CAPÍTULO 1

Modelagem Matemática e Resolução de Problemas de Engenharia

O conhecimento e o entendimento são pré-requisitos para a implementação efetiva de qualquer ferramenta. Não importa quão incrível seja sua caixa de ferramentas, você terá dificuldades para consertar um carro se não entender como ele funciona.

Isso é particularmente verdade quando se usam computadores para resolver problemas de engenharia. Embora tenham uma utilidade potencial imensa, os computadores são praticamente inúteis sem um entendimento fundamental de como os sistemas da engenharia funcionam.

Esse conhecimento é adquirido inicialmente de forma empírica — isto é, por observação e experiência. Entretanto, embora tal informação adquirida empiricamente seja essencial, ela é apenas metade da história. Durante anos e anos de observação e experiência, os engenheiros e cientistas notaram que certos aspectos dos seus estudos empíricos ocorrem repetidamente. Tal comportamento geral pode então ser expresso como leis fundamentais que essencialmente representam o conhecimento acumulado da experiência passada. Portanto, a resolução da maioria dos problemas de engenharia usa uma abordagem com as duas vertentes, a do empirismo e a da análise teórica (Figura 1.1).

Deve ser enfatizado que as duas vertentes são intimamente ligadas. Conforme novas medidas são feitas, as generalizações podem ser modificadas, ou novas generalizações desenvolvidas. Analogamente, as generalizações podem ter uma forte influência nas experiências e observações. Em particular, as generalizações podem servir como princípios organizatórios empregados para resumir resultados de observações e experiências em uma estrutura coerente e abrangente, a partir das quais são tiradas conclusões. Da perspectiva de resolução de problemas de engenharia, tal estrutura é mais útil quando expressa na forma de um modelo matemático.

O objetivo primário deste capítulo é introduzi-lo à modelagem matemática e ao seu papel na resolução de problemas de engenharia. Vamos também ilustrar como os métodos numéricos figuram no processo.

1.1 UM MODELO MATEMÁTICO SIMPLES

Um *modelo matemático* pode ser definido, de forma geral, como uma formulação ou equação que expressa as características essenciais de um sistema ou processo físico em termos matemáticos. Em um sentido muito geral, ele pode ser representado como uma relação funcional da forma

$$\begin{matrix}\text{Variável}\\ \text{dependente}\end{matrix} = f\left(\begin{matrix}\text{Variáveis}\\ \text{independentes}\end{matrix},\ \text{parâmetros},\ \begin{matrix}\text{termos}\\ \text{forçantes}\end{matrix}\right) \tag{1.1}$$

onde a *variável dependente* é uma característica que usualmente reflete o comportamento ou estado do sistema; as *variáveis independentes* usualmente são dimensões, como tempo e espaço, ao longo das quais o comportamento do sistema está sendo determinado; os parâmetros refletem propriedades ou composição do sistema; os *termos forçantes* são as influências externas agindo sobre o sistema.

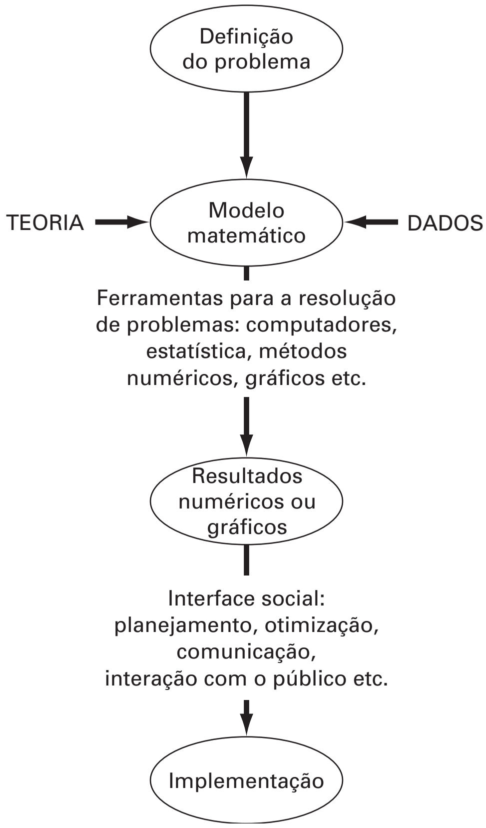


FIGURA 1.1
O processo de resolver problemas de engenharia.

