CAPÍTULO 4

Erros de Truncamento e Séries de Taylor

Os *erros de truncamento* são aqueles que resultam do uso de uma aproximação no lugar de um procedimento matemático exato. Por exemplo, no Capítulo 1 aproximamos a derivada da velocidade de um pára-quedista em queda livre por uma equação de diferenças divididas da forma [Equação (1.11)]

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \tag{4.1}$$

Um erro de truncamento foi introduzido na solução numérica porque a equação de diferenças apenas aproxima o valor verdadeiro da derivada (lembre-se da Figura 1.4). Para obter uma percepção das propriedades de tais erros, será abordada agora uma formulação matemática que é amplamente usada nos métodos numéricos para expressar uma função de forma aproximada — a série de Taylor.[1]

4.1 A SÉRIE DE TAYLOR

O teorema de Taylor (Quadro 4.1) e sua fórmula associada, a série de Taylor, são de grande valia no estudo dos métodos numéricos. Em essência, a *série de Taylor* fornece um meio para prever o valor da função em um ponto em termos do valor da função e suas derivadas em um outro ponto. Em particular, o teorema afirma que qualquer função lisa pode ser aproximada por um polinômio.

Uma maneira útil de ganhar intuição sobre a série de Taylor é construí-la termo a termo. Por exemplo, o primeiro termo na série é

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \tag{4.2}$$

Essa relação, chamada de *aproximação de ordem zero*, indica que o valor de f no novo ponto é o mesmo que seu valor no ponto antigo. Este resultado faz sentido do ponto de vista intuitivo, pois se x_i e x_{i+1} estiverem perto um do outro, é provável que o novo valor seja parecido com o anterior.

A Equação (4.2) fornece uma estimativa perfeita se a função que estiver sendo aproximada for de fato constante. Entretanto, se a função variar de alguma forma no intervalo, termos adicionais da série de Taylor são necessários para fornecer uma estimativa melhor. Por exemplo, a *aproximação de primeira ordem* é deduzida adicionando-se mais um termo para obter

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{4.3}$$

O termo adicional de primeira ordem consiste em uma inclinação $f'(x_i)$ multiplicada pela distância entre x_i e x_{i+1}. Assim, a expressão agora tem a forma de uma reta e é capaz de prever um aumento ou uma diminuição entre x_i e x_{i+1}.

Embora a Equação (4.3) possa prever uma variação, ela é exata apenas para retas ou

[1] N.R.T.: O autor não faz distinção de nomenclatura entre a série de Taylor e um polinômio de Taylor. O sentido fica claro a partir do contexto.

Quadro 4.1 Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

Se a função f e suas primeiras $n + 1$ derivadas forem contínuas em um intervalo contendo a e x, então o valor da função em x é dado por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \tag{Q4.1.1}$$

onde o resto R_n é definido por

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{Q4.1.2}$$

onde t é uma variável muda. A Equação (Q4.1.1) é chamada de *série de Taylor ou fórmula de Taylor*. Se o resto for omitido, o lado direito da Equação (Q4.1.1) é a aproximação em polinômio de Taylor de $f(x)$. Em essência, o teorema afirma que qualquer função lisa pode ser aproximada por um polinômio.

A Equação (Q4.1.2) é apenas uma das maneiras, chamada de *forma integral*, nas quais o resto pode ser expresso. Uma formulação alternativa pode ser deduzida com base no teorema do valor médio para a integral.

Primeiro Teorema da Média para Integrais

Se uma função g for contínua (portanto, integrável) em um intervalo contendo a e x, então existe um ponto ξ entre a e x tal que

$$\int_a^x g(t)\,dt = g(\xi)(x-a) \tag{Q4.13}$$

Em outras palavras, esse teorema afirma que a integral pode ser representada por um valor médio para a função $g(\xi)$ vezes o comprimento do intervalo $x - a$. Como a média dever ocorrer entre os valores mínimo e máximo no intervalo, existe um ponto $x = \xi$ no qual a função assume o valor médio.

O primeiro teorema é, na realidade, um caso especial do segundo teorema do valor médio para integrais.

Segundo Teorema da Média para Integrais

Se as funções g e h forem contínuas (logo, integráveis) em um intervalo contendo a e x, e se h não mudar de sinal no intervalo, então existe um ponto ξ entre a e x tal que

$$\int_a^x g(t)h(t)\,dt = g(\xi)\int_a^x h(t)\,dt \tag{Q4.1.4}$$

Portanto, a Equação (Q4.1.3) é equivalente à Equação (Q4.1.4) com $h(t) = 1$.

