



坐标系A中的惯性张量可以用3 * 3矩阵表示如下：

$${}^A\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

矩阵中各元素的计算方法为：

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv$$

$$I_{xy} = \iiint_V (xy) \rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V (xz) \rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V (yz) \rho dv$$

已知 $L_1 = 1m$, $L_2 = 0.5m$, $\rho = 7806kg/m^3$, 宽度 = $0.05m$, 厚度 = $0.05m$, 以两部分机械臂的质心为中心点可以计算惯性张量。

对于第一个机械臂，对 x, y, z 方向分析，可以计算上述重积分：

$$I_{xx} = \rho * \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (y^2 + z^2) dz dy dx = 0.08$$

$$I_{yy} = \rho * \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (x^2 + z^2) dz dy dx = 1.630$$

$$I_{zz} = \rho * \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (x^2 + y^2) dz dy dx = 1.630$$

由于积分的上下界关于0对称，因此易知 $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ 。

同理，对于第二个机械臂，有：

$$I_{xx} = \rho * \int_{-0.25}^{0.25} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (y^2 + z^2) dz dy dx = 0.040$$

$$I_{yy} = \rho * \int_{-0.25}^{0.25} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (x^2 + z^2) dz dy dx = 0.815$$

$$I_{zz} = \rho * \int_{-0.25}^{0.25} \int_{-0.025}^{0.025} \int_{-0.025}^{0.025} (x^2 + z^2) dz dy dx = 0.815$$