A expressão matemática real da Equação (1.1) pode variar de uma simples relação algébrica a um conjunto grande e complicado de equações diferenciais. Por exemplo, com base em suas observações, Newton formulou sua segunda lei do movimento, que afirma que a taxa de variação no tempo do momento de um corpo é igual à força resultante agindo nele. A expressão matemática, ou modelo, da segunda lei é a equação bem conhecida

$$F = ma \tag{1.2}$$

onde F é a força resultante agindo no corpo (N, ou kg m/s^2), m = massa do objeto (kg) e a é a sua aceleração (m/s^2).

A segunda lei pode ser reescrita na forma da Equação (1.1) simplesmente dividindo ambos os lados por m para obter

$$a = \frac{F}{m} \tag{1.3}$$

onde a é a a variável dependente refletindo o comportamento do sistema, F é o termo forçante e m é um parâmetro representando uma propriedade do sistema. Observe que, para esse caso simples, não há nenhuma variável independente, porque não estamos prevendo como a aceleração varia no tempo ou no espaço.

A Equação (1.3) tem diversas características que são típicas de modelos matemáticos do mundo físico:

1. Ela descreve um processo ou sistema natural em termos matemáticos.
2. Ela representa uma idealização e simplificação da realidade. Isto é, o modelo ignora detalhes desprezíveis do processo natural e se concentra nas suas manifestações essenciais. Portanto, a segunda lei não inclui os efeitos da relatividade, que são de importância mínima quando aplicados a objetos e forças que interagem sobre a ou perto da superfície da Terra, com velocidades e em escalas visíveis aos humanos.

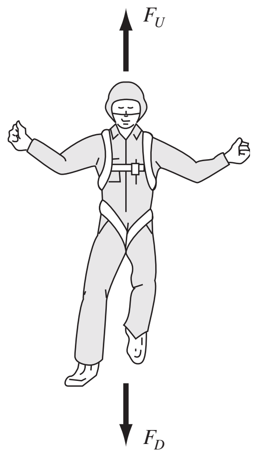


FIGURA 1.2
Diagrama esquemático das forças agindo em um pára-quedista em queda livre. F_D é a força devida à gravidade, para baixo. F_U é a força devida à resistência do ar, para cima.

3. Finalmente, ela produz resultados que podem ser reproduzidos e, conseqüentemente, ser usados para propósitos de previsão. Por exemplo, se a força sobre um objeto e a massa de um objeto são conhecidas, a Equação (1.3) pode ser usada para calcular a aceleração.

Por causa de sua forma algébrica simples, a solução da Equação (1.2) é facilmente obtida. Entretanto, outros modelos matemáticos de fenômenos físicos podem ser muito mais complexos e, ou não podem ser resolvidos exatamente, ou exigem técnicas matemáticas mais sofisticadas que a álgebra simples para sua solução. Para ilustrar um modelo mais complexo deste tipo, a segunda lei de Newton pode ser usada para determinar a velocidade terminal de um corpo em queda livre, perto da superfície da Terra. Nosso corpo em queda livre será um pára-quedista (Figura 1.2). Um modelo para esse caso pode ser deduzido expressando a aceleração como taxa de variação no tempo da velocidade (dv/dt) e substituindo-a na Equação (1.3) para obter

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{1.4}$$

onde v é a velocidade (m/s) e t é o tempo (s). Portanto, a massa multiplicada pela taxa de variação da velocidade é igual à força resultante agindo no corpo. Se a força resultante for positiva, o objeto irá acelerar. Se for negativa, o objeto vai desacelerar. Se a força resultante for nula, a velocidade do objeto permanecerá em um nível constante.

A seguir, vamos expressar a força resultante em termos das variáveis e parâmetros mensuráveis. Para um corpo em queda livre na vizinhança da Terra (Figura 1.2), a força resultante é composta de duas forças opostas: a força gravitacional, para baixo, F_D e a força da resistência do ar, para cima, F_U:

$$F = F_D + F_U \tag{1.5}$$

Se associarmos um sinal positivo à força para baixo, a segunda lei pode ser usada para escrever a força devida à gravidade como

$$F_D = mg \tag{1.6}$$

onde g é a constante gravitacional, ou a aceleração devida à gravidade, que é aproximadamente igual a 9,8 m/s^2.

