LISTA 10 - WANDERSON FAUSTINO PATRICIO

QUESTÃO 01 a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2 = 11 - (x+1)^2 - (2y+1)^2$

$\Rightarrow \nabla f = (-2x-2, -4y-2) = (0,0) \Leftrightarrow x = -1$ e $y = +1/2$

$\Rightarrow (-1, +1/2)$ é ponto de máximo $\Rightarrow f_{max} = 11$

b) $f(x,y) = (x-y).(1-x.y) = x - y - x^2y + xy^2$

• $f_x = (1-xy) + (x-y)(-y) = 1 - 2xy + y^2$

• $f_y = -(1-xy) + (x-y)(-x) = -1 + 2xy - x^2$

$\nabla f = (f_x, f_y) = (0,0) \Leftrightarrow f_x = f_y = 0 \Rightarrow y = \pm x$

i) Se $y = x \Rightarrow 1 - 2x^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

ii) Se $y = -x \Rightarrow 1 + 2x^2 + 3x^2 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Possíveis pontos extremos:

$(-1,-1)$ ou $(1,1)$

Calculando a matriz H-ana:

• $f_{xx} = -2y$ • $f_{yy} = 2x$ • $f_{xy} = -2x + 2y \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \Delta = -4xy - 4(y-x)^2$

1) Para $(x,y) = (1,1)$: $\Delta(1,1) = -4 < 0 \Rightarrow (1,1)$ é ponto de sela.

2) Para $(x,y) = (-1,-1)$: $\Delta(-1,-1) = -4 < 0 \Rightarrow (-1,-1)$ " " " "

d) $f(x,y) = x^3 - 12x.y + 8y^3$

• $f_x = 3x^2 - 12y$ • $f_y = -12x + 24y^2$

$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow 4y^4 = 4y \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$

$x = 0$ e $x = 2$

Possíveis pontos extremos:

$(0,0)$ ou $(2,1)$

Calculando as segundas derivadas.

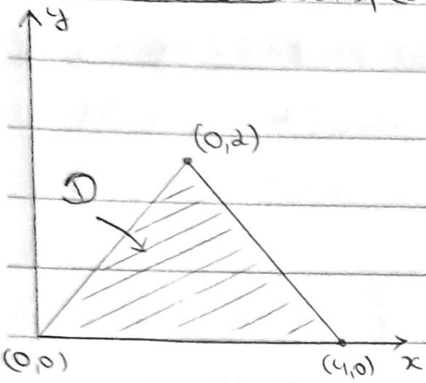
• $f_{xx} = 6x$ • $f_{yy} = 48y$ • $f_{xy} = -12$

$\Rightarrow \Delta(x,y) = 288x \cdot y - 144$

1) $\Delta(0,0) = -144 < 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela

2) $\Delta(2,1) = 432 > 0$ e $f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow (2,1)$ é mínimo local

Questão 02 | a) $f(x,y) = x + y - xy$



i) Vendo o pontos de gradiente $\vec{0}$.

$f_x = 1 - y$ e $f_y = 1 - x$

$\Rightarrow (1,1)$ é possível ponto extremo

$f(1,1) = 1$

ii) Na reta $y = 0$: $f(x,0) = x \Rightarrow f(0,0) = 0$ e $f(4,0) = 4$

iii) " " $x = 0$: $f(0,y) = y \Rightarrow f(0,2) = 2$

iv) " " $y = -\frac{x}{2} + 2 \Leftrightarrow x = 4 - 2y$

$\Rightarrow f(4-2y, y) = 4 - 2y + y - y(4-2y) = 4 - 5y + 2y^2 = g(y)$

$g'(y) = 4y - 5 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x_0 = 3/2$

$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow (4,0)$ é máximo absoluto e $(0,0)$ é mínimo absoluto.

Questão 03 Definamos a função f como a distância ao quadrado.

$$\Rightarrow f = d^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+3)^2$$
$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2$$

Na superfície: $x+y+z=1$

Definamos a função $g(x,y,z) \equiv x+y+z$

Para a distância mínima:

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(x-2) = \lambda & \Rightarrow x = 2 + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_0 = 8/3 \\ 2\cdot y = \lambda & \Rightarrow y = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y_0 = 2/3 \\ 2(z+3) = \lambda & \Rightarrow z = -3 + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow z_0 = -7/3 \\ x+y+z = 1 & \Rightarrow -1 + \frac{3\lambda}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = 4/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_0,y_0,z_0) = \frac{3\cdot\lambda^2}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{d_{min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Questão 04 $f(x,y,z) = z^2 + x^2 + y^2$ e $g(x,y,z) = y^2 - xz - 9$.

$$\begin{cases} 2x = \lambda\cdot(-z) \\ 2y = \lambda \cdot 2y \\ 2z = \lambda\cdot(-x) \\ y^2 - xz - 9 = 0 \end{cases}$$

Há 2 possibilidades: $y = 0$ ou $\lambda = 1$

i) Se $y=0 \Rightarrow x\cdot z = -9 \Rightarrow x \neq 0$ e $z \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

$\Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{z}{x} \Rightarrow z = \pm x$

Se $z = x \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$.

