

## 一、原理及输入格式

*Q4* (*Quadrilateral 4-node*) 单元是一种二维四节点的等参数四边形单元，常用于求解平面应力和平面应变问题。每个节点有两个自由度，分别为  $u$  和  $v$  (即在  $x$  和  $y$  方向的位移)，整个单元共有  $4 \times 2 = 8$  个自由度。

*Q4* 单元刚度矩阵的构造依赖如下公式：

$$\mathbf{K}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA$$

*Q4* 单元采用  $2 \times 2$  的高斯积分点以确保二次多项式函数下的积分精度。每个积分点处，程序计算：形函数及其自然坐标导数；雅可比矩阵及其逆；构建  $\mathbf{B}$  矩阵；

*Q4* 类内函数包括：

*Read()*：读取单元的节点编号和材料编号；

*Write()*：输出单元信息；

*ElementStiffness()*：计算单元刚度矩阵；

*ElementStress()*：计算单元应力；

*GenerateLocationMatrix()*：生成定位矩阵用于组装全局矩阵。

材料属性通过 *CQ4Material* 类实现（派生自 *CMaterial*），包含：杨氏模量  $E$ 、泊松比  $\nu$ 、厚度  $t$

代码利用单元 - 节点关联矩阵将所有单元刚度矩阵汇总为全局刚度矩阵  $\mathbf{K}$ ，力向量汇总为  $\mathbf{f}$ 。施加边界条件后，通过带状存储和  $LU$  分解求解线性系统：求得节点位移后，再计算超收敛点的应力。

具体分为：

输入模块：解析输入文件，将节点坐标、单元拓扑、材料参数、工况等信息读入内存。

单元计算模块：根据不同单元类型（杆、*Q4* 等）分别实现形函数、 $\mathbf{B}$  矩阵、材料矩阵  $\mathbf{D}$  的计算，并返回单元刚度矩阵及等效结点力向量。

汇总装配模块：根据单元 - 节点关联关系，组装全局刚度矩阵和力向量。

求解模块：采用带状存储格式进行矩阵存储，调用  $LU$  分解求解约束后方程组。

数据输入格式：

(1) 标题行

列	变量	意义
1-80	HED(80)	标题，用于对所求解问题进行简单的描述

(2) 控制行

列	变量	意义
1-5	NUMNP	结点总数；如果为 0 则程序终止运行
6-10	NUMEG	单元组总数。每个单元组只能包含相同类型的单元
11-15	NLCASE	载荷工况数
16-20	MODEX	求解模式，等于 0 时只做数据检查，等于 1 时进行求解

(3) 结点数据

列	变量	意义
1-5	N	结点号 ( $1 \leq N \leq \text{NUMNP}$ )
6-10	ID(1,N)	x-平动方向边界条件代码 (0-自由；1-固定)
11-15	ID(2,N)	y-平动方向边界条件代码 (0-自由；1-固定)
16-20	ID(3,N)	z-平动方向边界条件代码 (0-自由；1-固定)
21-30	X(N)	x-坐标
31-40	Y(N)	y-坐标
41-50	Z(N)	z-坐标

编写 Q4 单元计算二维问题，为了方便编写 dat 文件，在控制行增加了维数控制。

(4) 载荷数据共输入 NLCASE 组载荷数据

(a) 载荷数据控制行

列	变量	意义
1-5	LL	载荷工况号。必须按顺序输入所有载荷工况数据
6-10	NLOAD	本工况中集中载荷的个数

(b) 各工况载荷数据

列	变量	意义
1-5	NOD	集中载荷作用的结点号 ( $1 \leq \text{NOD} \leq \text{NUMNP}$ )
6-10	IDIRN	载荷作用方向 (1 - x 方向，2 - y 方向，3 - z 方向)
11-20	FLOAD	载荷值

(5) 轴力杆单元数据

(a) 单元组控制数据

列	变量	意义
1-5	NP(1)	单元类型 (1 – 轴力杆单元)
6-10	NP(2)	本单元组中的单元总数 ( $\geq 1$ )
11-15	NP(3)	不同材料/截面性质组数