A resistência do ar pode ser formulada de diversas maneiras. Uma abordagem simples é assumir que ela é linearmente proporcional à velocidade[1] e age no sentido para cima, como em

$$F_U = -cv \tag{1.7}$$

onde c é uma constante de proporcionalidade chamada de *coeficiente de arrasto* (kg/s). Portanto, quanto maior a velocidade de queda, maior a força para cima devida à resistência do ar. O parâmetro c representa as propriedades de objetos em queda livre, como a forma ou a aspereza da superfície, que afetam a resistência do ar. No caso presente, c poderia ser uma função do tipo de macacão ou da orientação usada pelo pára-quedista durante a queda livre.

A força resultante é a diferença entre a força para baixo e a força para cima. Portanto, as Equações (1.4) até (1.7) podem ser combinadas para fornecer

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \tag{1.8}$$

ou, simplificando o lado direito,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \tag{1.9}$$

[1] Na realidade, a relação é realmente não-linear e poderia ser mais bem representada por uma relação do tipo potência, como $FU = -cv^2$. Vamos explorar como tais não-linearidades afetam o modelo em um problema no final deste capítulo.

A Equação (1.9) é um modelo que relaciona a aceleração do objeto em queda às forças agindo nele. Ela é uma *equação diferencial* porque é escrita em termos da taxa de variação diferencial (dv/dt) da variável que estamos interessados em prever. Entretanto, em contraste com a solução da segunda lei de Newton na Equação (1.3), a solução exata da Equação (1.9) para a velocidade de um pára-quedista em queda livre não pode ser obtida usando manipulação algébrica simples. Em vez disso, técnicas mais avançadas como aquelas do cálculo devem ser aplicadas para se obter uma solução exata ou analítica. Por exemplo, se o pára-quedista estiver inicialmente em repouso ($v = 0$ em $t = 0$), o cálculo pode ser usado para resolver a Equação (1.9), fornecendo

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) \tag{1.10}$$

Observe que a Equação (1.10) está escrita na forma geral da Equação (1.1), onde $v(t)$ é a variável independente, t é a variável independente, c e m são parâmetros, e g é o termo forçante.

EXEMPLO 1.1

Solução Analítica para o Problema do Pára-quedista em Queda Livre

Enunciado do Problema. Um pára-quedista de massa 68,1 kg pula de um balão de ar quente parado. Use a Equação (1.10) para calcular a velocidade anterior à abertura do pára-quedas. O coeficiente de arrasto é igual a 12,5 kg/s.

Solução. Inserindo os parâmetros na Equação (1.10), obtemos

$$v(t) = \frac{9{,}8(68{,}1)}{12{,}5}\left(1 - e^{-(12{,}5/68{,}1)t}\right) = 53{,}39\left(1 - e^{-0{,}18355t}\right)$$

o que pode ser usado para calcular

t, s	*v*, m/s
0	0,00
2	16,40
4	27,77
6	35,64
8	41,10
10	44,87
12	47,49
∞	53,39

De acordo com o modelo, o pára-quedista acelera rapidamente (Figura 1.3). Uma velocidade de 44,87 m/s (100,4 mi/h) é atingida após 10 s. Observe também que, após um tempo suficientemente longo, é atingida uma velocidade constante, chamada de *velocidade terminal*, de 53,39 m/s (119,4 mi/h). Essa velocidade é constante porque, eventualmente, a força da gravidade estará em equilíbrio com a resistência do ar. Portanto, a força resultante é nula e a aceleração deixa de existir.

A Equação (1.10) é chamada uma *solução analítica* ou *exata* porque ela satisfaz exatamente a equação diferencial original. Infelizmente, existem muitos modelos matemáticos que não podem ser resolvidos exatamente. Em muitos desses casos, a única alternativa é desenvolver uma solução numérica que aproxime a solução exata.

