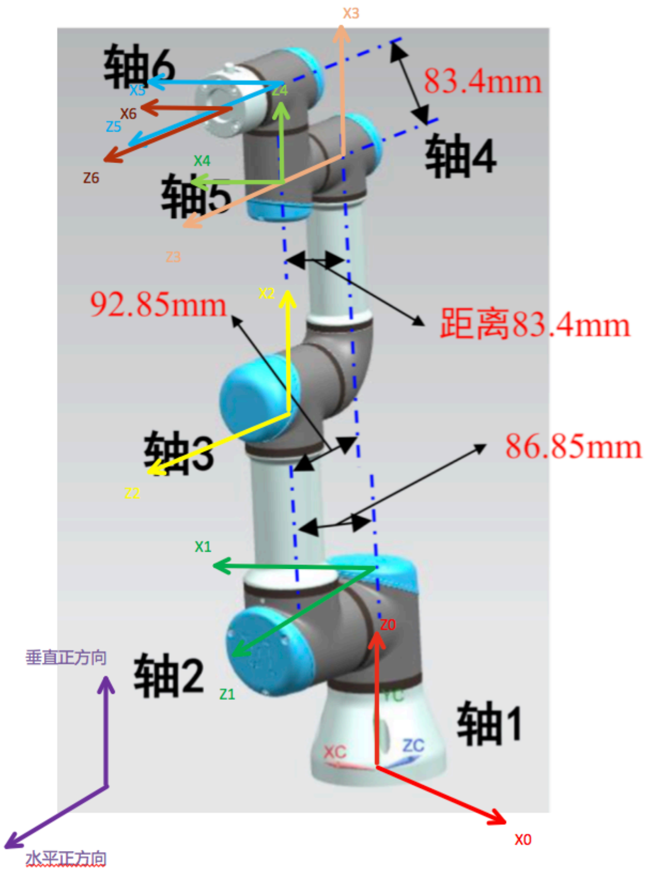
一、D-H参数表、推导$^0T_6$表达式

D-H参数表

针对优傲UR3机械臂建立各个关节坐标系，如下图所示：

在机械臂上坐标系如下图所示：



给出对应的DH参数表：

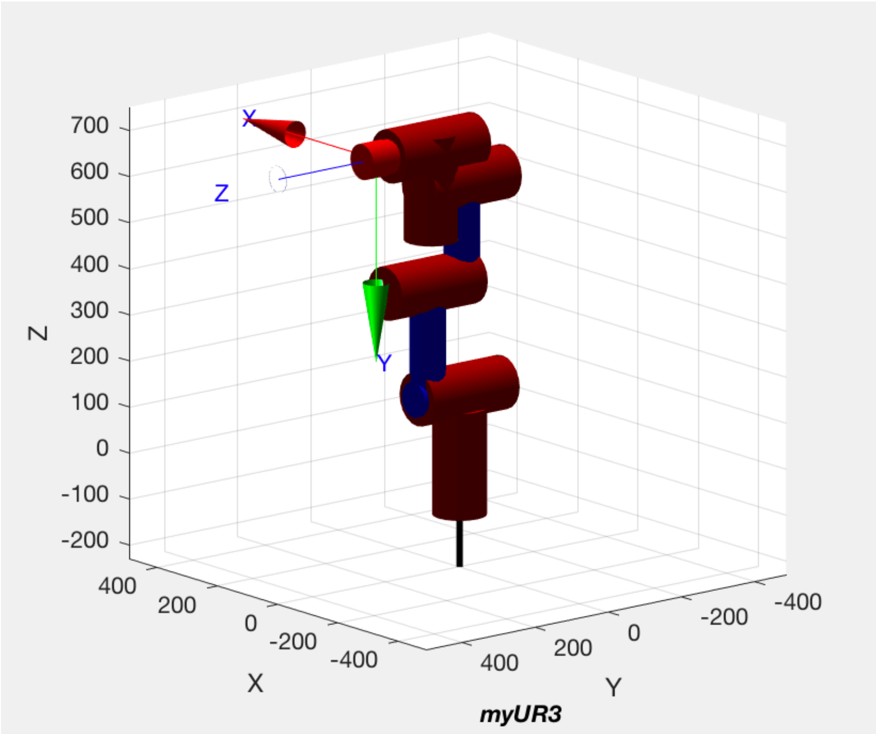
	θ	d	a	α
1	θ_1	151.9	0	-90°
2	θ_2	86.85	243.65	0°
3	θ_3	-92.85	213	0°
4	θ_4	83.4	0	90°
5	θ_5	83.4	0	-90°
6	θ_6	83.4	0	0°