O segundo teorema pode ser aplicado à Equação (Q4.1.2) com

$$g(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad h(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

Quando t varia de a a x, $h(t)$ é contínua e não muda de sinal. Portanto, se $f^{(n+1)}(t)$ for contínua, então o teorema do valor médio para a integração é válido e

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Essa equação é conhecida como a *forma derivada* ou *de Lagrange* do resto.

---

tendências *lineares*. Portanto, um termo de *segunda ordem* é adicionado à série para capturar alguma da curvatura que a função possa apresentar:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{4.4}$$

De forma similar, termos adicionais podem ser incluídos para se obter a expansão completa em série de Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n \tag{4.5}$$

Observe que, como a Equação (4.5) é uma série infinita, o sinal de igual substitui o sinal de aproximação usado nas Equações (4.2) a (4.4). O resto é incluído para representar todos os termos de $n + 1$ até infinito:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \tag{4.6}$$

onde o subscrito n indica que este é o resto para a aproximação de ordem n e ξ é um valor de x que está em algum ponto entre x_i e x_{i+1}. Essa introdução do ξ é tão importante que uma seção inteira (Seção 4.1.1) será dedicada à sua dedução. Por agora, é suficiente reconhecer que existe um tal valor que fornece uma determinação exata do erro.

Em geral, é conveniente simplificar a série de Taylor definindo um tamanho do passo $h = x_{i+1} - x_i$ e expressando a Equação (4.5) como

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \tag{4.7}$$

onde o resto agora é

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{4.8}$$

EXEMPLO 4.1

Aproximação de um Polinômio por Série de Taylor

Enunciado do Problema. Use expansões em séries de Taylor de ordem zero até ordem quatro para aproximar a função

$$f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

a partir de $x_i = 0$ com $h = 1$. Isto é, faça uma previsão do valor da função em $x_{i+1} = 1$.

Solução. Como se trata de uma função conhecida, pode-se calcular valores para $f(x)$ entre 0 e 1. Os resultados (Figura 4.1) indicam que a função começa em $f(0) = 1{,}2$ e então se curva para baixo até $f(1) = 0{,}2$. Logo, o valor verdadeiro que se tenta prever é 0,2.

A aproximação em série de Taylor com $n = 0$ é [Equação (4.2)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1{,}2$$

Então, como na Figura 4.1, a aproximação de ordem zero é uma constante. Usando essa formulação, obtém-se um erro de truncamento [lembre-se da Equação (3.2)] de

$$E_t = 0{,}2 - 1{,}2 = -1{,}0$$

em $x = 1$.

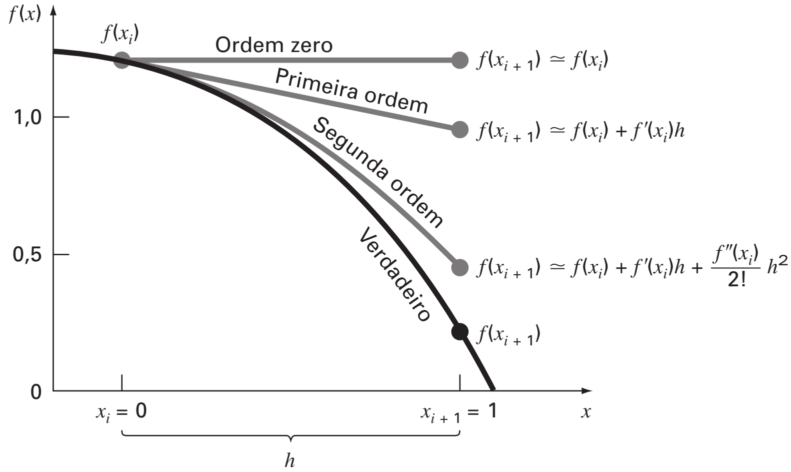
Para $n = 1$, a primeira derivada deve ser determinada e calculada em $x = 0$:

$$f'(0) = -0{,}4(0{,}0)^3 - 0{,}45(0{,}0)^2 - 1{,}0(0{,}0) - 0{,}25 = -0{,}25$$

Portanto, a aproximação de primeira ordem é [Equação (4.3)]

$$f(x_{i+1}) \simeq 1{,}2 - 0{,}25h$$

FIGURA 4.1
A aproximação de $f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$ em $x = 1$ por expansões em séries de Taylor de ordem zero, de primeira ordem e de segunda ordem.