(b) 材料/截面性质数据，共读入 NP(3) 行

列	变量	意义
1-5	N	材料/截面性质组号 ( $1 \leq N \leq NP(3)$ )
6-15	E(N)	杨氏模量
16-25	AREA(N)	截面面积

(c) 单元数据

列	变量	意义
1-5	M	单元号 ( $1 \leq M \leq NP(2)$ )
6-10	II	单元左端结点号 ( $1 \leq II \leq NUMNP$ )
11-15	JJ	单元右端结点号 ( $1 \leq JJ \leq NUMNP$ )
16-20	MTYP	本单元的材料/截面性质组号

二、分片实验

分片实验选取了教材例题 4.5，并且采用实验 C 的参数。输出如下所示。

TITLE : Cables to test STAP++  
(22:34:12 on June 12, 2025, Thursday)

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF NODAL POINTS ..... (NUMNP) = 8  
NUMBER OF ELEMENT GROUPS ..... (NUMEG) = 1  
NUMBER OF LOAD CASES ..... (NLCASE) = 1  
SOLUTION MODE ..... (MODEX) = 1  
EQ.0, DATA CHECK  
EQ.1, EXECUTION

NODAL POINT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION	CODES	NODAL POINT COORDINATES
1	1	1	0.00000e+00 0.00000e+00
2	0	1	2.50000e+00 0.00000e+00
3	0	0	2.50000e+00 3.00000e+00
4	0	0	0.00000e+00 2.00000e+00
5	0	0	5.00000e-01 5.00000e-01
6	0	0	2.00000e+00 7.50000e-01
7	0	0	1.75000e+00 1.75000e+00
8	0	0	6.50000e-01 1.60000e+00

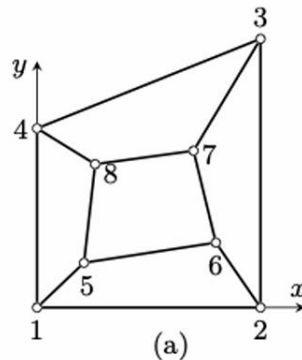
EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z
1	0	0	0
2	1	0	0
3	2	3	0
4	4	5	0
5	6	7	0
6	8	9	0
7	10	11	0
8	12	13	0

LOAD CASE DATA

LOAD CASE NUMBER ..... = 1  
NUMBER OF CONCENTRATED LOADS . = 3

NODE NUMBER	DIRECTION	LOAD MAGNITUDE
2	1	1.50000e+01
3	1	1.00000e+01
4	1	-1.50000e+01



# ELEMENT GROUP DATA

## ELEMENT DEFINITION

ELEMENT TYPE .....( NPAR(1) ).. = 2  
EQ.1, TRUSS ELEMENTS  
EQ.2, Q4 ELEMENTS  
EQ.3, NOT AVAILABLE

NUMBER OF ELEMENTS.....( NPAR(2) ).. = 5

## MATERIAL DEFINITION

NUMBER OF DIFFERENT SETS OF MATERIAL  
AND THICKNESS ....( NPAR(3) ).. = 1

SET NUMBER	YOUNG'S MODULUS E	POISSON'S RATIO NU	THICKNESS T
1	1.00000e+02	3.00000e-01	1.00000e+00

## ELEMENT INFORMATION

ELEMENT NUMBER-N	NODE I	NODE J	MATERIAL SET NUMBER
1	1	2	6
2	6	2	3
3	8	7	3
4	1	5	8
5	5	6	7

## TOTAL SYSTEM DATA

NUMBER OF EQUATIONS .....(NEQ) = 13  
NUMBER OF MATRIX ELEMENTS .....(NWK) = 87  
MAXIMUM HALF BANDWIDTH .....(MK) = 12  
MEAN HALF BANDWIDTH .....(MM) = 6

LOAD CASE 1

## DISPLACEMENTS

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
2	2.50000e-01	0.00000e+00	0.00000e+00

## DISPLACEMENTS

NODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT
1	0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00
2	2.50000e-01	0.00000e+00	0.00000e+00
3	2.50000e-01	-9.00000e-02	0.00000e+00
4	-4.47559e-16	-6.00000e-02	0.00000e+00
5	5.00000e-02	-1.50000e-02	0.00000e+00
6	2.00000e-01	-2.25000e-02	0.00000e+00
7	1.75000e-01	-5.25000e-02	0.00000e+00
8	6.50000e-02	-4.80000e-02	0.00000e+00