备注：

- $d_6=150$在已知条件中未给出，为了保证展示效果取这个值。

- 上图左下角定义了水平、垂直正方向，因此DH法的d_i中可能带有负号。

给机械臂赋初始θ值$\theta = [0\ -\frac{\pi}{2}\ 0\ \frac{\pi}{2}\ 0\ 0]$，绘制出下图，可以看出，下图与上面原图中机械臂的构型完全一致，说明DH表构建正确（不考虑θ_i的初始值）。



绘制代码如下：

```
clear
clc
%大作业第一问
%根据说明文档中的参数建立DH表，最后一个d未知，赋值150以确保展示效果
L(1)=Revolute('d',151.9,'a',0,'alpha',-pi/2)
L(2)=Revolute('d',86.85,'a',243.65,'alpha',0)
L(3)=Revolute('d',-92.85,'a',213,'alpha',0)
L(4)=Revolute('d',83.4,'a',0,'alpha',pi/2)
L(5)=Revolute('d',83.4,'a',0,'alpha',-pi/2)
L(6)=Revolute('d',150,'a',0,'alpha',0)
myUR3=SerialLink(L,'name','myUR3')
% 展示机械臂
myUR3.plot([0 -pi/2 0 pi/2 0 0])
```

推导${}^0T_6$表达式

根据公式$A_i = Rot(z,\theta_i) * Trans(0,0,d_1) * Trans(a_1,0,0) * Rot(x,\alpha_i)$可以得到：

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5=\begin{bmatrix} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6=\begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$^0T_6=A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

结合

$$\begin{aligned} C_{23}&=C_2C_3-S_2S_3 \\ S_{23}&=C_2S_3+S_2C_3 \\ C_{234}&=C_4C_{23}-S_4S_{23} \\ S_{234}&=S_4C_{23}+C_4S_{23} \end{aligned}$$

可以通过符号运算库计算，并对符号运算库的计算结果通过以上四个式子手算积化和差处理得到以下结果：

（由于显示空间有限，用变量t_{ij}记录计算结果）

$$\begin{aligned}
t_{11}&=C_1C_{234}C_5C_6-C_1S_{234}S_6-S_1S_5C_6 \\
t_{12}&=-C_1C_{234}C_5S_6-C_1S_{234}C_6+S_1S_5S_6 \\
t_{13}&=-S_1C_5-C_1C_{234}S_5 \\
t_{14}&=a_3C_1C_{23}+a_2C_1C_2-S_1(d_2+d_3+d_4)+d_5C_1S_{234}-d_6(C_5S_1+S_5C_1C_{234}) \\
t_{21}&=C_1S_5C_6+S_1C_{234}C_5C_6-S_1S_{234}S_6 \\
t_{22}&=-S_1S_{234}C_6-C_1S_5S_6-S_1C_{234}C_5S_6 \\
t_{23}&=C_1C_5-S_1S_5C_{234} \\
t_{24}&=C_1(d_2+d_3+d_4)+a_2S_1C_2+a_3S_1C_{23}+d_5S_1S_{234}+d_6(C_1C_5-S_1S_5C_{234}) \\
t_{31}&=-C_{234}S_6-C_5C_6S_{234} \\
t_{32}&=S_{234}C_5S_6-C_{234}C_6 \\
t_{33}&=S_{234}S_5 \\
t_{34}&=-a_2S_2-a_3S_{23}+d_1+C_{234}d_5+S_{234}S_5d_6
\end{aligned}$$

$$^0T_6=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为展示详细的计算过程，对$^0T_6$左上角第一个元素的积化和差计算给出示例：

$$\begin{aligned}
&C_6(C_5(C_4(C_1C_2C_3-C_1S_2S_3)+S_4(-C_1C_2S_3-C_1C_3S_2))-S_1S_5)+ \\
&S_6(C_4(-C_1C_2C_3-C_1C_3S_2)-S_4(C_1C_2C_3-C_1S_2S_3)) \\
&=C_6(C_5C_1C_{234}-S_1S_5-S_6C_1S_{234} \\
&=C_1C_{234}C_5C_6-C_1S_{234}S_6-S_1S_5C_6
\end{aligned}$$

