专业：信息工程
姓名：王英杰
学号：3190103370
日期：2021/10/3
地点：

浙江大学实验报告

课程名称：数字信号处理　指导老师：潘翔　成绩：

实验名称：有限长序列、频谱、DFT 的性质　实验类型：演示　同组学生姓名：——

一、实验目的和要求

设计通过演示实验，建立对典型信号及其频谱的直观认识，理解 DFT 的物理意义、主要性质。

二、实验内容和步骤

2-1 用 MATLAB，计算得到五种共 9 个序列：

2-1-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ 例如，a=0.5, length=10
a=0.9, length=10
a=0.9, length=20

2-1-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases} (a+jb)^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ 例如，a=0.5, b=0.8, length=10

2-1-3 从正弦信号 $x(t)$=sin(2πft+delta)抽样得到的正弦序列 $x(n)$=sin(2πfnT+delta)。如，信号频率 f=1Hz，初始相位 delta=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-4 从余弦信号 $x(t)$=cos(2πft + delta)抽样得到的余弦序列 $x(n)$=cos(2πfnT + delta)。如，信号频率 f=1Hz，初相位 delta=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-5 含两个频率分量的复合函数序列 $x(n)$=sin(2πf_1nT)+delta×sin(2πf_2nT+phi)。如，

频率 f_1 (Hz)	频率 f_2 (Hz)	相对振幅 delta	初相位 phi (度)	抽样间隔 T (秒)	序列长 length
1	3	0.5	0	0.1	10
1	3	0.5	90	0.1	10
1	3	0.5	180	0.1	10

2-2　用 MATLAB，对上述各个序列，重复下列过程。

2-2-1 画出一个序列的实部、虚部、模、相角；观察并记录实部、虚部、模、相角的特征。

2-2-2 计算该序列的幅度谱、频谱实部、频谱虚部；观察和并记录它们的特征，给予解释。

2-2-3 观察同种序列取不同参数时的频谱，发现它们的差异，给予解释。

三、主要仪器设备

MATLAB 编程。

四、操作方法和实验步骤

（参见“二、实验内容和步骤”）

五、实验数据记录和处理

MATLAB 程序清单分为序列生成和序列处理两个部分，序列处理的代码都相同，故不重复列出。

5-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

5-1-1 a = 0.5; length = 10;

```
%% 生成序列
a = 0.5;length = 10;
n = [0:length-1];
x_n = a.^n;                 %序列 x(n)
```

5-1-2 a = 0.9; length = 10;

```
%% 生成序列
a = 0.9;length = 10;
n = [0:length-1];
x_n = a.^n;                 %序列x(n)
```

5-1-3 a = 0.9; length = 20;

```
%% 生成序列
a = 0.9;length = 20;
n = [0:length-1];
x_n = a.^n;
```

5-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases} (a+jb)^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

```
%% 生成序列
a = 0.5; b = 0.8; length = 10;
n = [0:1:length-1];
x_n = (a+b*j).^n;
```

5-3 正弦序列$x(n)$=sin(2πfnT+delta)

```
%% 生成序列
T = 0.1; length = 10; delta = 0; f = 1;
n = [0:length-1];
x_n = sin(2*pi*f*n*T+delta);
```

5-4 余弦序列$x(n)$=cos(2πfnT + delta)

```
%% 生成序列
T = 0.1; length = 10; delta = 0; f = 1;
n = [0:length-1];
x_n = cos(2*pi*f*n*T+delta);
x_w = fft(x_n, length); %序列进行FFT变换
```

5-5 复合函数序列$x(n)$=sin($2\pi f_1 nT$)+delta × sin($2\pi f_2 nT$+phi)

5-5-1 phi = 0；

```
%% 生成序列
f1 = 1; f2 = 3; delta = 0.5; phi = 0; T = 0.1; length = 10;
n = [0:length-1];
x_n = sin(2*pi*f1*n*T) + delta*sin(2*pi*f2*n*T+phi);=
```

5-5-2 phi = 90;

```
%% 生成序列
f1 = 1; f2 = 3; delta = 0.5; phi = pi/2; T = 0.1; length = 10;
n = [0:length-1];
x_n = sin(2*pi*f1*n*T) + delta*sin(2*pi*f2*n*T+phi);
```

