Lista 01 - Fundamentos de Matemática Discreta - 02/09/2022

Wanderson Faustino Patricio - Matrícula: 2022005052
Ciência da Computação - 2022.1 - UFCA

1 Questão 01

Como $a, b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}^*$. Seja $x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Temos, portanto, que:

$$x \in \mathbb{R}$$

Logo:

$$x^2 \geq 0$$

Desnvolvendo o quadrado de x.

$$x^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \iff$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{a}\right) \cdot \left(\sqrt{b}\right) + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \iff$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \iff a + b \geq 2\sqrt{ab} \iff$$

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

2 Questão 02

Como m n são pares, $\exists\, k, q \in \mathbb{Z}$ tais que $m = 2k$ e $n = 2q$. Portanto:

$$m \cdot n = (2k) \cdot (2q)$$

$$m \cdot n = 4 \cdot (kq)$$

Como k e q pertencem aos inteiros, kq petence aos inteiros. Logo:

$$m \cdot n \text{ é múltiplo de } 4$$

3 Questão 03

Inicimente devemos fazer alguns comentários a respeito dos números primos.

(i) Um número primo possui apenas dois divisores positivos (1 e ele mesmo)

(ii) Todo número primo é maior que 1

Tendo isso em mente, começaremos nossa prova por absurdo.

Suponhamos que um número primo (p)possa ser escrito como a diferença entre o quadrado de dois naturais não consecutivos.

$$p = m^2 - n^2; \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m > n + 1$$

Fatorando o lado direito:

$$p = (m - n)(m + n)$$

Como p é primo, e $m - n > 1$ há apenas uma opção para que essa equação seja verdade:

$$\begin{cases} m - n = p \\ m + n = 1 \end{cases} \iff m = \frac{p+1}{2} \text{ e } n = \frac{1-p}{2}$$

Porém, como p é maior que 1, n seria negativo. Absurdo, visto que n é natural.

Portanto, p não pode ser escrito como a diferença entre o quadrado de dois naturais não consecutivos.

4 Questão 04

4.1 1ª Solução

Denotemos por S a soma do enunciado.

$$S_n = \sum_{0}^{n} q^k$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

Multiplicando ambos os lados por q.

$$S_n \cdot q = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$

$$S_n \cdot q - S_n = \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}\right) - \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n\right)$$

$$S_n\,(q-1) = q^{n+1} - 1$$

Portanto:

$$\boxed{S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

4.2 2ª Solução (Prova por indução)

(i) Caso inicial ($n = 1$): $S_1 = 1 = \dfrac{q-1}{q-1}$ (ok!)

(ii) Suponha válido para $n = k - 1$:

$$S_{k-1} = \frac{q^k - 1}{q-1}$$

(iii) Verificando para $n = k$:

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} q^i = \sum_{i=0}^{k-1} q^i + q^k$$

$$S_k = \frac{q^k - 1}{q-1} + q^k$$

$$S_k = \frac{q^k - 1 + q^k(q-1)}{q-1} = \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q-1}$$

$$\boxed{S_k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}}$$

Portanto:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1};\ \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$$

5 Questão 05

5.1 1ª Solução

Sejam A e B números reais tais que:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{A}{i} + \frac{B}{i+1};\ \forall i \in \mathbb{R} - \{0; -1\}$$

Logo:

$$1 = A(i+1) + Bi$$
$$1 = A + (A+B)i$$

Como essa igualdade ocorre para todo i, temos:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \iff A = 1\ e\ B = -1$$

Reorganizando encontramos:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Aplicando no somatório:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}}$$

5.2 2ª Solução (Prova por indução)

(i) Caso inicial (n=1): $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1}$ (ok!)

(ii) Suponha válido para $n = k-1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k-1}{k-1+1} = \frac{k-1}{k}$$

(iii) Verificando para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+1)}{k(k+1)} + \frac{1}{l(k+1)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k^2-1+1}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}}$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1};\ \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$$

6 Questão 06

Iremos dividir essa soluçao em três partes:

(i) Dois números (x e y) têm a mesma paridade $\iff x - y$ é par.

(1) Suponhamos que x e y tenham a mesma paridade. Logo:

$$x = 2k + r \text{ e } y = 2q + r;\ r \in \{0; 1\}$$

Temos que:

$$x - y = (2k + r) - (2q + r) = 2 \cdot (k - q)$$

Portanto, $x - y$ é par.

(2) Suponhamos que $x - y$ seja par. Logo:

$$x - y = 2t \iff x = y + 2t$$

Sendo r o resto da divisão de y por 2, teremos que: $y = 2m + r\ (r \in \{0; 1\})$

$$x = (2m + r) + 2t = 2(m + t) + r$$

Logo x tem a mesma paridade de y.

(ii) x^n e x tem a mesma paridade para todo $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$

(1) se $n = 1$: x^1 tem a mesma paridade de x (OK!)