至此第一问求解完毕。

二、θ_1--θ_6显式表达式

在本问中，由于θ_i未知，因此C_i和S_i为未知量，而总的变换矩阵为已知：

$$RHS = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另外a_i,d_i均为已知。

由于$RHS = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，可以把上式变形为$A_1^{-1}RHS = A_2A_3A_4A_5A_6$，把矩阵的每一项进行对比，构成等式。

首先对A_1^{-1}求逆得到：

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$A_1^{-1}RHS = \begin{bmatrix} C_1n_x + S_1n_y & C_1o_x + S_1o_y & C_1a_x + S_1a_y & C_1p_x + S_1p_y \\ -n_z & -o_z & -a_z & d_1 - p_z \\ C_1n_y - S_1n_x & C_1o_y - S_1o_x & C_1a_y - S_1a_x & C_1p_y - S_1p_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应地，可以根据求出矩阵$H = A_2A_3A_4A_5A_6$对应的一些系数：

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下面依次给出θ_i的求解公式。（矩阵乘法的求解过程与$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$的求解类似，为了简单起见，只给出用到的h_{ij}的值。）

1. θ_1的求解

根据两个矩阵的$(3,3)$和$(3,4)$位置相等，结合矩阵乘法和和差化积运算得到：
$h_{33} = C_5$，$h_{34} = C_5d_6 + d_2 + d_3 + d_4$

以上两式联立消去C_5，得到：$d_6(c_1a_y - s_1a_x) + d_2 + d_3 + d_4 = c_1p_y - s_1p_x$

变形得到：$S_1(d_6a_x - p_x) - C_1(d_6a_y - p_y) = d_2 + d_3 + d_4$

记$M_1 = d_6a_x - p_x$，$N_1 = d_6a_y - p_y$，$D_{234} = d_2 + d_3 + d_4$，则上式变为：
$M_1S_1 - N_1C_1 = D_{234}$，注意到这个式子中除了$S_1$和$C_1$都是已知的，根据辅助角公式，原式变为：
$\sqrt{M_1^2 + N_1^2} * sin(\theta_1 - arctan\frac{N_1}{M_1}) = D_{234}$

由此解得

$$\theta_1 = arcsin\frac{D_{234}}{\sqrt{M_1^2+N_1^2}} + arctan\frac{N_1}{M_1}$$

$$\text{或 } \theta_1 = \pi - arcsin\frac{D_{234}}{\sqrt{M_1^2+N_1^2}} + arctan\frac{N_1}{M_1}$$

2.θ_5的求解

求解得到θ_1以后，C_1和S_1均变为已知，从而根据$h_{33}=C_5=C_1a_y-S_1a_x$可以求得：

$$\theta_5 = arccos(C_1a_y - S_1a_x)$$

$$\text{或} \theta_5 = -arccos(C_1a_y - S_1a_x)$$

3. θ_6的求解

根据两个矩阵的$(3,1)$和$(3,2)$位置相等，计算得到$h_{31}=S_5C_6=C_1n_y-S_1n_x$以及$h_{32}=-S_5S_6=C_1o_y-S_1o_x$，以上两式联立（相除）得到：

$\frac{S_6}{C_6}=-\frac{C_1n_y-S_1n_x}{C_1o_y-S_1o_x}$，从而可以解出：

$$\theta_6 = -arctan(\frac{C_1n_y-S_1n_x}{C_1o_y-S_1o_x})$$

$$\text{或 } \theta_6 = \pi - arctan(\frac{C_1n_y-S_1n_x}{C_1o_y-S_1o_x})$$

4. θ_3的求解

首先根据两个矩阵的$(1,3)$位置相等，计算得到：$h_{13}=C_1a_x+S_1a_y=-S_5C_{234}$

从而得到：

$$\theta_{234} = -arccos(\frac{C_1a_x+S_1a_y}{S_5})$$

$$\text{或 } \theta_{234} = arccos(\frac{C_1a_x+S_1a_y}{S_5})$$

因为θ_1,θ_5有两个解，所以θ_{234}有四个解。下面的过程中，θ_{234}视作已知。

根据两个矩阵的$(1,4)$和$(2,4)$位置相等，计算得到：

$$h_{14} = a_3C_{23} + a_2C_2 - S_5d_6C_{234} + d_5S_{234} = c_1p_x + s_1p_y$$

$$h_{24} = a_3S_{23} + a_2S_2 - S_5d_6S_{234} - d_5C_{234} = d_1 - p_z$$

将已知量挪到等式右侧，得到：

$$a_3C_{23} + a_2C_2 = K_1$$

$$a_3S_{23} + a_2S_2 = K_2$$

以上两式平方相加，得到：

$$a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3cos(\theta_2+\theta_3-\theta_2) = K_1^2 + K_2^2$$

$$\text{即 } cos\theta_3 = \frac{K_1^2+K_2^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3}$$