5-5-3 phi = 180;

```
%% 生成序列
f1 = 1;f2 = 3; delta = 0.5; phi = pi; T = 0.1; length = 10;
n = [0:length-1];
x_n = sin(2*pi*f1*n*T) + delta*sin(2*pi*f2*n*T+phi);
```

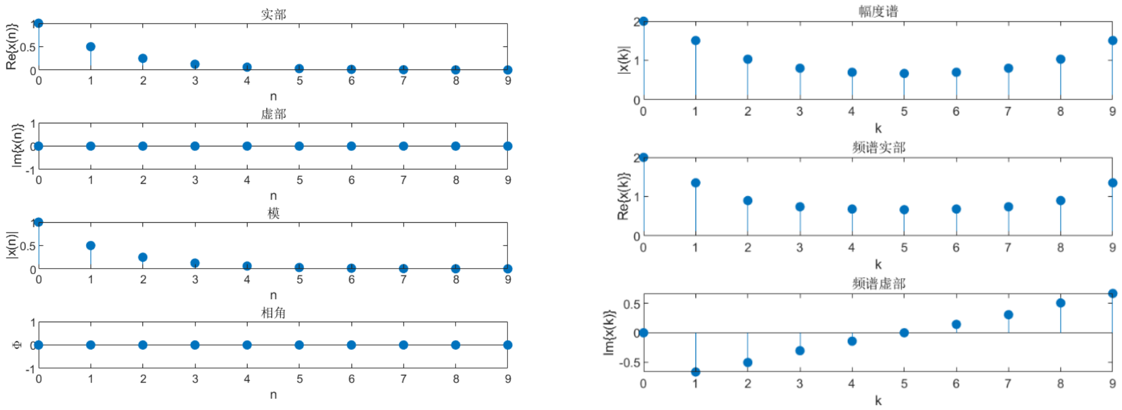
序列处理代码段

```
x_w = fft(x_n, length); %对序列进行FFT变换
%% 序列的实部、虚部、模、相角
figure(1);
subplot(4,1,1);stem([0:length-1],real(x_n),'filled');
title("实部");xlabel("n");ylabel("Re\{x(n)\}");

subplot(4,1,2);stem([0:length-1],imag(x_n),'filled');
title("虚部");xlabel("n");ylabel("Im\{x(n)\}");

subplot(4,1,3);stem([0:length-1],abs(x_n),'filled');
title("模");xlabel("n");ylabel("|x(n)|");

subplot(4,1,4);stem([0:length-1],angle(x_n),'filled');
title("相角");xlabel("n");ylabel("\Phi");
%% 序列经DFT变换后的幅度谱、频谱实部、虚部
figure(2);
subplot(3,1,1);stem([0:length-1],abs(x_w),'filled');
title("幅度谱");xlabel('k');ylabel('|x(k)|');

subplot(3,1,2);stem([0:length-1],real(x_w),'filled');
title("频谱实部");xlabel('k');ylabel('Re\{x(k)\}');

subplot(3,1,3);stem([0:length-1],imag(x_w),'filled');
title("频谱虚部");xlabel('k');ylabel('Im\{x(k)\}');
```

