Questões de Sala - Fundamentos de Matemática Discreta
Soluções - Wanderson Faustino Patricio
Ciência da Computação - 2022.1 - UFCA

1 Prove que $\sum_{i=1}^{n}(4i-2) = 2n^2;\ \forall n \geq 1 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} 4i - 2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2 = 2 \cdot 1^2$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(4i-2) = 2(k-1)^2$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-2) = (4k-2) + \sum_{i=1}^{k-1}(4i-2) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-2) = (4k-2) + 2(k-1)^2 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-2) = 4k - 2 + 2(k^2 - 2k + 1) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-2) = 4k - 2 + 2k^2 - 4k + 2 \iff$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}(4i-2) = 2k^2}$$

2 Prove que $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1);\ \forall n \geq 1 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} 2i = 2 \cdot 1 = 1(1+1)$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2i = (k-1)(k-1+1) = k(k-1)$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = 2k + \sum_{i=1}^{k-1} 2i \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = 2k + k(k-1) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = 2k + k^2 - k \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 2i = k^2 + k \iff$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)}$$

3 Prove que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6};\ \forall n \geq 1 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(k-1)(k-1+1)(k-1+2)}{6} = \frac{(k-1)(k)(k+1)}{6}$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i(i+1)}{2} \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k)(k+1)(k-1)}{6} \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \cdot \left(1 + \frac{k-1}{3}\right) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \cdot \frac{k+2}{3} \iff$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}}$$

4 Prove que $\sum_{i=1}^{n} 4i - 3 = n(2n-1);\ \forall n \geq 1 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} 4i - 3 = 4 \cdot 1 - 3 = 1 = 1(2 \cdot 1 - 1)$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 4i - 3 = (k-1)\left[2\left(k-1\right) - 1\right] = (k-1)(2k-3)$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$\sum_{i=1}^{k} 4i - 3 = (4k-3) + \sum_{i=1}^{k-1} 4i - 3 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 4i - 3 = 4k - 3 + (k-1)(2k-3) \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 4i - 3 = 4k - 3 + 2k^2 - 3k - 2k + 3 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{k} 4i - 3 = 2k^2 - k \iff$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} 4i - 3 = k(2k-1)}$$

5 Prove que $n! < n^n; \ \forall n \geq 2 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 2$):

$$2! < 2^2$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 2$:

$$(k-1)! < (k-1)^{k-1}$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$k! = k(k-1)!$$

$$k! < k(k-1)^{k-1}$$

Como $k - 1 < k \Rightarrow (k-1)^{k-1} < k^{k-1}$

$$k! < k(k-1)^{k-1} < k \cdot k^{k-1} = k^k$$

$$\boxed{k! < k^k}$$

6 Prove que $n! > n^2; \ \forall n \geq 4 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 4$):

$$24 > 16 \Longleftrightarrow 4! > 4^2$$

(ii) Assuma válido para $n = k - 1 \geq 4$:

$$(k-1)! > (k-1)^2$$

(iii) Verificando para $n = k$

$$k! = k(k-1)! > k(k-1)^2$$

Como $k \geq 5 \Rightarrow (k-1)^2 > k$

$$k! > k(k-1)^2 > k \cdot k$$

$$\boxed{k! > k^2}$$

7 Prove que $3^{2n} + 7$ é múltiplo de $8; \ \forall n \geq 0 \in \mathbb{N}$

Prova por indução:

(i) Caso incial ($n = 0$):

$$3^{2 \cdot 0} + 7 = 1 + 7 = 8 \cdot 1$$

(ii) Assuma válido para $n = k \geq 0$:

$$3^{2k} + 7 = 8m; \ m \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$$

$$3^{2k} = 8m - 7$$

(iii) Verificando para $n = k + 1$:

$$3^{2(k+1)} + 7 = 3^{2k+2} + 7 = 3^2 \cdot 3^{2k} + 7$$

$$3^{2(k+1)} + 7 = 9(8m - 7) + 7$$

$$3^{2(k+1)} + 7 = 8 \cdot 9m - 63 + 7 = 8 \cdot 9m - 56$$

$$3^{2(k+1)} + 7 = 8 \cdot (9m - 7)$$

$$\boxed{8|3^{2(k+1)} + 7}$$

8 Prove que $7^n - 2^n$ é divisível por 5; $\forall n \geq 0 \in \mathbb{N}$

(i) $n = 0$:

$$7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$$

(ii) $n = 1$:

$$7^1 - 2^1 = 5 = 5 \cdot 1$$

(iii) $n \geq 2$

Relembrando a fatoração de $a^n - b^n$:

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Fazendo $a \equiv 7$ e $b \equiv 2$:

$$7^n - 2^n = (7 - 2)\left(7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 2 + 7^{n-3} \cdot 2^2 + \ldots + 7 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right)$$

$$7^n - 2^n = 5 \cdot \left(7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 2 + 7^{n-3} \cdot 2^2 + \ldots + 7 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right)$$

$$\boxed{7^n - 2^n = 5k;\ k \in \mathbb{Z}}$$