Séries de Fourier

Anthony Jalkh

1 Introduction

Toute fonction $f(x)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de classe C_1 par morceaux peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions cosinusoïdales et sinusoïdales :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos(nwx) + b_n sin(nwx)$$

avec : $\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(nwx)dx \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(nwx)dx \end{cases}$

$$\implies f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2cos(nwx)}{T}\int_0^T f(x)cos(nwx)dx + \frac{2sin(nwx)}{T}\int_0^T f(x)sin(nwx)dx\right]$$

$$\implies f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[cos(nwx)\int_0^T \{f(x)cos(nwx)\}dx + sin(nwx)\int_0^T \{f(x)sin(nwx)\}dx\right]$$

À noter que, dans le cas où $f(x)$ s'avère être une fonction paire ou impaire, il serait judicieux d'exprimer a_0, a_n et b_n sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)cos(nwx)dx \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)sin(nwx)dx \end{cases}$$

Si $f(x)$ est paire, alors $f(x)sin(nwx)$ est impaire et $b_n = 0$ alors que $f(x)cos(nwx)$ est paire et

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)cos(nwx)dx$$

Ces rôles seront bien évidemment inversés dans le cas où $f(x)$ est impaire

2 Formule de Parseval

La formule de Parseval, elle, est donnée par :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad \text{avec } n \in \mathbf{N}$$