齐次坐标的理解

一直对齐次坐标这个概念的理解不够彻底，只见大部分的书中说道“齐次坐标在仿射变换中非常的方便”，然后就没有了后文，今天在一个叫做“三百年 重生”的博客上看到一篇关于透视投影变换的探讨的文章，其中有对齐次坐标有非常精辟的说明，特别是针对这样一句话进行了有力的证明：“齐次坐标表示是计算机图形学的重要手段之一，它既能够用来明确区分向量和点，同时也更易用于进行仿射（线性）几何变换。”—— F.S. Hill, JR。

     由于作者对齐次坐标真的解释的不错，我就原封不动的摘抄过来：

     对于一个 向量 **v**以及基 **oabc**，可以找到一组坐标 (v1,v2,v3) ，

使得 **v**= v1 **a** + v2 **b +**v3 **c            （ 1 ）**

而对于一个 点 **p**，则可以找到一组坐标（ p1,p2,p3 ），

使得   **p**– **o** = p1 **a +**p2 **b** + p3 **c            （ 2 ），**

从上面对 向量 和 点 的表达，我们可以看出为了在坐标系中表示一个 点 （如 p ），我们把点的位置看作是对这个基的原点 o 所进行的一个位移，即一个向量—— p – o （有的书中把这样的向量叫做位置向量 ——起始于坐标原点的特殊向量），我们在表达这个向量的同时用等价的方式表达出了点

p：**p**= **o** + p1 **a +**p2 **b** + p3 **c (3)**

(1)(3) 是坐标系下表达一个 向量 和点 的不同表达方式。这里可以看出，虽然都是用代数分量的形式表达向量和点，但表达一个点比一个向量需要额外的信息。如果我写出一个代数分量表达 (1, 4, 7) ，谁知道它是个向量还是个点！

    我们现在把（ 1 ）（ 3 ）写成矩阵的形式：v = (v1 v2 v3 0) X (a b c o)

p = (p1 p2 p3 1) X (a b c o), 这里 **(a,b,c,o)**是坐标基矩阵，右边的列向量分别是向量 **v**和点 **p**在基下的坐标。 这样，向量和点在同一个基下就有了不同的表达：3D 向量 的第 4 个代数分量是 0 ，而 3D 点 的第 4 个代数分量是 1 。像这种这种用 4 个代数分量表示 3D 几何概念的方式是一种齐次坐标表示。

这样，上面的 (1, 4, 7) 如果写成（ 1,4,7,0 ），它就是个向量；如果是 (1,4,7,1) ，它就是个点。 下面是如何在普通坐标 (Ordinary Coordinate) 和齐次坐标 (Homogeneous Coordinate) 之间进行转换：

(1) 从普通坐标转换成齐次坐标时

   如果 (x,y,z) 是个点，则变为 (x,y,z,1);

   如果 (x,y,z) 是个向量，则变为 (x,y,z,0)

(2)从齐次坐标转换成普通坐标时

   如果是 (x,y,z,1) ，则知道它是个点，变成 (x,y,z);

   如果是 (x,y,z,0) ，则知道它是个向量，仍然变成 (x,y,z)

以上是通过齐次坐标来区分向量和点的方式。从中可以思考得知，对于平移 T 、旋转 R 、缩放 S 这 3个最常见的仿射变换，平移变换只对于点才有意义，因为普通向量没有位置概念，只有大小和方向.

而旋转和缩放对于向量和点都有意义，你可以用类似上面齐次表示来检测。从中可以看出，齐次坐标用于仿射变换非常方便。

此外，对于一个普通坐标的 点 P=(Px, Py, Pz) ，有对应的一族齐次坐标 (wPx, wPy, wPz, w) ，其中 w不等于零 。比如， P(1, 4, 7) 的齐次坐 标有 (1, 4, 7, 1) 、（ 2, 8, 14, 2 ）、（ -0.1, -0.4, -0.7, -0.1 ）等等。 因此，如果把一个点从普通坐标变成齐次坐标，给 x,y,z 乘上同一个非零数 w ，然后增加第 4 个分量w ；如果把一个齐 次坐标转换成普通坐标，把 前三个坐标同时除以第 4 个坐标，然后去掉第 4 个分量。

由于齐次坐标使用了 4 个分量来表达 3D 概念，使得平移变换可以使用矩阵进行，从而如 F.S. Hill, JR所说，仿射（线性）变换的进行 更加方便。由于图形硬件已经普遍地支持齐次坐标与矩阵乘法，因此更加促进了齐次坐标使用，使得它似乎成为图形学中的一个标准。

    以上很好的阐释了齐次坐标的作用及运用齐次坐标的好处。其实在图形学的理论中，很多已经被封装的好的API也是很有研究 的，要想成为一名专业的计算机 图形学 的 学习者，除了知其然必须还得知其所以然。 这样在遇到问题的时候才能迅速定位问题的根源，从而解决问题。