Prova II - Cálculo 2
Soluções por Wanderson Faustino Patricio

1 Questão 01

Conseidere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad\quad\;\, , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Esta função é contínua na origem?

SOLUÇÃO:

Para f ser contínua basta que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

i) Na reta $y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

ii) Na curva $y = x^3$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \frac{1}{3}$$

Como os limites para dois caminhos diveregem, a função não é contínua em $(0,0)$.

b) Esta função é diferenciável na origem?

SOLUÇÃO:

Como f não é contínua, ela não é diferenciável.

2 Questão 02

Considere a função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

a) Determine a taxa de variaçãoo máxima de f no ponto $(1,1)$ e a direção em que isso acontece.
SOLUÇÃO:
Calculando o gradiente:

$$\boldsymbol{\nabla} f = (2x \cdot e^{x^2-y^2}, -2y \cdot e^{x^2-y^2}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} f(1,1) = (2,-2)$$

Se $\vec{v}$ é um vetor unitário ($||\vec{v}|| = 1$), então a derivada de f na direção de $\vec{v}$ é dado por:

$$D_{\vec{v}} f = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \vec{v} \leq ||\boldsymbol{\nabla} f|| \cdot ||\vec{v}|| = ||\boldsymbol{\nabla} f||$$

Logo

$$D_{\vec{v}} f \leq ||\boldsymbol{\nabla} f|| \Rightarrow \boxed{(D_{\vec{v}} f)_{max} = 2\sqrt{2}}$$

A direção máxima é a direção de $\boldsymbol{\nabla} f = (2,-2)$

b) Calcule a derivada direcional de f na direção do vetor $(1,3)$, no ponto $(1,1)$.
SOLUÇÃO:
Calculando o vetor unitário na direção de $(1,3)$

$$\vec{v} = \frac{(1,3)}{||(1,3)||} \to \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Logo

$$D_{\vec{v}} f = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \vec{v} = (2,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\boxed{D_{\vec{v}} f = -\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$

3 Questão 03

Determine os pontos do hiperboloide $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $3x + 2y + z = 0$.

SOLUÇÃO:

O vetor $\overrightarrow{n_1} = (3, 2, 1)$ é normal ao plano do enunciado. Portanto, como a o plano tangente ao hiperboloide são paralelos as plano da questão, eles devem ser da forma

$$\overrightarrow{n} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_1}$$

Se nós tomarmo a função W como sendo

$$W(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$$

O hiperboloide é a superficie de nível

$$W(x, y, z) = 0$$

.

Se Γ é o plano tangente ao hiperboloide em (x_o, y_o, z_o), então $\boldsymbol{\nabla} W(x_o, y_o, z_o) \perp \Gamma$. Ou seja

$$\boldsymbol{\nabla} W(x_o, y_o, z_o) = \lambda \cdot \overrightarrow{n_1}$$

$$(2x, 4y, -6z) = \lambda \cdot (3, 2, 1)$$

Logo

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda \\ 2y = \lambda \\ -6z = \lambda \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Portanto, os possíveis pontos são

$$\boxed{\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{24}\right) \quad e \quad \left(-\frac{3\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}\right)}$$

4 Questão 04

Determine e classifique os pontos crŕticos de $f(x,y) = x^4 + y^3 - 6y - 2x^2$.
SOLUÇÃO:

i) Calculando as primeiras derivadas:

- $f_x = 4x^3 - 4x$
- $f_y = 3y^2 - 6$

Logo

$$\nabla f = (4x^3 - 4x, 3y^2 - 6) = (0,0) \Longleftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\} \ e \ y \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

Portanto há 6 possíveis pontos: $(-1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}) \ e \ (1, \sqrt{2})$

ii) Calculando as segundas derivadas:

- $f_{xx} = 12x^2 - 4$
- $f_{yy} = 6y$
- $f_{xy} = f_{yx} = 0$

Calculando a S-ana:

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - [f_{xy}]^2$$
$$\Delta(x,y) = 24 \cdot y \cdot (3x^2 - 1)$$

iii) Analisando para cada ponto:

- $\Delta(-1, -\sqrt{2}) = -48\sqrt{2} < 0$

$$(-1, -\sqrt{2}) \text{ é ponto de sela}$$

- $\Delta(-1, \sqrt{2}) = 48\sqrt{2} > 0$ e $f_{xx}(-1, \sqrt{2}) = 8 > 0$

$$(-1, \sqrt{2}) \text{ é ponto de mínimo}$$

- $\Delta(0, -\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} > 0$ e $f_{xx}(0, -\sqrt{2}) = -4 < 0$

$$(0, -\sqrt{2}) \text{ é ponto de máximo}$$

- $\Delta(0, \sqrt{2}) = -24\sqrt{2} > 0$

$$(0, \sqrt{2}) \text{ é ponto de sela}$$

- $\Delta(1, -\sqrt{2}) = -48\sqrt{2} < 0$

$$(1, -\sqrt{2}) \text{ é ponto de sela}$$

- $\Delta(1, \sqrt{2}) = 48\sqrt{2} > 0$ e $f_{xx}(1, \sqrt{2}) = 8 > 0$

$$(1, \sqrt{2}) \text{ é ponto de mínimo}$$

5 Questão 05

Aplique o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar as coordenadas do ponto no plano $2x - y + 2z = 20$ que está mais próximo da origem.

SOLUÇÃO:
Lembrando que:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Logo

$$d(P(x, y, z), Origem) = d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Portanto, tomemos a função a minimizar como

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

Considerando a função $g(x, y, z) = 2x - y + 2z$ teremos:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g$$

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda \cdot (2, -1, 2)$$

Logo

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 2y = -\lambda \\ 2z = 2\lambda \\ 2x - y + 2z = 20 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = \frac{40}{9} \ , \ y = -\frac{20}{9} \ , \ z = \frac{40}{9}$$

O ponto procurado é

$$\boxed{\left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right)}$$