(2) se $n \geq 2$:

$$x^n - x = x(x^{n-1} - 1) = x(x - 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$$

Portanto:

$$x | x^n - x \text{ e } (x - 1) | x^n - x$$

OBS: $a|b$ quer dizer que a divide b
Se x é par, então $x^n - x$ é par, logo, x^n e x têm a mesma paridade.
Se x é ímpar, $x - 1$ é par, então, $x^n - x$ é par, logo, x^n e x tem a mesma paridade.

Portanto, x^n e x sempre tem a mesma paridade.

(iii) Prova final do enunciado.
Considere os restos da divisão de a e b por 2 r e R, respectivamente.

$$r, R \in \{0; 1\}$$

Podemos escrever a e b como:

$$a = 2p + r \text{ e } b = 2q + R;\ \ p, q \in \mathbb{Z}$$

Como x e x^n possuem a mesma paridade:

$$a^n = 2P + r \text{ e } b^n = 2Q + R;\ \ P, Q \in \mathbb{Z}$$

Logo:

$$a + b = 2(p + q) + (r + R) \text{ e } a^n + b^n = 2(P + Q) + (r + R)$$

Perceba que em ambas as expressões, o resto da divisão por 2 vai ser o resto de $r + R$ por 2.
Portanto, $a^n + b^n$ tem a mesma paridade de $a + b$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+^*$.

c.q.d.

7 Questão 07

Considerações iniciais a respeito da função f.

(i)

$$f(1,1) = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} \longrightarrow f(1,1) = 1$$

(ii)

$$f(n,n) = \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{i} \longrightarrow f(n,n) = \frac{1}{n}$$

(iii)

$$f(k,n+1) = \sum_{i=k}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1}$$

$$f(k,n+1) = f(k,n) + \frac{1}{n+1}$$

Partindo para a solução em si. Definamos $S(n)$ como sendo:

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k,n)$$

Conjectura proposta:

$$S(n) = n$$

(i) Caso incial ($n = 1$): $S(1) = f(1,1) = 1$ (OK!)

(ii) Suponha real para $n = t \geq 1$:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{t} f(k,t) = t$$

(iii) Verificando para $n = t + 1$

$$S(t+1) = \sum_{k=1}^{t+1} f(k,t+1) = f(t+1,t+1) + \sum_{k=1}^{t} f(k,t+1)$$

$$S(t+1) = f(t+1,t+1) + \sum_{k=1}^{t} \left(f(k,t) + \frac{1}{t+1} \right)$$

$$S(t+1) = \frac{1}{t+1} + \sum_{k=1}^{t} f(k,t) + t \cdot \frac{1}{t+1}$$

$$S(t+1) = \frac{1}{t+1} + t + \frac{t}{t+1}$$

$$\boxed{S(t+1) = t+1}$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k,n) = n; \ \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$$

8 Questão 08

Prova por indução.

(i) Caso inicial ($n = 1$):

$$7^{2\cdot 1} - 1 = 48 \cdot 1 \text{ (OK!)}$$

(ii) Suponha real para $n = k \geq 1$:

$$7^{2k} - 1 = 48q;\ q \in \mathbb{Z}$$

(iii) Verificando para $n = k + 1$:

$$7^{2(k+1)} = 7^{2k+2} = 7^{2k} \cdot 7^2 = 49 \cdot 7^{2k}$$

$$7^{2(k+1)} = 49(48q + 1) = 48(49q + 1) + 1$$

$$7^{2(k+1)} - 1 = 48(49q + 1)$$

$$\boxed{7^{2(k+1)} - 1 = 48m;\ m \in \mathbb{Z}}$$

Portanto:

$$48|7^{2n} - 1;\ \forall n \in \mathbb{N}$$

9 Questão 09

Prova por contraposição:

Se x é composto $\Rightarrow$ x é divisível por algum primo menor que ou igual a sua raíz quadrada

Como x não é primo ele pode ser decomposto em fatores primos. Seja essa decomposição dada por:

$$x = (P_1)^{\alpha_1} \cdot (P_2)^{\alpha_2} \cdot (P_3)^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot (P_k)^{\alpha_k}$$

Onde $P_i\,(i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\})$ são números primos, e $\alpha_i\,(i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\})$ são números naturais não nulos. Logo:

$$\sqrt{x} = \sqrt{(P_1)^{\alpha_1}} \cdot \sqrt{(P_2)^{\alpha_2}} \cdot \sqrt{(P_3)^{\alpha_3}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{(P_k)^{\alpha_k}}$$

Utilizando a função chão temos:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} \iff$$

$$n \geq 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Portanto, temos que:

$$(P_i)^{\alpha_i} \geq (P_i)^{\left(2 \cdot \left\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \right\rfloor\right)} \iff$$

$$\sqrt{(P_i)^{\alpha_i}} \geq (P_i)^{\cdot \left\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \right\rfloor}$$

Reorganizando temos:

$$\sqrt{x} \geq (P_1)^{\cdot \left\lfloor \frac{\alpha_1}{2} \right\rfloor} \cdot (P_2)^{\cdot \left\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \right\rfloor} \cdot \ldots \cdot (P_k)^{\cdot \left\lfloor \frac{\alpha_k}{2} \right\rfloor}$$

Suponhamos (sem perda de generalidade):

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots \leq P_k$$

Termos que:

$$\sqrt{x} \geq P_1$$

Como x é divisível por P_1 teremos que x é divisível por um número menor que ou igual a sua raíz quadrada.

c.q.d.