Se $z = -x \Rightarrow -x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

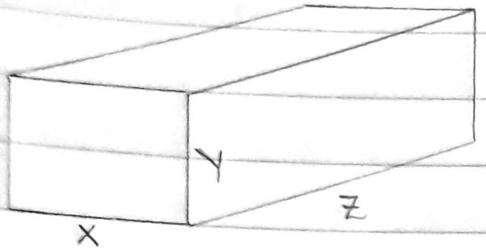
Possíveis pontos: $(3,0,-3)$ e $(-3,0,3)$

ii) Se $\lambda = 1 \Rightarrow z = -2x$ e $x = -2z \Rightarrow x = z = 0$

$\Rightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

Possíveis pontos: $(0,-3,0)$ e $(0,3,0) \Rightarrow$ Mais próximos.

Questão 06 | A quantidade de papelão é proporcional à área superf.



como não há tampa:

$$\begin{cases} A(x,y,z) = 2xy + 2yz + x \cdot z \\ V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z = 32000 \end{cases}$$

Para A_{min}: $\nabla A = \lambda \cdot \nabla V$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2y + z = \lambda y z \\ 2x + 2z = \lambda x z \\ 2y + x = \lambda x y \\ x \cdot y \cdot z = 32000 \end{cases}$$

$\Rightarrow 32000\lambda = 2yz + xz = 2xy + 2yz = 2xy + xz$ $\quad (x, y, z \neq 0)$

$x = 2y$; $z = 2y$

$\Rightarrow 2y \cdot y \cdot 2y = 32000 \Leftrightarrow y^3 = 8000 \Leftrightarrow y = 20$ cm

A caixa tem dimensões:

largura: 40 cm, comprimento: 40 cm e altura: 20 cm

Questão 08 | b) $f(x,y) = e^{-xy}$; $x^2 + 4y^2 \leq 1$; Seja $0 \leq c \leq 1$

$$\begin{cases} -y \cdot e^{-xy} = 2x \\ -x \cdot e^{-xy} = 8y \\ x^2 + 4y^2 = c \end{cases}$$

i) Se $c = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow f(0,0) = e^{-0} = 1$

ii) Se $c \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $y \neq 0$

$\frac{y}{x} = \frac{x}{4y} \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow 2x^2 = c \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{c}{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}$

Seja $t = \sqrt{\frac{c}{2}} > 0 \Rightarrow x = \pm t$ e $y = \pm \frac{t}{2}$

Possíveis pontos:

$(t, \frac{t}{2}), (t, -\frac{t}{2}), (-t, \frac{t}{2}), (-t, -\frac{t}{2})$

Logo, há duas possibilidades

$$f(x,y) = e^{-t^4/2} \quad \text{ou} \quad f(x,y) = e^{t^4/2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = e^{-c/4} \quad \text{ou} \quad f(x,y) = e^{c/4}$$

O valor máximo ocorre para $c = 1$

$$\Rightarrow \underline{f_{max} = \sqrt[4]{e}} > 1$$

Questão 09 Sejam x e y os lados do retângulo.

$\Rightarrow A(x,y) = x \cdot y$ e $P(x,y) = 2x + 2y = 2p$ $\Rightarrow \nabla A = \lambda \nabla P$

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2 \\ x = \lambda \cdot 2 \\ x + y = p \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y} \Rightarrow \text{A área mínima é no quadrado.}$$

Questão 10 $f = s.(s-x).(s-y).(s-z)$ e $x + y + z = 2s$

$$\begin{cases} s.(s-y)(s-z) = -\lambda & (i) \\ s.(s-x)(s-z) = -\lambda & (ii) \\ s.(s-y)(s-x) = -\lambda & (iii) \\ x + y + z = 2s & (iv) \end{cases}$$

$(i)/(ii)$: $s - y = s - x \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \boxed{x = y = z}$

A área máxima ocorre para o triângulo equilátero.