Como mencionado previamente, os *métodos numéricos* são aqueles nos quais os problemas matemáticos são reformulados de forma que possam ser resolvidos por operações aritméticas. Isso pode ser ilustrado para a segunda lei de Newton, observando que a taxa de variação no tempo da velocidade pode ser aproximada por (Figura 1.4):

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{1.11}$$

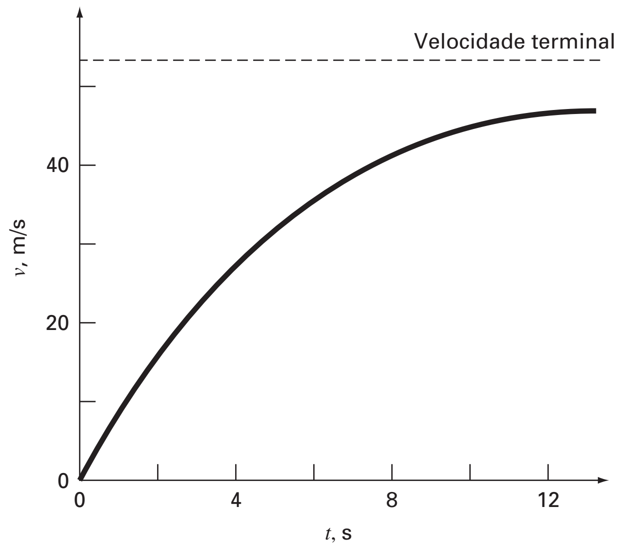


FIGURA 1.3
A solução analítica do problema do pára-quedista em queda livre, como calculada no Exemplo 1.1. A velocidade aumenta com o tempo e se aproxima assintoticamente da velocidade terminal.

onde Δv e Δt são diferenças na velocidade e no tempo, respectivamente, calculados sobre intervalos finitos, $v(t_i)$ é velocidade em um instante inicial t_i, e $v(t_{i+1})$ é velocidade em um instante posterior t_{i+1}. Observe que $dv/dt \cong \Delta v/\Delta t$ é aproximado porque Δt é finito. Lembre-se, do cálculo, que

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A Equação (1.11) representa o processo reverso.

A Equação (1.11) é chamada de aproximação por *diferença dividida finita* da derivada no instante t_i. Ela pode ser substituída na Equação (1.9) para fornecer

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m} v(t_i)$$

Esta equação pode ser rearranjada para fornecer

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i) \tag{1.12}$$

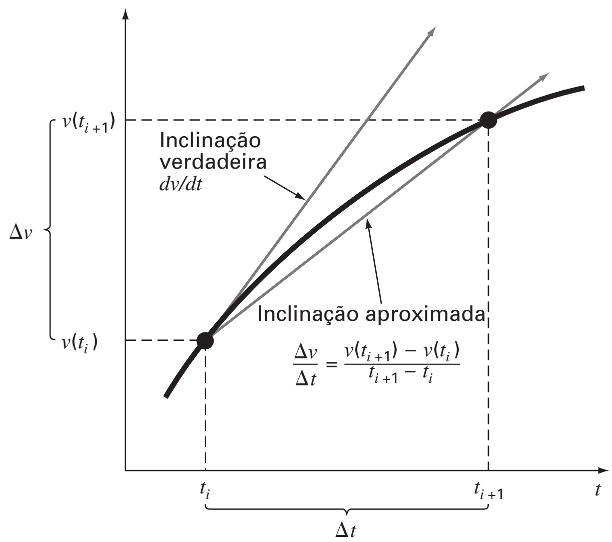


FIGURA 1.4
O uso de uma diferença finita para aproximar a primeira derivada de v com relação a t.

Observe que o termo entre colchetes é o lado direito da equação diferencial propriamente dita [Equação (1.9)]. Isto é, ela fornece um meio de calcular a taxa de variação ou a inclinação de v. Portanto, a equação diferencial foi transformada em uma equação que pode ser usada para determinar algebricamente a velocidade em t_{i+1} usando a inclinação e os valores anteriores de v e t. Se for dado um valor inicial para a velocidade em algum instante t_i, pode-se facilmente calcular a velocidade em um instante posterior t_{i+1}. Esse novo valor da velocidade em t_{i+1} pode, por sua vez, ser usado para estender o cálculo da velocidade a t_{i+2}, e assim por diante. Portanto, em qualquer instante ao longo do caminho,

Valor novo = valor velho + inclinação × tamanho do passo

Observe que essa abordagem é chamada oficialmente de *método de Euler*.