## STRESS CALCULATIONS FOR ELEMENT GROUP 1

ELEMENT NUMBER	sigma xx	sigma yy	sigma xy
1	1.00000e+01	2.22045e-15	-3.50281e-15
2	1.00000e+01	4.88498e-15	-1.33440e-15
3	1.00000e+01	-2.22045e-15	1.06752e-15
4	1.00000e+01	-1.77636e-15	-4.00321e-15
5	1.00000e+01	-4.44089e-16	-2.66881e-15

## SOLUTION TIME LOG IN SEC

TIME FOR INPUT PHASE = 2.00000e-02  
TIME FOR CALCULATION OF STIFFNESS MATRIX = 1.00000e-03  
TIME FOR FACTORIZATION AND LOAD CASE SOLUTIONS = 9.00000e-03  
TOTAL SOLUTION TIME = 3.00000e-02

分片试验选取 4 ~ 8 个具有任意形状的单元组成单元片，在其所有或部分节点上按线性多项式施加位移或力，并进行有限元求解。所得到的结果须和由此多项式给出的精确值在机器精度内一致(双精度 误差须为 10-15 ~ 10-16 )分片试验中的单元必须具有非规则形状。

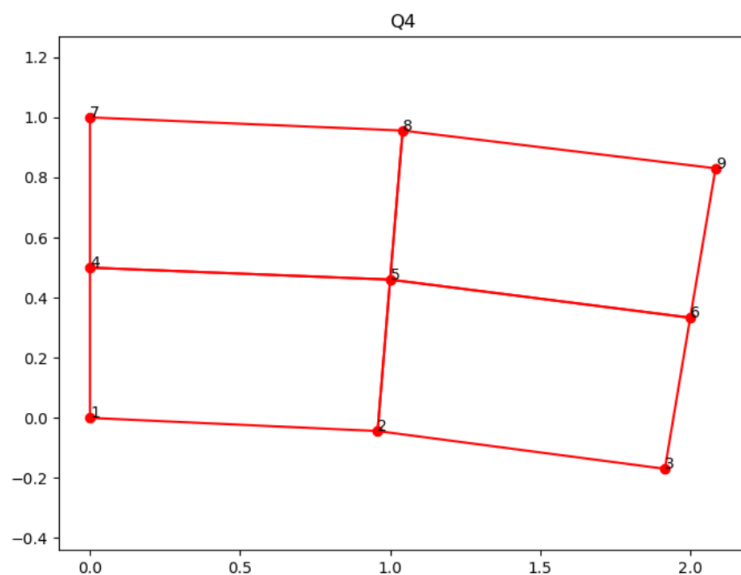
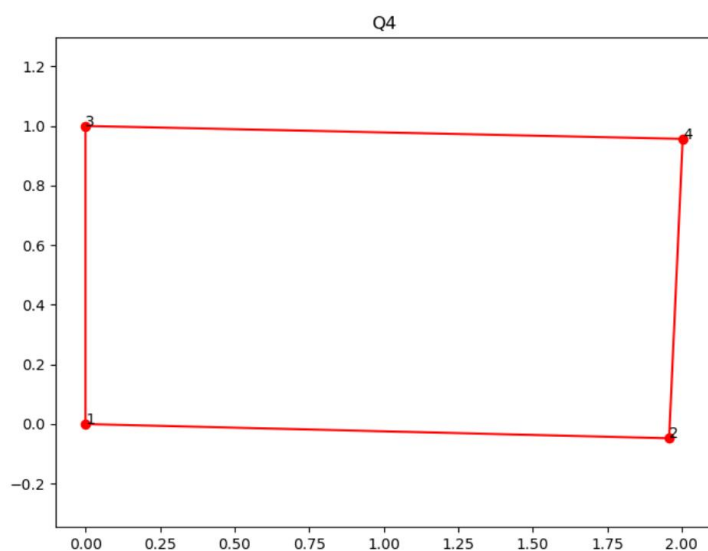
输出结果与教材参考值吻合良好，通过了分片实验。

