Item a)

Mostre se diverge ou converge

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = \frac{1}{4 - a_n},\ n \geq 1$$

Definamos a sequência em python.

```
def a(n):
    if n==1:
        return 1
    else:
        return 1/(4-a(n-1))

for n in range(1, 51):
    print('a({}) = {:.8f}'.format(n, a(n)))
```

```
a(1) = 1.00000000
a(2) = 0.33333333
a(3) = 0.27272727
a(4) = 0.26829268
a(5) = 0.26797386
a(6) = 0.26795096
a(7) = 0.26794932
a(8) = 0.26794920
a(9) = 0.26794919
a(10) = 0.26794919
a(11) = 0.26794919
a(12) = 0.26794919
a(13) = 0.26794919
a(14) = 0.26794919
a(15) = 0.26794919
a(16) = 0.26794919
a(17) = 0.26794919
a(18) = 0.26794919
a(19) = 0.26794919
a(20) = 0.26794919
a(21) = 0.26794919
a(22) = 0.26794919
a(23) = 0.26794919
a(24) = 0.26794919
a(25) = 0.26794919
a(26) = 0.26794919
a(27) = 0.26794919
a(28) = 0.26794919
a(29) = 0.26794919
a(30) = 0.26794919
a(31) = 0.26794919
a(32) = 0.26794919
a(33) = 0.26794919
a(34) = 0.26794919
a(35) = 0.26794919
a(36) = 0.26794919
a(37) = 0.26794919
a(38) = 0.26794919
a(39) = 0.26794919
a(40) = 0.26794919
a(41) = 0.26794919
a(42) = 0.26794919
a(43) = 0.26794919
a(44) = 0.26794919
a(45) = 0.26794919
a(46) = 0.26794919
a(47) = 0.26794919
a(48) = 0.26794919
a(49) = 0.26794919
a(50) = 0.26794919
```

Pelos valores plotados temos a noção de que convergirá. Suponhamos que a sequência converge para um valor L. Logo

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Da definição de a_{n+1}

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4 - a_n} = \frac{1}{4 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

Logo

$$L = \frac{1}{4 - L} \iff L^2 - 4L + 1 = 0 \Rightarrow L = 2 \pm \sqrt{3}$$

Vamos provar duas coisas agora: que a nossa sequência é limitada pelos valores acima e que ela é estritamente decrescente.

- a nossa sequência é limitada pelos valores $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$ (Prova por indução):

1. Caso inicial ($n = 1$):

$$a_1 = 1 \Rightarrow \boxed{2-\sqrt{3} < a_1 < 2+\sqrt{3}}$$

2. Assuma válido para $n = k \geq 1$:

$$\begin{gathered} 2-\sqrt{3} < a_k < 2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} < -a_k < \sqrt{3}-2 \\ \boxed{2-\sqrt{3} < 4-a_k < 2+\sqrt{3}} \end{gathered}$$

3. Verificando para $n = k+1$:

$$\begin{gathered} a_{k+1} = \frac{1}{4-a_k} \\ 4-a_k = \frac{1}{a_{k+1}} \\ 2-\sqrt{3} < \frac{1}{a_{k+1}} < 2+\sqrt{3} \\ \frac{1}{2+\sqrt{3}} < a_{k+1} < \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\ \boxed{2-\sqrt{3} < a_{k+1} < 2+\sqrt{3}} \end{gathered}$$

Portanto, a sequência é limitada por esses dois valores encontrados.

$$2-\sqrt{3} < a_n < 2+\sqrt{3},\ \forall n \geq 1$$

- A sequência é estritamente decrescente

Definamos a diferença

$$\begin{gathered} \Delta_n = a_{n+1} - a_n \\ \Delta_n = \frac{1}{4-a_n} - a_n \\ \Delta_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 1}{4-a_n} \end{gathered}$$

Como temos que $2-\sqrt{3} < a_n < 2+\sqrt{3}$ então

$$4 - a_k > 0 \ \ e \ \ a_n^2 - 4a_n + 1 < 0$$

Logo

$$\Delta_n < 0 \Longleftrightarrow \boxed{a_{n+1} < a_n \ ,\forall n \geq 1}$$

Como a sequência é limitada, positiva e estritamente decrescente, ela converge.

Ademais, ela converge para

$$L = 2-\sqrt{3}$$

Item b)

Mostre se diverge ou converge

$$S = 1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \frac{5}{8} + \frac{6}{10} - \frac{7}{12} + \dots$$

Solução:

Inicialmente, percebamos que podemos escrever a soma da seguinte forma

$$S = \frac{(-1)^0 \cdot (1+1)}{2\cdot 1} + \frac{(-1)^1 \cdot (2+1)}{2\cdot 2} + \frac{(-1)^2 \cdot (3+1)}{2\cdot 3} + \frac{(-1)^3 \cdot (4+1)}{2\cdot 4} + \dots$$

Ou seja

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)}{2\cdot n}$$

Se definirmos a sequência $\{a_n\}$ por

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n+1)}{2\cdot n}$$

Temos que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definamos também a soma finita por

$$S(N) = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Definindo o termo em python.

```
def a(n):
    return ((-1)**(n-1))*(n+1)/(2*n)

for i in range(1,10):
    print(a(i))
```

Definindo a soma.

```
def S(n):
    soma = 0
    for i in range(1, n+1):
        soma += a(i)

    return soma
```

Mostraremos alguns valores da soma para termos noção se converge ou diverge.

```
final = 50

for n in range(1, final+1):
    print("S({}) = {:.5f}".format(n, S(n)))
```

```
S(1) = 1.00000
S(2) = 0.25000
S(3) = 0.91667
S(4) = 0.29167
S(5) = 0.89167
S(6) = 0.30833
S(7) = 0.87976
S(8) = 0.31726
S(9) = 0.87282
S(10) = 0.32282
S(11) = 0.86827
S(12) = 0.32661
S(13) = 0.86507
S(14) = 0.32935
S(15) = 0.86269
S(16) = 0.33144
S(17) = 0.86085
S(18) = 0.33307
S(19) = 0.85939
S(20) = 0.33439
S(21) = 0.85820
S(22) = 0.33547
S(23) = 0.85721
S(24) = 0.33637
S(25) = 0.85637
S(26) = 0.33714
S(27) = 0.85566
S(28) = 0.33780
S(29) = 0.85505
S(30) = 0.33838
S(31) = 0.85451
S(32) = 0.33888
S(33) = 0.85403
S(34) = 0.33933
S(35) = 0.85361
S(36) = 0.33973
S(37) = 0.85324
S(38) = 0.34008
S(39) = 0.85290
S(40) = 0.34040
S(41) = 0.85260
S(42) = 0.34069
S(43) = 0.85232
S(44) = 0.34096
S(45) = 0.85207
S(46) = 0.34120
S(47) = 0.85184
S(48) = 0.34142
```

```
S(49) = 0.85162
S(50) = 0.34162
```

Através dos valores finitos temos a noção de que a sequência não converge.

E fácil provar isso visto que para uma série convergir os seus termos devem convergir para 0. Porém, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

temos que $a_n \neq 0$. Logo, a série não converge, mas oscila entre dois extremos.

0s conclusão: 11:11