que pode ser usada para calcular $f(1) = 0{,}95$. Conseqüentemente, a aproximação começa a capturar a trajetória voltada para baixo da função na forma de uma reta inclinada (Figura 4.1), o que resulta em uma redução do erro de truncamento para

$$E_t = 0{,}2 - 0{,}95 = -0{,}75$$

Para $n = 2$, a segunda derivada é calculada em $x = 0$:

$$f'(0) = -1{,}2(0{,}0)^2 - 0{,}9(0{,}0) - 1{,}0 = -1{,}0$$

Logo, de acordo com a Equação (4.4),

$$f(x_{i+1}) \simeq 1{,}2 - 0{,}25h - 0{,}5h^2$$

e substituindo $h = 1, f(1) = 0{,}45$. A inclusão da segunda derivada agora adicionou alguma curvatura para baixo resultando em uma estimativa melhor, como visto na Figura 4.1. O erro de truncamento foi reduzido ainda mais, para $0{,}2 - 0{,}45 = -0{,}25$.

Termos adicionais melhorariam a aproximação ainda mais. De fato, a inclusão da terceira e da quarta derivadas resulta exatamente na mesma equação do começo:

$$f(x) = 1{,}2 - 0{,}25h - 0{,}5h^2 - 0{,}15h^3 - 0{,}1h^4$$

onde o termo de resto é

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}h^5 = 0$$

porque a quinta derivada de um polinômio de quarta ordem é nula. Conseqüentemente, a expansão em série de Taylor até a quarta derivada fornece uma estimativa exata em $x_{i+1} = 1$:

$$f(1) = 1{,}2 - 0{,}25(1) - 0{,}5(1)^2 - 0{,}15(1)^3 - 0{,}1(1)^4 = 0{,}2$$

Em geral, a expansão em série de Taylor de ordem n será exata para um polinômio de grau n. Para outras funções diferenciáveis (portanto, contínuas), como exponenciais e funções senoidais, um número finito de termos não resultará em uma estimativa exata. Cada termo adicional irá contribuir com alguma melhora, ainda que pequena, para a aproximação. Esse comportamento será ilustrado no Exemplo 4.2. Apenas se um número infinito de termos for somado a série fornecerá um valor exato.[2]

Embora o que foi dito seja verdadeiro, o valor prático da expansão em série de Taylor é que, na maioria dos casos, a inclusão de apenas poucos termos resultará em uma aproximação que será suficientemente próxima do valor verdadeiro para fins práticos. A avaliação de quantos termos são necessários para ficar “suficientemente próximo” é baseada no resto da expansão. Lembre-se de que o resto tem a forma geral da Equação (4.8). Essa relação tem dois grandes defeitos. Primeiro, ξ não é conhecido exatamente, mas simplesmente está em algum lugar entre x_i e x_{i+1}. Segundo, para se calcular a Equação (4.8), é preciso determinar a $(n + 1)$-ésima derivada de $f(x)$. Para fazer isso, é necessário conhecer $f(x)$. Entretanto, se $f(x)$ fosse conhecida, não seria preciso fazer a expansão em série de Taylor no contexto atual!

Apesar desse dilema, a Equação (4.8) ainda é útil para se ganhar intuição sobre os erros de truncamento, porque, *de fato*, há controle sobre o termo h na equação. Em outras palavras, é possível escolher quão longe de x se quer calcular $f(x)$ e controlar o número de termos incluídos na expansão. Conseqüentemente, a Equação (4.8) em geral é expressa como

$$R_n = O(h^{n+1})$$

onde a nomenclatura $O(h^{n+1})$ significa que o erro de truncamento é da ordem de h^{n+1}. Ou seja, o erro é proporcional ao tamanho do passo h elevado à (n + 1)-ésima potência. Embora essa aproximação não tenha nenhuma implicação no valor da derivada que multiplica h^{n+1},

[2] N.R.T.: Na verdade, isto só é válido para as funções cujas séries de Taylor convergem para ele, ou seja, para funções reais analíticas. As funções deficiárias que ocorrem nas aplicações, em geral têm essa propriedade.

ela é extremamente útil para julgar o erro comparativo de métodos numéricos baseados em expansões em séries de Taylor. Por exemplo, se o erro for $O(h)$, dividir o tamanho do passo por dois fará com que o erro seja dividido por dois. Por outro lado, se o erro for da ordem de $O(h^2)$, dividir o tamanho do passo por dois fará com que o erro seja dividido por quatro.