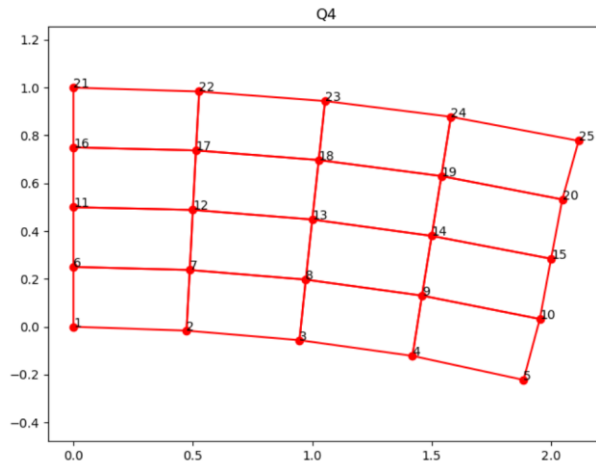
### 三、收敛性分析

采用悬臂梁，逐渐加密网格。然后进行收敛率分析。有解析解

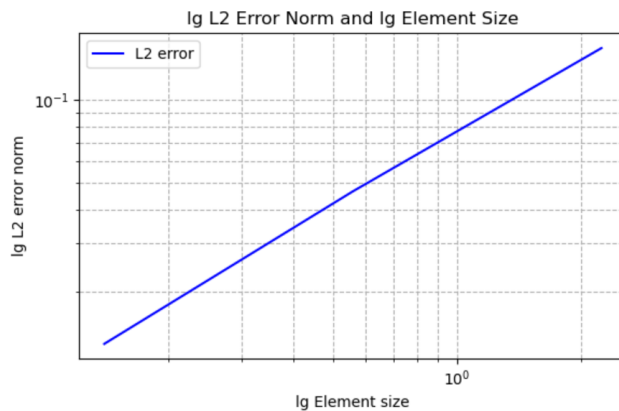
$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0.12x(y - 0.5) \\ v(x, y) &= -0.06x^2 \end{aligned},$$

因此同时以此为验证算例。对于  $2 \times 1$  的悬臂梁，均匀绘制网格，应变如图：（使用 python 根据输出绘制）。





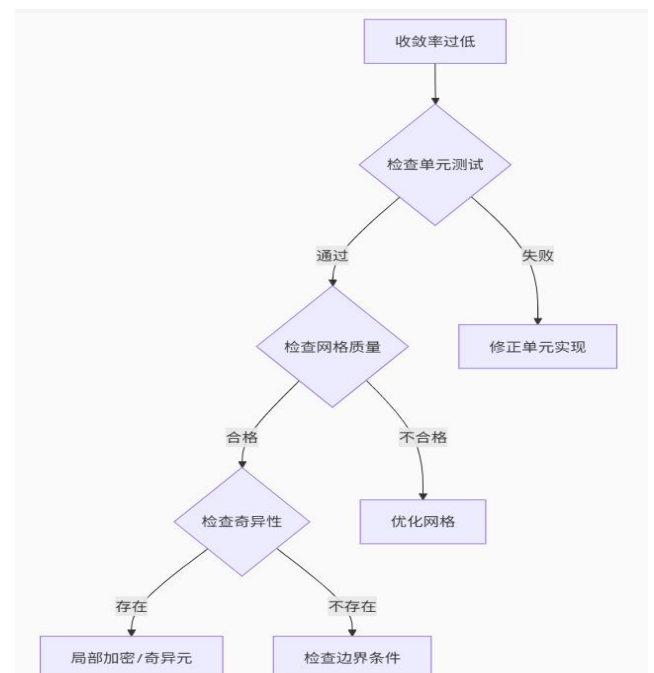
计算 L2 和网格对角线长度后绘制双对数曲线，得到收敛率为 0.8936117707579283



收敛性较差，可能原因是网格质量问题，

使用长方形网格结果较差。

可能的网格优化流程：



本次编写程序成功实现了一个用于二维线弹性问题分析的有限元求解器，支持 Q4 单元。通过分片实验验证了程序在简单问题上的正确性，通过悬臂梁收敛性测试确认了其精度和稳定性。程序采用模块化设计，输入输出格式清晰。

<https://github.com/Wang-Yibo22/->