EXEMPLO 1.2 Solução Numérica para o Problema do Pára-quedista em Queda Livre

Enunciado do Problema. Faça os mesmos cálculos que no Exemplo 1.1, mas use a Equação (1.12) para calcular a velocidade. Use um passo de tamanho 2 s para os cálculos.

Solução. No início dos cálculos ($t_i = 0$), a velocidade do pára-quedista é zero. Usando essa informação e os valores dos parâmetros do Exemplo 1.1, a Equação (1.12) pode ser utilizada para calcular a velocidade em $t_{i+1} = 2$ s:

$$v = 0 + \left[9{,}8 - \frac{12{,}5}{68{,}1}(0)\right]2 = 19{,}60 \text{ m/s}$$

Para o intervalo seguinte (de $t = 2$ a 4 s), os cálculos são repetidos, com o resultado

$$v = 19{,}60 + \left[9{,}8 - \frac{12{,}5}{68{,}1}(19{,}60)\right]2 = 32{,}00 \text{ m/s}$$

Continua-se os cálculos, de forma análoga, para se obter valores adicionais:

t, s	*v*, m/s
0	0,00
2	19,60
4	32,00
6	39,85
8	44,82
10	47,97
12	49,96
∞	53,39

O resultado está representado graficamente na Figura 1.5, juntamente com a solução exata. Pode-se ver que o método numérico retrata as características essenciais da solução exata. Entretanto, como foram usados segmentos de retas para aproximar uma função que se curva continuamente, existe alguma discrepância entre os dois resultados. Uma forma de minimizar tais discrepâncias seria usar um passo de tamanho menor. Por exemplo, a aplicação da Equação (1.12) em intervalos de 1 s resulta em um erro menor, já que os segmentos de retas seguem a solução verdadeira mais de perto. Fazendo-se os cálculos à mão, o esforço associado ao uso de passos cada vez menores tornaria tais soluções numéricas não-práticas. Entretanto, com o auxílio do computador, grandes números de cálculos podem ser feitos facilmente. Portanto, pode-se modelar com exatidão a velocidade do pára-quedista em queda livre sem ter de resolver a equação diferencial exatamente.

Como no exemplo anterior, para resultados numéricos mais acurados, deve-se pagar o preço computacional. Cada vez que dividirmos o tamanho do passo pela metade, para obter mais acurácia teremos de fazer o dobro do número de cálculos. Assim, vemos que

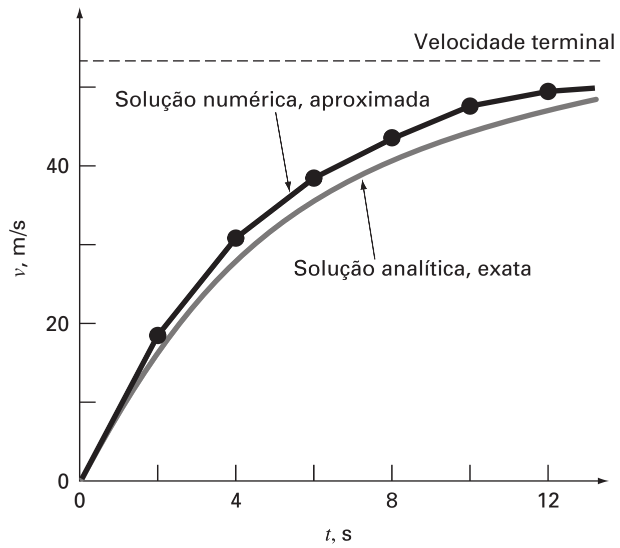


FIGURA 1.5
Comparação das soluções numéricas e analíticas do problema do pára-quedista em queda livre.

há um balanceamento entre a acurácia e o esforço computacional. Tais prós e contras figuram de forma proeminente nos métodos numéricos e constituem um tema importante neste livro. Conseqüentemente, devotamos o Epílogo da Parte Um a uma introdução a mais desses prós e contras.