Em geral, pode-se supor que o erro de truncamento diminui com a adição de termos na série de Taylor. Em muitos casos, se h for suficientemente pequeno, o primeiro e alguns outros termos de baixa ordem geralmente dão conta de uma percentagem desproporcionalmente alta dos erros. Assim, apenas poucos termos serão necessários para se obter uma estimativa adequada. Essa propriedade é ilustrada no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4.2 Uso da Expansão em Série de Taylor para Aproximar uma Função com um Número Infinito de Derivadas

Enunciado do Problema. Use expansões em séries de Taylor com $n = 0$ até 6 para aproximar $f(x) = \cos x$ em $x_{i+1} = \pi/3$ com base no valor de $f(x)$ e suas derivadas em $x_i = \pi/4$. Observe que isso significa que $h = \pi/3 - \pi/4 = \pi/12$.

Solução. Como visto no Exemplo 4.1, o conhecimento da função verdadeira significa que é possível determinar o valor correto de $f(\pi/3) = 0{,}5$.

A aproximação de ordem 0 é [Equação (4.3)]

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707106781$$

o que representa um erro porcentual relativo de

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}5 - 0{,}707106781}{0{,}5} 100\% = -41{,}4\%$$

Para a aproximação de primeira ordem, adiciona-se o termo da primeira derivada, $f'(x) = -\text{sen}\, x$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}521986659$$

que tem $\varepsilon_t = -4{,}40\%$.

Para a aproximação de segunda ordem, adiciona-se o termo da segunda derivada, $f''(x) = -\cos x$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\cos(\pi/4)}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 0{,}497754491$$

com $\varepsilon_t = 0{,}449\%$. Logo, a inclusão de um termo adicional resultou em uma melhora na estimativa.

Pode-se continuar o processo e listar os resultados, como na Tabela 4.1. Observe que as derivadas nunca se anulam, como aconteceu com o polinômio do Exemplo 4.1. Portanto, cada termo adicional resulta em alguma melhora na estimativa. Entretanto, observe

TABELA 4.1 Aproximação em série de Taylor de $f(x) = \cos x$ em $x_{i+1} = \pi/3$ usando o ponto base $\pi/4$. São mostrados os valores para diversas ordens (n) de aproximação.

Ordem n	$f^{(n)}(x)$	$f(\pi/3)$	ε_t
0	$\cos x$	0,707106781	−41,4
1	$-\text{sen}\, x$	0,521986659	−4,4
2	$-\cos x$	0,497754491	0,449
3	$\text{sen}\, x$	0,499869147	$2{,}62 \times 10^{-2}$
4	$\cos x$	0,500007551	$-1{,}51 \times 10^{-3}$
5	$-\text{sen}\, x$	0,500000304	$-6{,}08 \times 10^{-5}$
6	$-\cos x$	0,499999988	$2{,}44 \times 10^{-6}$

também que a maior parte da melhora acontece nos termos iniciais. Nesse caso, quando se tiver somado o termo de terceira ordem, o erro terá sido reduzido a $2{,}62 \times 10^{-2}$ %, o que significa que foram obtidos 99,973% do valor verdadeiro. Conseqüentemente, embora a adição de mais termos reduza mais ainda o erro, a melhora se torna desprezível.

4.1.1 O Resto na Expansão em Série de Taylor

Antes de ilustrar como a série de Taylor é realmente usada para estimar erros numéricos, é preciso explicar por que o argumento ξ foi incluído na Equação (4.8). Uma dedução matemática é apresentada no Quadro 4.1. Agora será desenvolvida uma exposição alternativa baseada em uma interpretação um pouco mais visual. Então, esse caso específico poderá ser estendido à formulação mais geral.