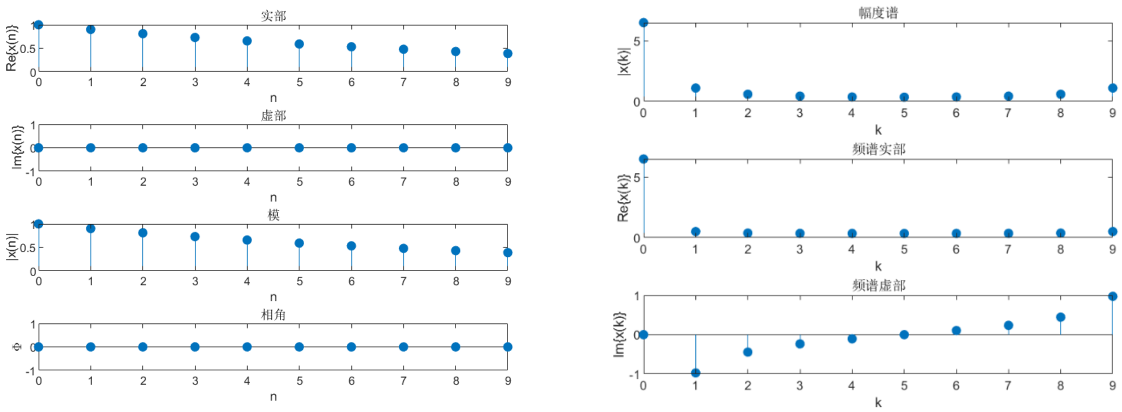
六、实验结果与分析

6-1-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

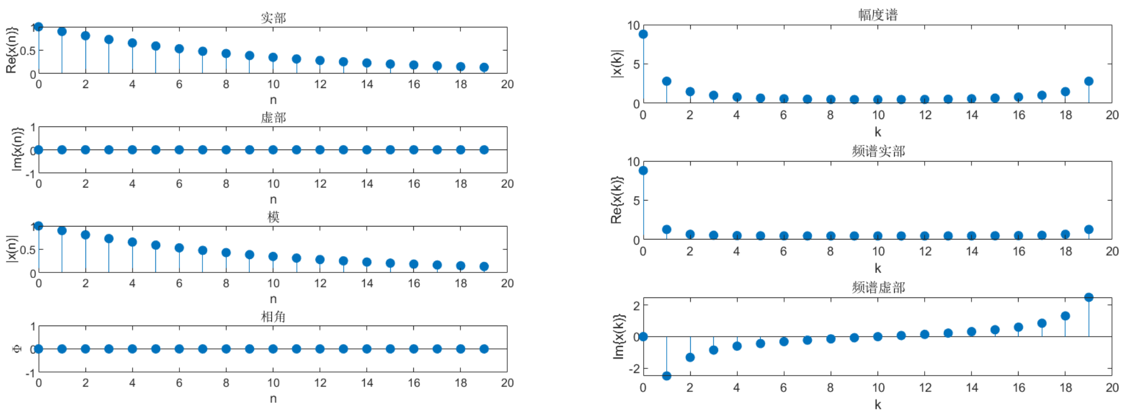
（1） a = 0.5; length = 10;



（2）a = 0.9; length = 10;



（3）a = 0.9; length = 20;



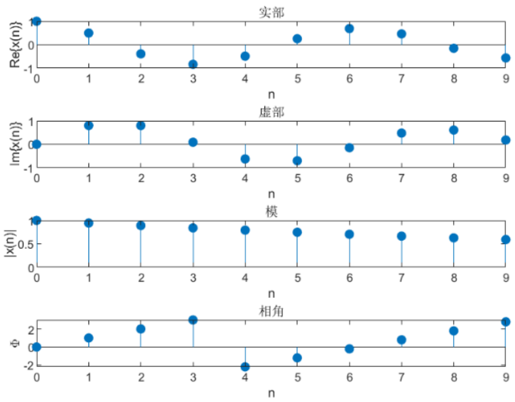
实指数序列在时域中模和其实部大小相同，虚部和相位角均为 0；在频域中可以看到幅度谱和频谱的实部都是圆周偶对称的，频谱的虚部是圆周奇对称；体现了 DFT 的共轭对称性。

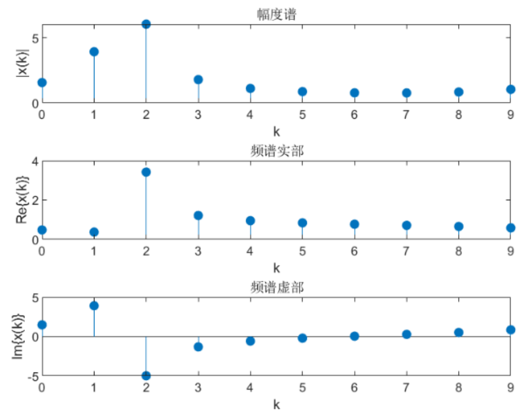
当实指数序列的底数越接近 1，在时域上显现为指数序列的变化更为平缓；在频域上表现为频谱更集中于 k = 0 的这个点；这是因为底数越接近于 1，序列越接近于直流信号，所以在频域中直流分量，即 X(0)，更为突出。

当序列的点数 n 增加，数据的有效长度增加，在时域上表现为采样序列更好的表示实指数序列的真实情况；在频域上，频谱的分辨率更高，频谱的信息更为丰富。

6-1-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases}(a+jb)^n & 0\le n\le length-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$

a = 0.5; b = 0.8; length = 10;





