1 Questão 01

Determine a expressão de uma transformaçã linear $\mathbf{P}_2(\mathbb{R}) \mapsto M_{2x2}(\mathbb{R})$ **que tenha como imagem o subespaço**

$$T(\mathbf{P}_2(\mathbb{R})) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e como núcleo $ker(T) = \langle 1 + x \rangle$.

2 Questão 02

Sejam $T \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ **um operador linear,** $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ com

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a expressão de $T(x,y,z)$.
SOLUÇÃO:

$$[T]_{C,C} = M_C^B \cdot [T]_{B,B} \cdot M_B^C$$

Seja $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^3$.
Expressando os vetores de B em função dos de C:

i) $(1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$

ii) $(1,1,0) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$

iii) $(1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$

Mudança de base de B pra C:

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lembrando que:

$$M_B^C = \left(M_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Logo:

$$\boxed{T(x,y,z) = (2x - 3y + 5z, x - 2y + 4z, x - y + 2z)}$$

3 Questão 03

Considere o operador $T : \mathbf{P}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbf{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = (2b - 2c) + (2a + 2c)x + 2cx^2$$

a) Encontre os autovalores de T e os espaços associados a eles.

SOLUÇÃO:

$C = \{1, x, x^2\}$.

$$[T]_{C,C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & 0 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 \cdot (-2 - \lambda)$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Calculando os espaços associados:

i)

$$T(a + bx + cx^2) = 2(a + bx + cx^2)$$

$$(2b - 2c) + (2a + 2c)x + 2cx^2 = 2a + 2bx + 2cx^2$$

$$\boxed{c = b - a}$$

Logo

$$a + bx + cx^2 = a + bx + (b - a)x^2 = a(1 - x^2) + b(x + x^2)$$

Logo:

$$\boxed{V(2) = \left\langle 1 - x^2, x + x^2 \right\rangle}$$

ii)

$$T(a+bx+cx^2) = -2(a+bx+cx^2)$$

$$(2b-2c)+(2a+2c)x+2cx^2 = -2a-2bx-2cx^2$$

$$\boxed{c = 0 \ e \ b = -a}$$

Logo

$$a+bx+cx^2 = a+-ax+0x^2 = a(1-x)$$

Logo:

$$\boxed{V(-2) = \langle 1-x \rangle}$$

b) T é diagonalizável? Se sim , exiba uma base de $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $\big[T\big]_{B,B}$ é uma matriz diagonal e exiba $\big[T\big]_{B,B}$

SOLUÇÃO:

Como para todos os autovalores sua multiplicidades algébricas são iguais as geométricas, e a soma das multiplicidades algébricas é igual a dimensão do espaço $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$, então T é diagonálizavel.

Tome

$$B = \{1-x, 1-x^2, x+x^2\}$$

Logo

$$\big[T\big]_{B,B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Questão 04

Seja $T : \mathbb{R}^4 \mapsto M_{2x2}(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -t \end{pmatrix}$$

a) Mostre de T é um isomorfismo.

SOLUÇÃO:

Como $dim(\mathbb{R}^4) = dim(M_{2x2}(\mathbb{R})) = 4$ basta provar que T é injetora.

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = y = z = t = 0$$

portanto T é injetora, logo, isomorfismo.

b) Encontre a expressão de $T^{-1} : M_{2x2}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^4$.

SOLUÇÃO:

Tome $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canônica de $M_{2x2}(\mathbb{R})$

e $C = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^4$.

$$\left[T\right]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lembrando que:

$$\left[T^{-1}\right]_{B,C} = \left(\left[T\right]_{C,B}\right)^{-1}$$

$$\left[T^{-1}\right]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\boxed{T^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}, -t\right)}$$

5 Questão 05

Seja $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ e suponhamos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = 2$ sejam os autovalores da A.

a) A é diagonalizável? Justifique.

SOLUÇÃO:

$\exists T \in L(\mathbb{R}^3)$ e B base de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\left[T\right]_{B,B} = A$$

Logo λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de T, como há 3 valores distintos e $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, T é diag., portanto, há é diag..

b) calcule $det\left(\left(A^{-1}\right)^t\right)$

SOLUÇÃO:

Como A há é diag. $\exists M\ invertível\ \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M$$

Com $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Logo

$$det(A) = det(M^{-1} \cdot B \cdot M) = det(M^{-1}) \cdot det(B) \cdot det(M)$$

$$det(A) = \frac{1}{det(M)} \cdot det(B) \cdot det(M) = det(B) \Rightarrow det(A) = det(B) = 8$$

Portanto:

$$det\left(\left(A^{-1}\right)^t\right) = det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det(A)}$$

$$\boxed{det\left(\left(A^{-1}\right)^t\right) = \frac{1}{8}}$$

c) calcule o traço de A^2.

SOLUÇÃO:

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \Rightarrow A^2 = M^{-1} \cdot B \cdot M \cdot M^{-1} \cdot B \cdot M$$

$$A^2 = M^{-1} \cdot B^2 \cdot M = M^{-1} \cdot (B^2 \cdot M)$$

$$tr(A^2) = tr(M^{-1} \cdot (B^2 \cdot M)) = tr((B^2 \cdot M) \cdot M^{-1}) = tr(B^2)$$

$$\boxed{tr(A^2) = 21}$$

6 Questão 06

Lembrando que:

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$$

a) Injetora $\iff ket(T) = \{0\} = Im(T)$

$$dim(ker(T)) = dim(Im(T)) = 0$$
$$dim(V) = 0$$

(ABSURDO) pois $dim(V) \geq 1$.

b) $dim(ker(T)) = dim(Im(T))$

$$dim(V) = 2 \cdot dim(Im(T))$$

$dim(V)$ é par.