1.2 LEIS DE CONSERVAÇÃO E ENGENHARIA

Além da segunda lei de Newton, existem outros princípios de organização importantes na engenharia. Entre os mais importantes deles estão as leis de conservação. Embora elas formem a base para uma variedade de modelos matemáticos complicados e poderosos, as grandes leis de conservação da ciência e da engenharia são conceitualmente fáceis de entender. Todas elas se reduzem a

$$\text{Variação} = \text{aumento} - \text{diminuição} \tag{1.13}$$

Essa é precisamente a forma empregada quando se usa a lei de Newton para deduzir o balanço de forças para um pára-quedista em queda livre [Equação (1.8)].

Embora simples, a Equação (1.13) engloba uma das formas mais fundamentais nas quais as leis de conservação são usadas em engenharia — isto é, para predizer variações com relação ao tempo. Dá-se à Equação (1.13) o nome especial de cálculo *dependente do tempo* (ou *transiente*).

Além de predizer variações, uma outra forma na qual as leis de conservação são aplicadas é no caso em que não existe a variação. Se a variação for nula, a Equação (1.13) se torna

$$\text{Variação} = 0 = \text{aumento} - \text{diminuição}$$

ou

$$\text{Aumento} = \text{diminuição} \tag{1.14}$$

Portanto, se não ocorrer nenhuma variação, o aumento e a diminuição devem estar balanceados. Esse caso, que também possui um nome especial — o cálculo de *estado estacionário* — tem muitas aplicações em engenharia. Por exemplo, para escoamentos de fluidos incompressíveis e estacionários em tubos, o escoamento entrando em uma junção deve ser balanceado pelo escoamento saindo, como em

$$\text{Escoamento entrando} = \text{escoamento saindo}$$

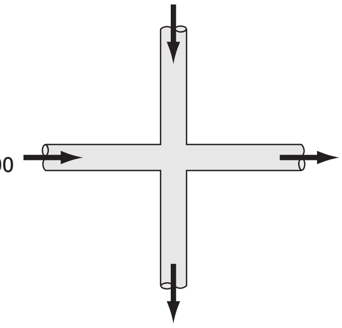


FIGURA 1.6
Um balanço de escoamento para o escoamento de um fluido incompressível e estacionário na junção de dois tubos.

Para a junção na Figura 1.6, o balanço pode ser usado para calcular que o escoamento saindo do quarto tubo deve ser 60.

Para o pára-quedista em queda livre, as condições estacionárias corresponderiam ao caso em que a força resultante fosse nula ou [Equação (1.8) com $dv/dt = 0$]

$$mg = cv \tag{1.15}$$

Desse modo, no estado estacionário, as forças para baixo e para cima estão balanceadas e a Equação (1.15) pode ser resolvida para se determinar a velocidade terminal

$$v = \frac{mg}{c}$$

Embora as Equações (1.13) e (1.14) possam parecer trivialmente simples, elas englobam as duas formas fundamentais nas quais as leis de conservação são empregadas em engenharia. Assim, elas constituirão uma parte importante de nossos esforços nos capítulos subseqüentes para ilustrar a conexão entre os métodos numéricos e a engenharia. Nossos veículos primários para fazer essa conexão são as aplicações em engenharia que aparecem no final de cada parte deste livro.

A Tabela 1.1 resume alguns dos modelos simples de engenharia e as leis de conservação associadas que formarão a base para muitas dessas aplicações em engenharia. A maioria das aplicações em engenharia química será focalizada no balanço de massa para reatores. O balanço de massa é deduzido da conservação de massa. Ele especifica que a variação de massa de um produto químico no reator depende da diferença da quantia de massa escoando para dentro e da quantia de massa escoando para fora.

As aplicações tanto em engenharia civil quanto em engenharia mecânica serão focalizadas em modelos desenvolvidos a partir da conservação do momento. Para a engenharia civil, os balanços de força são utilizados para analisar estruturas como a treliça simples na Tabela 1.1. Os mesmos princípios são usados nas aplicações em engenharia mecânica para analisar o movimento transiente para cima e para baixo ou as vibrações de um automóvel.

