Formes dérivées de la formule intégrale de Cauchy

Anthony Jalkh

1 Introduction

D'après la formule intégrale de Cauchy, et si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine D délimité par une courbe fermée simple C et sur le contour C lui-même, $f(a)$ s'écrit :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

avec a un point à l'intérieur du domaine D.

En dérivant par rapport à a, nous obtenons :

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

On dérive une seconde fois par rapport à a,

$$f''(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{-2(z-a)(-1)f(z)}{(z-a)^4} dz$$

$$\implies f''(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{2f(z)}{(z-a)^3} dz$$

En dérivant une troisième fois par rapport à a, on remarque un motif régissant l'expression obtenue :

$$f'''(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{-3(z-a)^2 \times (-1) \times 2f(z)}{(z-a)^6} dz$$

$$\implies f'''(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{6f(z)}{(z-a)^4} dz$$

En dérivant une quatrième fois par rapport à a, on constate que le même motif resurgit :

$$f^{(4)}(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{-4(z-a)^3 \times (-1) \times 6f(z)}{(z-a)^8} dz$$

$$\implies f^{(4)}(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{24f(z)}{(z-a)^5} dz$$

On en déduit donc, par induction, que :

$$f^{(n)}(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{n!f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$\implies \boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz}$$

La relation est donc vérifiée.

2^e méthode :

Néanmoins, afin d'éviter tout manque de rigueur, il serait judicieux d'utiliser la définition même de la dérivée à travers la notion de limites. La répétition de ce processus pour des dérivées d'ordres croissants nous permettra de déterminer, une fois de plus, par induction, l'expression de $f^{(n)}(a)$.

Exemple pour la première dérivée par rapport à a :

$$\frac{d}{da}f(a) = f'(a) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

Pour $\epsilon = \Delta a$, nous obtenons la relation (1) suivante :

$$f'(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} \tag{1}$$

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, nous obtenons :

D'une part,

$$f(a+\epsilon) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-a-\epsilon} dz$$

D'autre part,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, il devient évident que :

$$f(a+\epsilon) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \left(\oint_C \frac{f(z)}{z-a-\epsilon} dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right)$$

$$\implies f(a+\epsilon) - f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \left(\frac{f(z)}{z-a-\epsilon} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz \tag{2}$$

Remplaçons, à présent, l'équation (2) dans l'équation (1) :

$$f'(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$$

$$\implies f'(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2i\pi\epsilon} \oint_C \left(\frac{f(z)}{z-a-\epsilon} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz \right]$$

On a intérêt à éliminer le facteur ϵ se trouvant au dénominateur en dehors de l'intégrale. En effet, ceci nous permettra d'échanger la limite et l'intégrale vu qu'aucune autre condition ne nous en empêche.

Pour ce faire, il est impératif de faire apparaître le terme ϵ dans l'intégrale en réduisant les 2 termes s'y trouvant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2i\pi\epsilon} \oint_C \frac{f(z)(z-a) - f(z)(z-a-\epsilon)}{(z-a-\epsilon)(z-a)} dz \right] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2i\pi\epsilon} \oint_C \frac{f(z)(z-a-z+a+\epsilon)}{(z-a-\epsilon)(z-a)} dz \right] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2i\pi\epsilon} \oint_C \frac{f(z)\epsilon}{(z-a-\epsilon)(z-a)} dz \right] \end{aligned}$$

ϵ ne dépendant pas de la variable d'intégration z, on peut la faire sortir de l'intégrale avant de la simplifier avec le terme ϵ qu'on désirait éliminer précedemment.

$$\implies f'(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a-\epsilon)(z-a)} dz \right]$$

$$\implies f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{f(z)}{(z-a-\epsilon)(z-a)} \right] dz$$

$$\implies f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-a)} dz$$

$$\implies \boxed{f'(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz}$$

En réitérant ce processus, tout en prenant soin d'adapter et de modifier correctement les termes utilisés dans la définition de la dérivée, il est possible de déterminer les expressions des dérivées d'ordres supérieurs et, ainsi, prouver de nouveau, par induction, que :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Ce qui est en accord avec l'expression démontrée à travers la première méthode.