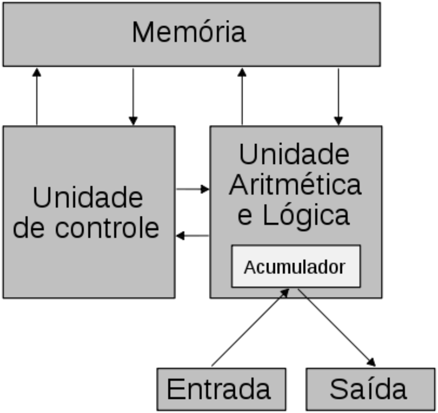
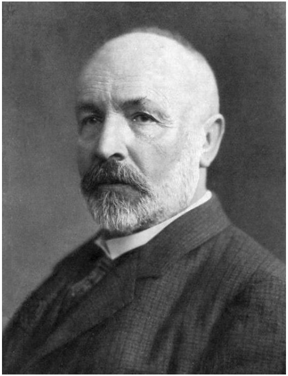


Figura: Arquitetura de von Neumann (1945).

Método da diagonalização



Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

Quem?

George Cantor (1845-1918)

Matemático russo.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

07 de junho de 2016

UFG
Regional Jataí