解得：

$$\theta_3 = arccos\frac{K_1^2+K_2^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3} \text{或} \ \theta_3 = -arccos\frac{K_1^2+K_2^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3}$$

5.θ_2的求解

根据$a_3C_{23}+a_2C_2=K_1$可以得到：

$$a_3C_2C_3-a_3S_2S_3+a_2C_2=K_1$$

进而有：

$$(C_3a_3+a_2)C_2-S_3a_3S_2=K_1$$

记$M_2=C_3a_3+a_2, N_2=S_3a_3$，再由辅助角公式可以得到：

$$\sqrt{M_2^2+N_2^2}*sin(\theta_2-arctan\frac{N_2}{M_2})=K_1$$

由此解得：

$$\theta_2 = arcsin\frac{K_1}{\sqrt{M_1^2+N_1^2}}+arctan\frac{N_2}{M_2}$$
$$\text{或} \ \theta_2 = \pi-arcsin\frac{K_1}{\sqrt{M_1^2+N_1^2}}+arctan\frac{N_2}{M_2}$$

6.θ_4的求解

直接由$\theta_{234}=\theta_2+\theta_3+\theta_4$可以求得$\theta_4$：

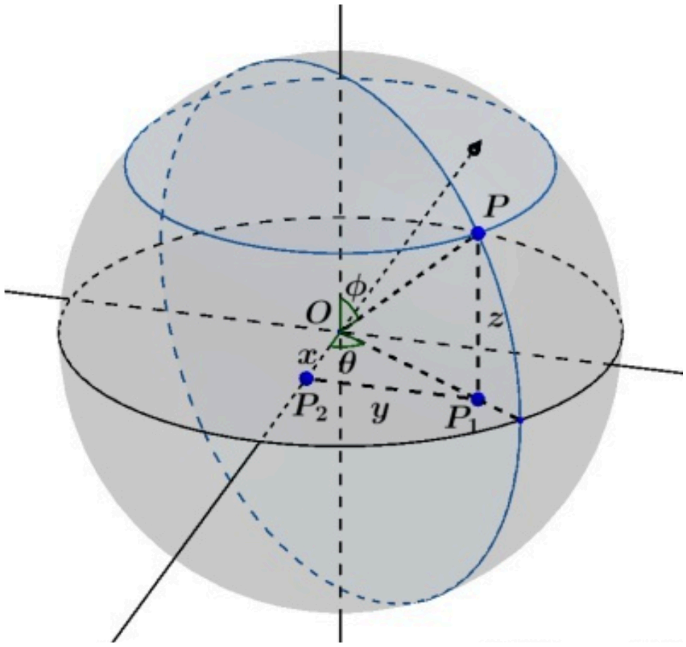
$$\theta_4=\theta_{234}-\theta_2-\theta_3$$

至此，所有θ_i求解完毕。

三、“山大”二字轨迹规划的相关说明

要在球面上雕刻线段，首先需要将球面上的点用极坐标表示。

如下图，θ为方位角，ϕ为仰角，球半径为R，球心坐标为(x_0,y_0,z_0)：



根据图中的几何关系，球面上的任意一点可以被表示为：

$$
\begin{cases}
x = R\sin\varphi\cos\theta + x_0 \\
y = R\sin\varphi\sin\theta + y_0 \\
z = R\cos\varphi + z_0
\end{cases}
$$

对于轨迹规划问题，由于数组$Ball = [R, x_0, y_0, z_0]$均为定值，因此球面上的曲线可以通过$\theta$和$\phi$的变化来生成。

对于横线，只需要θ变化，ϕ保持定值即可。

对于竖线，θ保持定值，只需要ϕ变化即可。

而对于撇和捺两画，需要通过曲线拟合来生成，拟合中选用最简单的二次函数。以撇为例，给出撇中3个点以上的极坐标（用θ和ϕ表示曲面上的点），利用polyfit函数拟合得到二次函数的三个系数，即可得到目标曲线形状$\theta = f(\phi)$。

MATLAB拟合过程如下所示：

```
phi = [90,82,76];
theta = [175,186,188];
ans = polyfit(phi,theta,2) %2为次数
x0 = [76:1:90];
y0=polyval(ans,0);
plot(x0,y0)
```