Suponha que a expansão em série de Taylor [Equação(4.7)] seja truncada depois do termo de ordem zero para se obter

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Uma descrição visual dessa previsão de ordem zero é mostrada na Figura 4.2. O resto — ou erro — dessa previsão, que também está mostrado na figura, consiste na série infinita dos termos truncados:

$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

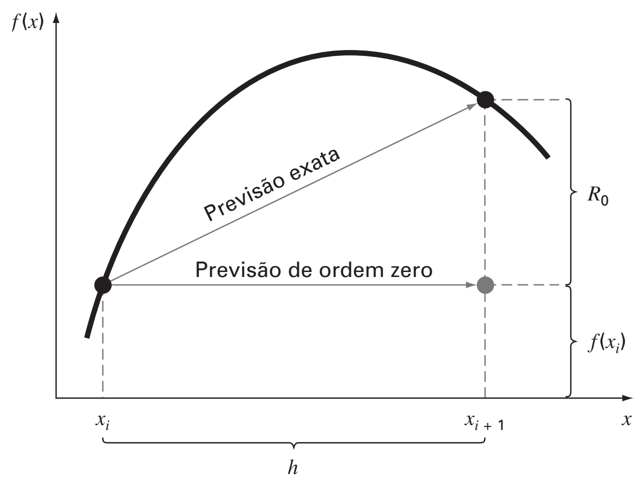
É óbvia a inconveniência de lidar com o resto nessa forma de série infinita. Uma simplificação seria truncar o próprio resto, como em

$$R_0 \cong f'(x_i)h \tag{4.9}$$

Embora, como afirmado na seção anterior, as derivadas de ordem mais baixa em geral sejam responsáveis por parte maior do resto do que os termos de ordem mais alta, esse resultado ainda não é exato por causa dos termos de segunda ordem e de ordens mais altas desprezados. Essa "inexatidão" é representada pelo símbolo de igualdade aproximada ($\cong$) usado na Equação (4.9).

Uma simplificação alternativa que transforma a aproximação em uma equivalência é baseada em uma observação gráfica. Como na Figura 4.3, o teorema do valor médio para derivadas afirma que, se uma função $f(x)$ e sua primeira derivada forem contínuas em um intervalo da forma x_i a x_{i+1}, então existe pelo menos um ponto na função que tem uma

FIGURA 4.2
Descrição gráfica da previsão de ordem zero da série de Taylor e do resto.



inclinação, denotada por $f'(\xi)$, que é paralela à reta ligando $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$. O parâmetro ξ designa o valor de x onde essa inclinação ocorre (Figura 4.3). Uma ilustração física desse teorema é que, se você viajar entre dois pontos com uma dada velocidade média, existirá pelo menos um instante durante o percurso no qual você estará movendo-se na velocidade média.

Usando esse teorema, é simples perceber que, como ilustrado pela Figura 4.3, a inclinação $f'(\xi)$ é igual à elevação R_0 dividida pelo passo h, ou

$$f'(\xi) = \frac{R_0}{h}$$

que pode ser reorganizado para fornecer

$$R_0 = f'(\xi)h \tag{4.10}$$

Assim, deduz-se a versão para ordem zero da Equação (4.8). As versões em ordem superior são meramente uma extensão lógica do raciocínio usado para deduzir a Equação (4.10). A versão de primeira ordem é

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \tag{4.11}$$

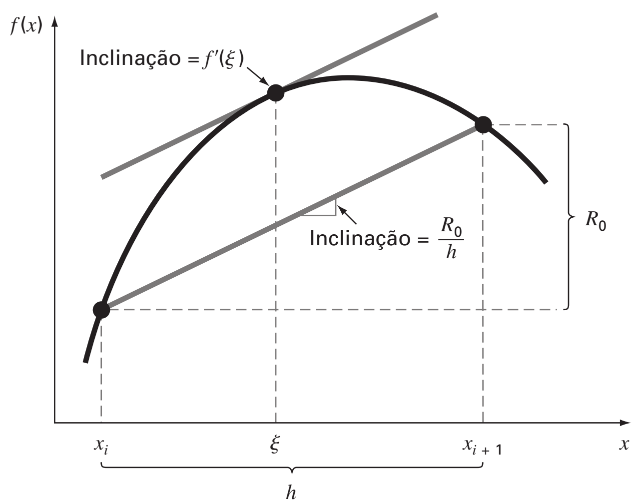
Para esse caso, o valor de ξ deve-se adequar ao valor de x correspondendo à segunda derivada que torna a Equação (4.11) exata. Versões similares de ordem superior podem ser deduzidas a partir da Equação (4.8).