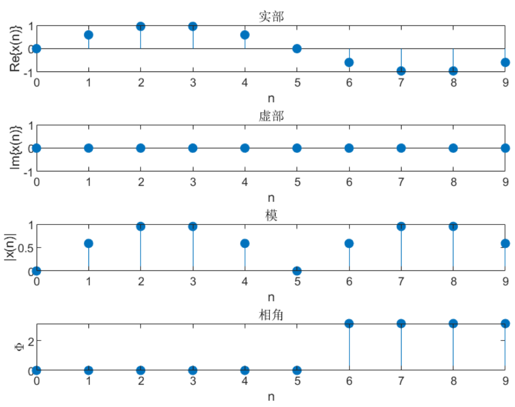
复指数序列在时域上实部和虚部的变化难以找到规律，模长为$(a^2+b^2)^{n/2}$，显示为实指数序列变化；相角为$n\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$,，范围为$(-\pi,\pi]$；在频域上，

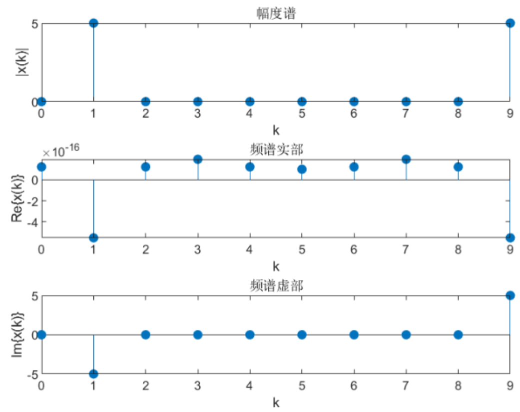
$$(a+bj)^n=(0.5+0.8j)^n=e^{j\,n\,arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\approx e^{j1.0122n}$$

与$W_N^{-nk}|_{k=2}=e^{j\frac{2\pi n*2}{N}}\approx e^{j1.257n}$较为接近，所以幅度谱中，$|X(2)|$最大。

6-1-3 正弦信号序列 $x(t)$=sin(2πft+delta)

f = 1Hz; delta = 0; T = 0.1; length = 10;



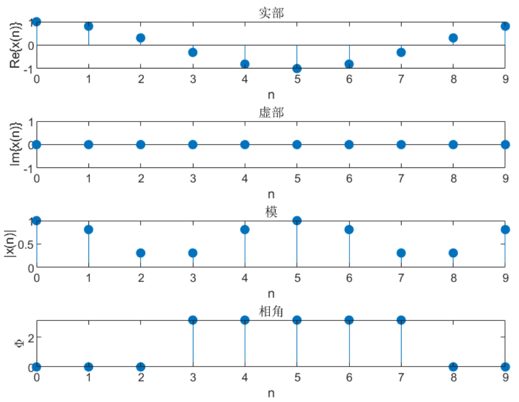


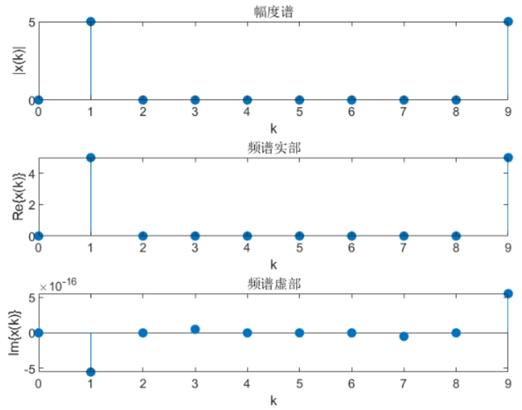
正弦信号在时域上正弦信号为实信号，因此虚部为 0，相角只因为实部的正负而分别为 0 或π。

在频域上，可以看到幅度谱和频谱实部均有圆周偶对称性，虚部为圆周奇对称性；正弦信号可写成指数形式$x(n)=\frac{1}{2j}*\left(e^{2\pi fnTj}-e^{-2\pi fnTj}\right)$，其频谱的实部理论上为 0，但所得结果为一个接近于 0 的一个小量，这是因为 MATLAB 计算中存在的数值误差；观察频谱可知在 k = 1 和 9 的两个频点上，幅度最大，其他点为 0，与$x(n)=\frac{1}{2j}*\left(e^{2\pi fnTj}-e^{-2\pi fnTj}\right)$的两个频点 f 和 $10-f$ 符合。

