Lista 09 - Wanderson Faustino Patricio

Questão 01) $\vec{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

a) $f_x = -y \cdot e^{-x}$ e $f_y = e^{-x} \Rightarrow \nabla f(0,4) = (-4,1)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,4) = (-4,1) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $f_x = e^x \cos y$ e $f_y = -e^x \cdot \operatorname{sen} y \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,0)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (1,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Questão 02 a) $f_x = 2\cos(2x+3y)$ e $f_y = 3\cos(2x+3y)$

$\Rightarrow \nabla f(-6,4) = (2,3) \Rightarrow f_{\vec{u}} = (2,3) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

b) $f_x = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $f_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$

$\Rightarrow f_{\vec{u}} = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) \cdot (3,5) = \frac{9}{25} - \frac{20}{25} = -\frac{11}{25}$

c) $g_r = \frac{s}{1+(rs)^2}$ e $g_s = \frac{r}{1+(rs)^2} \Rightarrow \nabla g(1,2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$\hat{u} = \frac{(5,10)}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow f_{\vec{u}} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot (1,2) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{25}$

Questão 03 a) $f_x = \frac{2y}{\sqrt{x}}$ e $f_y = 4\sqrt{x} \Rightarrow \nabla f(4,1) = (1,8)$

$\Rightarrow (f_{\vec{u}})_{máx} = \|\nabla f(1,8)\| = \sqrt{65}$

Ela ocorre para $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{8}{\sqrt{65}}\right)$

b) $f_x = y\cos x$ e $f_y = x\cos(y) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (0,1)$

$\Rightarrow (f_{\vec{u}})_{máx} = 1$ e ocorre para $\vec{u} = (0,1)$

d) $f_p = \frac{qr}{1+(pqr)^2} \Rightarrow \nabla f(1,2,1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow (f_{\vec{u}})_{max} = \frac{3}{5}$ e ocorre para $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

QUESTÃO 04 $f_x = 2x-2$ e $f_y = 2y-4$

$\Rightarrow \nabla f = (2x-2, 2y-4)$

O sentido de maior crescimento é $\vec{u} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \nabla f = \|\nabla f\| \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow (\cancel{2}x - \cancel{2}, \cancel{2}y - \cancel{4}) = \left[\cancel{4}(x-1)^2 + \cancel{4}(y-2)^2\right] \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\Rightarrow (x-1, y-2) = \left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] \cdot (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Para valor máximo: $\nabla f = \lambda \cdot \vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_x = f_y \iff 2x-2 = 2y-4 \Rightarrow \boxed{y = x+1}$

Solução: Superfície $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\}$ ou $\gamma(t) = (t, t+1)$, $t \in \mathbb{R}$

QUESTÃO 05 a) $T(x,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow 120 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+4+4}} \iff \alpha = 360$

$\Rightarrow T(x,y,z) = \frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(*) $\nabla T(x,y,z) = -360 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot (x,y,z) \Rightarrow \nabla T(1,2,2) = \left(\frac{40}{3}, \frac{80}{3}, \frac{80}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1,2,2) = \frac{40}{3\sqrt{3}} \frac{°C}{cm}$

b) ① De (*) percebemos que $\nabla T(x,y,z) \parallel (x,y,z)$

Se $\vec{r} = (x,y,z)$ temos $\nabla T(\vec{r}) = \lambda \cdot \vec{r}$, Logo o sentido de maior crescimento da função é um vetor que aponta para a origem.

QUESTÃO 06 | a) Seja $f(x,y) = a \cdot u(x,y) + b \cdot v(x,y)$

$\Rightarrow f_x = a\, u_x + b\, v_x$ e $f_y = a\, u_y + b \cdot v_y$

$\Rightarrow \nabla f = a \cdot (u_x, u_y) + b \cdot (v_x, v_y) \Rightarrow \nabla(au + bv) = a \nabla u + b \cdot \nabla v$

b) Defina $f \equiv u \cdot v \Rightarrow f_x = u_x \cdot v + u \cdot v_x$ e $f_y = u_y \cdot v + u \cdot v_y$

$\Rightarrow \nabla f = (u_x \cdot v + u \cdot v_x, u_y v + u \cdot v_y) = v \cdot (u_x, u_y) + u \cdot (v_x, v_y)$

$\Rightarrow \nabla(u \cdot v) = (\nabla u) \cdot v + u \cdot (\nabla v)$

c) $f = \frac{u}{v} \Rightarrow u = f \cdot v \Rightarrow \nabla u = (\nabla f) \cdot v + f \cdot (\nabla v) = v \cdot (\nabla f) + \frac{u}{v} \cdot (\nabla v)$

$\Rightarrow \nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \nabla u - u \nabla v}{v^2}$

QUESTÃO 07 | a) Seja $f(x,y,z) = 2 \cdot (x-2)^2 + (y-1)^2 - (z-3)^2 - 10$

$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (4x - 8, 2y - 2, 6 - 2z) \Rightarrow \nabla f(3,3,5) = (4,4,-4)$

Plano tangente:

$\Rightarrow (4,4,-4) \cdot (x-3, y-3, z-5) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 + 4y - 12 - 4z + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$

Reta normal:

$(x,y,z) = (3,3,5) + \lambda \cdot (4,4,-4) \Leftrightarrow (x,y,z) = (3 + 4\lambda, 3 + 4\lambda, 5 - 4\lambda)$

c) $f(x,y,z) = e^{xyz} - x - y - z \Rightarrow \nabla f(x,y,z) = (yz \cdot e^{xyz} - 1, xz \cdot e^{xyz} - 1, xy \cdot e^{xyz} - 1)$

$\Rightarrow \nabla f(0,0,1) = (-1,-1,-1)$

Plano tangente:

$(-1,-1,-1) \cdot (x, y, z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 - z = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$

Questão 08 | Seja $\vec{n}$ uma reta normal ao plano $z = x + y$. Tomamos $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Definamos $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow \nabla f = (2x, -2y, -2z)$

$\Rightarrow \nabla f = \lambda \cdot \vec{n} \Leftrightarrow (2x, -2y, -2z) = (\lambda, \lambda, -\lambda) \Leftrightarrow x = -y = z$

Aplicando no hiperboloide: $x^2 - (-x)^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -1$

$\Rightarrow$ Não $\exists (x,y,z) \in$ hiperboloide.

Questão 10 | Sejam $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$ e $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow \nabla f(-1,1,2) = (-2, -2, -1)$ e $\nabla g(-1,1,2) = (-8, 2, 4)$

A reta tangente a curva na intersecção das curva de nível de f e g é paralelo a $\nabla f \times \nabla g$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 16\vec{j} - 20\vec{k}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = (-1 - 6\lambda, 1 + 16\lambda, 2 - 20\lambda)$