4.1.2 Usando a Série de Taylor para Fazer uma Estimativa do Erro de Truncamento

Embora a série de Taylor vá ser extremamente útil na estimativa dos erros de truncamento em todo este livro, pode não ser claro para você como a expansão pode realmente ser aplicada no método numérico. De fato, já fizemos isso no exemplo do pára-quedista em queda livre. Lembre que o objetivo dos Exemplos 1.1 e 1.2 era prever a velocidade como uma função do tempo. Isto é, o interesse era determinar $v(t)$. Como especificado pela Equação (4.5), $v(t)$ pode ser expandida em uma série de Taylor:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \cdots + R_n \tag{4.12}$$

FIGURA 4.3
Descrição gráfica do teorema do valor médio para derivadas.



Agora, trunca-se a série depois do termo da primeira derivada:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1 \tag{4.13}$$

A Equação (4.13) pode ser reescrita como

$$v'(t_i) = \underbrace{\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\substack{\text{Aproximação de} \\ \text{primeira ordem}}} - \underbrace{\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}}_{\substack{\text{Erro de} \\ \text{truncamento}}} \tag{4.14}$$

A primeira parte da Equação (4.14) é exatamente a mesma relação que foi usada para aproximar a derivada no Exemplo 1.2 [Equação (1.11)]. Entretanto, com a abordagem com a série de Taylor, obteve-se agora uma estimativa para o erro de truncamento associado com essa aproximação da derivada. Usando as Equações (4.6) e (4.14), obtém-se

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = \frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1} - t_i) \tag{4.15}$$

ou

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = O(t_{i+1} - t_i) \tag{4.16}$$

Assim, a estimativa da derivada [Equação (1.11) ou a primeira parte da Equação (4.14)] tem um erro de truncamento da ordem de $t_{i+1} - t_i$. Em outras palavras, o erro na aproximação da derivada deveria ser proporcional ao tamanho do passo. Conseqüentemente, se o tamanho do passo for dividido por dois, deve-se esperar que o erro na derivada seja dividido por dois.

EXEMPLO 4.3

O Efeito da Não-Linearidade e do Tamanho do Passo na Aproximação em Série de Taylor

Enunciado do problema. A Figura 4.4 é o gráfico da função

$$f(x) = x^m \tag{E4.3.1}$$

para $m = 1$, 2, 3, e 4 no intervalo de $x = 1$ a 2. Observe que para $m = 1$ a função é linear, e conforme m aumenta, mais curvatura ou não-linearidade é introduzida na função. Use a série de Taylor de primeira ordem para aproximar essa função para vários valores do expoente m e do tamanho do passo h.

Solução. A Equação (E4.3.1) pode ser aproximada por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, como em

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + mx_i^{m-1}h \tag{E4.3.2}$$

que tem um resto

$$R_1 = \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x_i)}{4!}h^4 + \cdots$$

Primeiro, pode-se examinar como a aproximação se comporta à medida que m aumenta — isto é, à medida que a função se torna mais não-linear. Para $m = 1$, o valor real da função em $x = 2$ é 2.
A série de Taylor fornece

$$f(2) = 1 + 1(1) = 2$$

e

$$R_1 = 0$$

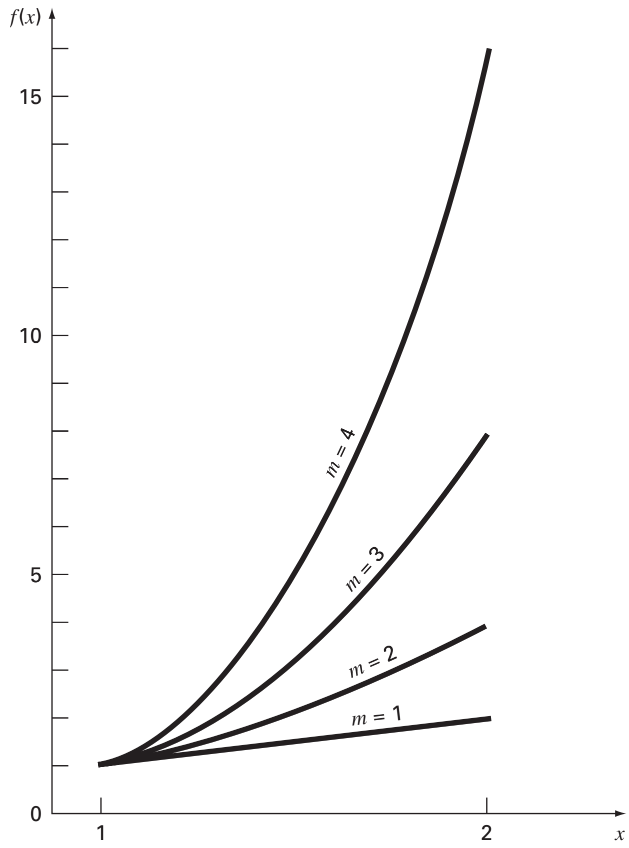


FIGURA 4.4
Gráfico da função $f(x) = x^m$ para $m = 1, 2, 3$ e 4. Observe que a função se torna mais não-linear à medida que m aumenta.