6-1-4 余弦信号序列 $x(t)=\cos(2\pi ft+\text{delta})$

f = 1Hz; delta = 0; T = 0.1; length = 10;



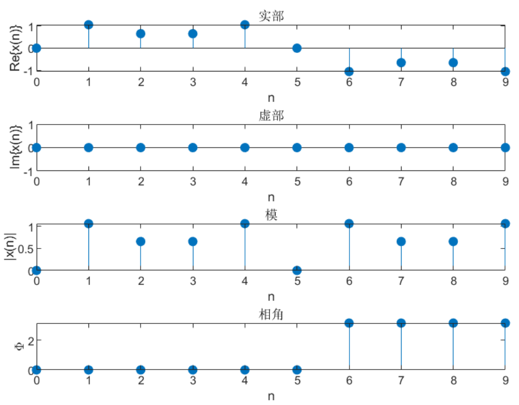


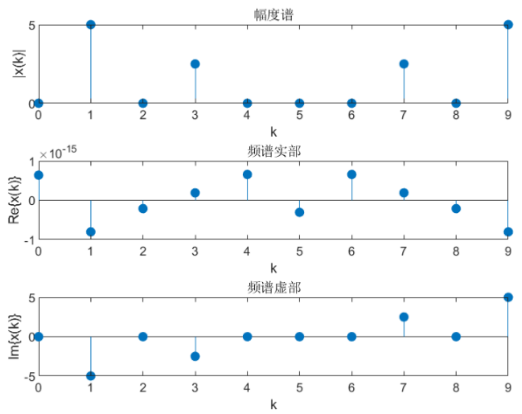
余弦序列为实信号，因此虚部为 0，相角只因为实部的正负而分别为 0 或π。

在频域上，可以看到幅度谱和频谱实部均有圆周偶对称性，虚部为圆周奇对称性；余弦信号可写成$x(n)=\frac{1}{2}*\left(e^{2\pi fnTj}+e^{-2\pi fnTj}\right)$，其频谱的虚部理论上为 0，但所得结果为一个接近于 0 的一个小量，这是因为 MATLAB 计算中存在的数值误差；观察频谱可知在 k = 1 和 9 的两个频点上，幅度最大，其他点为 0，与$x(n)=\frac{1}{2j}*\left(e^{2\pi fnTj}-e^{-2\pi fnTj}\right)$的两个频点 f 和 $10-f$ 符合。

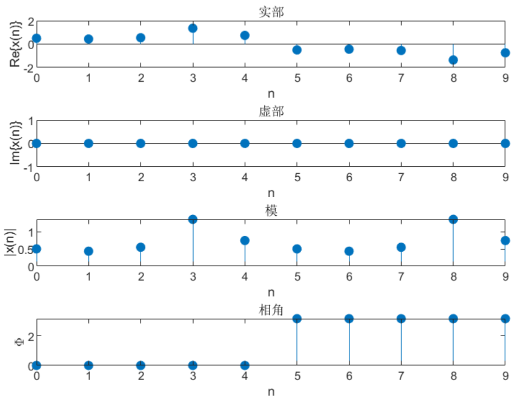
6-1-5 复合函数序列 $x(n)=\sin(2\pi f_1 nT)+\text{delta}\times\sin(2\pi f_2 nT+\text{phi})$