10 Questão 10

Prova por absurdo.
Suponhamos que exista o menor número real positivo. seja a esse número.
Para todo número positivo (n) temos:

$$\frac{n}{2} > 0$$

Logo:

$$\frac{a}{2} > 0 \iff$$

$$a > \frac{a}{2}$$

Teremos portanto:

$$0 < \frac{a}{2} < a \text{ (ABSURDO !)}$$

Logo, não existe o menor inteiro positivo.

11 Questão 11

Prova por indução.

(i) Para $n = 1$:

$$1 \cdot 1! = (1 + 1)! - 1 \text{ (OK!)}$$

(ii) Suponha real para $n = k - 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i \cdot i! = i! - 1$$

(iii) VErificando para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = k \cdot k! + \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot i!$$

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = k \cdot k! + (k! - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k + 1)k! - 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k + 1)! - 1}$$

12 Questão 12

Consideremos as proposições:
A $\equiv$ Um tabuleiro m x n pode ser preenchido por peças 2x2.
B $\equiv$ m e n são pares.
Iremos provar que: $A \iff B$

(I) Provando $B \Rightarrow A$:

Como m é par, é possível alinhar $\frac{m}{2}$ peças em uma mesma linha.

Analogamente, é possível alinhar $\frac{n}{2}$ peças em uma mesma coluna.

Portanto, o tabuleiro pode ser preenchido por peças 2x2.

(II) Provando $A \Rightarrow B$:

Como ele foi preenchido, é possivel alinhar as peças uma ao lado da outra em todo o tabuleiro, caso contrário sobrariam espaços livres no tabuleiro, portanto, deve ser possível alinhar $\frac{m}{2}$ peças em uma coluna e $\frac{n}{2}$ peças em uma linha. Logo:

$$m \text{ é par e } n \text{ é par}$$

Portanto:

$$\text{Um tabuleiro } m \text{ x } n \text{ pode ser preenchido por peças 2x2} \iff m \text{ e } n \text{ são pares}$$

13 Questão 13

Suponhamos (sem perda de generalidade) uma sequência de números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ com:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$$

A média aritmética é dada por:

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

$$a_m \leq \frac{a_n + a_n + a_n + \ldots + a_n}{n} = \frac{n \cdot a_n}{n} = a_n$$

$$\boxed{a_n \geq a_m}$$

Logo, existe um número que é maior que ou igual à média aritmética.

14 Questão 14

Inicialmente provaremos que a função é positiva para todo $x > 1 \in \mathbb{N}$.
Provando por indução:

(i) Caso inicial ($x = 2$):

$$f(2) = 2f\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2$$
$$f(2) = 2f(1) + 2$$
$$f(2) = 2$$

(ii) Asuma válido para $\forall x \leq n$:

$$f(n) > 0 \iff 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n > 0$$

(iii) Verificando para $x = n + 1$:

$$f(n+1) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + n + 1$$

Devemos dividir em dois casos:

(1) n é par.

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$$
$$f(n+1) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + n + 1 = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + n + 1$$

Como $\dfrac{n}{2} < n$, então $f\left(\frac{n}{2}\right) > 0$.
Logo:

$$f(n+1) > n + 1 > 0$$

(2) n é ímpar.

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$$
$$f(n+1) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + n + 1 = 2f\left(\frac{n+1}{2}\right) + n + 1$$

Como $n > 1$, $\dfrac{n+1}{2} < n$, então $f\left(\frac{n+1}{2}\right) > 0$.
Logo:

$$f(n+1) > n + 1 > 0$$

Portanto:

$$\boxed{f(x) \geq 0}; \forall x \in \mathbb{Z}_+^*$$

Analisando a função $f(x)$:

$$f(x) = 2f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) + x \geq x$$
$$\boxed{f(x) \geq x} \iff$$
$$-f(x) \leq -x$$

(i) $x = 1$:

$$f(1) = 0 \leq 1 \cdot \log_2(1) = 0$$

(ii) $x \geq 2$:

$$\frac{x}{2} \geq 1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow$$
$$0 \leq x \log_2\left(\frac{x}{2}\right) = x \log_2(x) - x \Rightarrow$$
$$-f(x) + f(x) \leq x \log_2(x) - x \leq -x + f(x) \Rightarrow$$
$$\boxed{f(x) \leq x \log_2(x)}$$

c.q.d.