O resto é zero porque a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta de uma função linear são nulas. Assim, como esperado, a expansão em série de Taylor de primeira ordem é perfeita quando a função envolvida for linear.

Para $m = 2$, o valor real é $f(2) = 2^2 = 4$. A aproximação em série de Taylor de primeira ordem é

$$f(2) = 1 + 2(1) = 3$$

e

$$R_1 = \frac{2}{2}(1)^2 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Assim, como a função é uma parábola, a aproximação por uma reta resulta em uma discrepância. Observe que o resto é determinado exatamente.

Para $m = 3$, o valor real é $f(2) = 2^3 = 8$. A aproximação em série de Taylor é

$$f(2) = 1 + 3(1)^2(1) = 4$$

e

$$R_1 = \frac{6}{2}(1)^2 + \frac{6}{6}(1)^3 + 0 + 0 + \cdots = 4$$

Novamente, existe uma discrepância que pode ser determinada exatamente a partir da série de Taylor.

Para $m = 4$, o valor real é $f(2) = 2^4 = 16$. A aproximação em série de Taylor é

$$f(2) = 1 + 4(1)^3(1) = 5$$

e

$$R_1 = \frac{12}{2}(1)^2 + \frac{24}{6}(1)^3 + \frac{24}{24}(1)^4 + 0 + 0 + \cdots = 11$$

Com base nesses quatro casos, observa-se que R_1 cresce à medida que a função se torna mais não-linear. Além disso, R_1 representa exatamente essa discrepância, porque a Equação (E4.3.1) é um simples monômio com um número finito de derivadas não-nulas. Isso permite a determinação completa do resto da série de Taylor.

A seguir, examinaremos a Equação (E4.3.2) para o caso $m = 4$ e observaremos como R_1 varia à medida que o tamanho do passo h varia. Para $m = 4$, a Equação (E4.3.2) é

$$f(x + h) = f(x) + 4x_i^3 h$$

Se $x = 1, f(1) = 1$ e essa equação pode ser expressa por

$$f(1 + h) = 1 + 4h$$

com um resto de

$$R_1 = 6h^2 + 4h^3 + h^4$$

Isso leva à conclusão de que a discrepância irá diminuir conforme h for reduzido. Além disso, para valores suficientemente pequenos de h, o erro deve tornar-se proporcional a h^2. Ou seja, se h for dividido por dois, o erro será dividido por quatro. Esse comportamento é confirmado pela Tabela 4.2 e pela Figura 4.5.

Assim, conclui-se que o erro da aproximação por polinômio de Taylor de primeira ordem diminui quando m se aproxima de 1 e quando h diminui. Intuitivamente, isso significa que a série de Taylor se torna mais precisa quando a função que está sendo aproximada se torna mais parecida com uma reta no intervalo de interesse — o que pode ser conseguido ou reduzindo-se o tamanho do intervalo ou "retificando-se" a função pela redução de m. Obviamente, a última opção, em geral, não está disponível no mundo real, porque as funções que analisamos são determinadas tipicamente pelo contexto do problema físico. Conseqüentemente, não há controle de sua falta de linearidade, e o único recurso é reduzir o tamanho do passo ou incluir termos adicionais na expansão em série de Taylor.

TABELA 4.2 Comparação do valor exato da função $f(x) = x^4$ com a aproximação em série de Taylor de primeira ordem. Tanto a função como a aproximação estão calculadas em $x + h$, onde $x = 1$.

h	Verdadeiro	Aproximação de Primeira Ordem	R_1
1	16	5	11
0,5	5,0625	3	2,0625
0,25	2,441406	2	0,441406
0,125	1,601807	1,5	0,101807
0,0625	1,274429	1,25	0,024429
0,03125	1,130982	1,125	0,005982
0,015625	1,063980	1,0625	0,001480