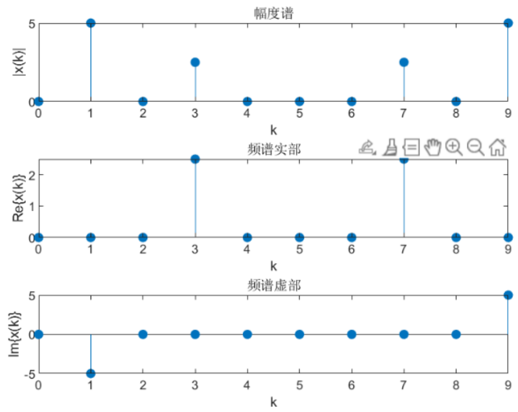
（1）phi = 0°；



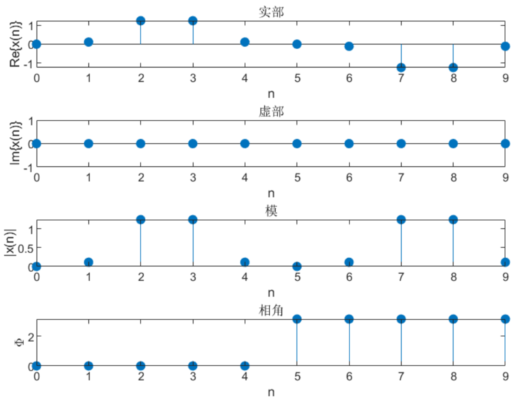


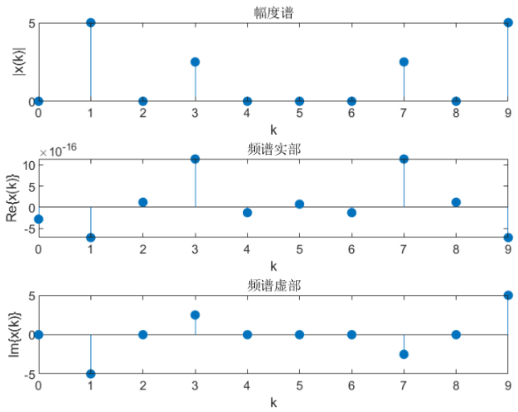
（2）phi = 90°；





（3）phi = 180°；





当 $\Phi = 0°$ or $180°$ 时，为两个正弦序列相加或相减，所得序列为奇对称实序列，虚部为 0，相角只因为实部的正负而分别为 0 或π。在频域中，幅度谱和频谱虚部为圆周奇对称，实部理论上为 0；

当 $\Phi = 90°$ 时，为余弦信号和正弦信号相加，由 DFT 变换的线性性质，可得其频谱为正弦信号的频谱叠加余弦信号的频谱，所以在频谱结果中可以发现实部频点位于 3Hz 和 7Hz，虚部频点为 1Hz 和 9Hz。

6-2 DFT 的物理意义

如果从 DTFT 角度看，有限长序列的 DFT 结果包含了 N 个离频率点处的 DTFT 结果，这 N 个离散频率点等间隔的分布在区间$[0,2\pi)$内，相当于是对$X(e^{j\omega})$ 在$[0,2\pi)$上 N 点等间距采样。

如果从 Z 变换角度看，DFT 相当于在单位元上取样的 Z 变换。

$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$， 表征信号的直流分量，值等于信号直流分量*采样点数 N 后的值；
$X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^n$，表征信号在基频上的幅度和相位，模等于基频的幅度*采样点数 N，相位为复数的幅角；
$X(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(N-1)}$，由于共轭对称性，该值与 X(1) 互为共轭。

6-3 DFT 的主要性质

（1）线性

两个有限长序列$x_1(n)$和$x_2(n)$，其 N 点 DFT 结果分别为$X_1(k)$、$X_2(k)$，

如果序列$x_1(n)$和$x_2(n)$的线性组合为$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$，

则序列$x_3(n)$的 N 点 DFT 为$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$

该性质在复合函数序列的 DFT’变换实验中已验证。

（2）反转定理

若$x(n)$的 DFT 结果为$X(k)$，则$x\left((nn)\right)_N$的 DFT 结果为$X\left((-k)\right)_N$.

（3）序列的循环移位

若$x(n)$的 DFT 结果为$X(k)$，则$x\left((n+m)\right)_N$的 DFT 结果为$W_N^{-km}X(k)$。

（4）对称性

如果$x(n)$为实序列，那么

①$X(k) = X^*\left((-k)\right)_N$

②$Re[X(k)] = Re\left[X\left((-k)\right)_N\right]$

③$Im[X(k)] = -Im\left[X\left((-k)\right)_N\right]$

④$arg[X(k)] = -arg\left[X\left((-k)\right)_N\right]$

（5）帕塞瓦尔定理

信号在时域和频域中变换时，信号的总能量保持不变

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

（注：

A、黑色部分不要改动。

B、蓝色部分，学生根据本人情况填写。

C、“五、实验数据记录和处理”和“六、实验结果与分析”根据要求（见红色部分），逐条撰写。

D、从第二页起，在每页头部填写实验名称、姓名、学号，标注页码。不够时自行加页。

E、上交纸质报告）

观察实验结果（数据及图形）的特征，做必要的记录，做出解释。包括：

6-1 各种序列的图形（时域）和频谱（频域）各有何特征，给予解释。

6-2 DFT 物理意义。X(0)、X(1)和 X(N–1)的物理意义。

6-3 DFT 的主要性质