Finalmente, as aplicações em engenharia elétrica usam tanto balanço de corrente quanto de energia para modelar os circuitos elétricos. O balanço de corrente, que resulta da conservação da carga, é parecido — em essência — com o balanço de escoamento mostrado na Figura 1.6. Da mesma forma como o escoamento deve ser balanceado em uma junção de tubos, a corrente elétrica deve ser balanceada em uma junção de fios elétricos. O balanço de energia especifica que a variação de voltagem ao redor de qualquer laço de um circuito deve totalizar zero. As aplicações em engenharia são planejadas para ilustrar como os métodos numéricos são realmente empregados no processo de resolução de problemas de engenharia. Assim, elas vão permitir explorar questões práticas (Tabela 1.2) que aparecem em aplicações do mundo real. Fazer essas conexões entre as técnicas matemáticas, como os métodos numéricos, e a prática da engenharia é um passo crítico para usar seu verdadeiro potencial. Um exame cuidadoso das aplicações de engenharia vai ajudá-lo a dar esse passo.

TABELA 1.1 Dispositivos e tipos de balanços que são comumente usados nas quatro áreas principais da engenharia. Para cada caso, a lei de conservação na qual o balanço é baseado está especificada.

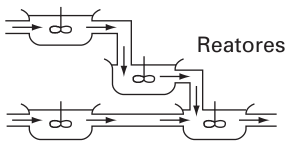
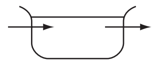
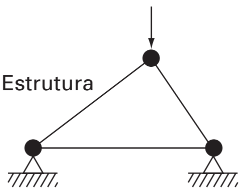
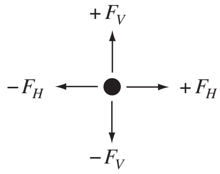
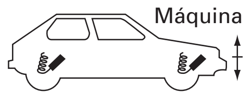
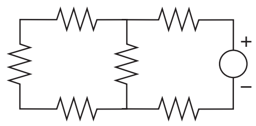
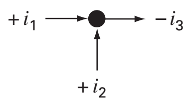
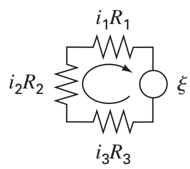
Área	Dispositivo	Princípio organizacional	Expressão matemática
Engenharia química		Conservação da massa	Balanço de massa  Sobre um período unitário de tempo Δmassa = entrada − saída
Engenharia civil		Conservação do momento	Balanço de força:  Em cada nó Σ forças horizontais (F_H) = 0 Σ forças verticais (F_V) = 0
Engenharia mecânica		Conservação do momento	Balanço de força:  $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ = força para baixo − força para cima
Engenharia elétrica	 Circuito	Conservação da carga	Balanço de corrente:  Para cada nó Σ corrente (i) = 0
		Conservação da energia	Balanço de voltagem:  Em torno de cada laço Σ fem's − Σ queda de voltagem por resistores = 0 $\Sigma\,\xi - \Sigma\, iR = 0$

TABELA 1.2 Algumas questões práticas que serão exploradas nas aplicações de engenharia no final de cada parte deste livro.

1. *Não-linear* versus *linear*. Muito da engenharia clássica depende da linearização para permitir soluções analíticas. Embora muitas vezes isso seja apropriado, pode-se aumentar a percepção ao se examinar os problemas não-lineares.
2. *Sistemas grandes* versus *pequenos*. Sem um computador, em geral não é possível examinar sistemas com mais de três componentes interagindo. Com computadores e métodos numéricos, sistemas com muitos componentes, mais realistas, podem ser examinados.
3. *Não-ideal* versus *ideal*. As leis idealizadas abundam em engenharia. Em geral, existem alternativas não-idealizadas que são mais realistas, mas que exigem mais do ponto de vista computacional. Abordagens numéricas apropriadas podem facilitar a aplicação dessas relações não-ideais.
4. *Análise de sensibilidade*. Como esse tipo de análise é bastante complicado, muitos cálculos manuais requerem uma grande quantidade de tempo e esforço para uma implementação bem-sucedida. Algumas vezes, isso desencoraja o analista de implementar os cálculos múltiplos que são necessários para examinar como o sistema responde sob diferentes condições. Tais análises de sensibilidade são facilitadas quando os métodos numéricos permitem que o computador assuma toda a carga computacional.
5. *Projeto*. Em geral, é uma tarefa simples determinar o desempenho de um sistema como uma função de seus parâmetros. Normalmente, é mais difícil resolver o problema inverso — isto é, determinar os parâmetros quando exigido é especificado. Os métodos numéricos e os computadores freqüentemente permitem que essa tarefa seja implementada de forma eficiente.