星系天文学作业

王正一
北京师范大学天文系

2021 年 12 月 2 日

第二章

1 已测得南门二（半人马座星）和心宿二（天蝎座星）的目视星等分别为 -0.01^{m} 和 1.0^{m}，并测量得到它们的距离分别为 1.34pc 和 170pc，求它们的光度之比。

星等与亮度的关系：

$$m_1 - m_2 = -2.512 \lg \frac{E_1}{E_2}$$

光度之比：

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{E_1 R_1^2}{E_2 R_2^2} = \frac{\pi_1^2}{\pi_2^2} \times 10^{-\dfrac{m_1 - m_2}{2.512}} \approx 40621.7$$

2 观测得到某一河外星系中一颗经典造父变星的光变周期为 16.53 天，视星等为 24.87^{m}，测量其光谱发现 H_α 谱线位移至 657.852nm。求哈勃常数。(已知造父变星周光关系满足：$M = -2.534 \lg P–1.721^m$，P 单位为天)

红移：

$$z = \frac{\Delta\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha} = \frac{657.852 - 656.281}{656.281} \approx 0.0024 \ll 1$$

退行速度：

$$v_H = cz = 720000\mathrm{m/s}$$

绝对星等：

$$M = m + 5 - 5 \lg D_L = -2.534 \lg P–1.721^m$$

这里，光度距离的单位是秒差距。
共动距离：

$$D_c = \frac{D_L}{1+z}$$

哈勃常数：

$$H = \frac{v_H}{D_c} = \frac{720\mathrm{km/s}}{8.46\mathrm{Mpc}} \approx 85.1\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$$

3 早型星系是比晚型星系更年轻的星系。请判断并解释理由。

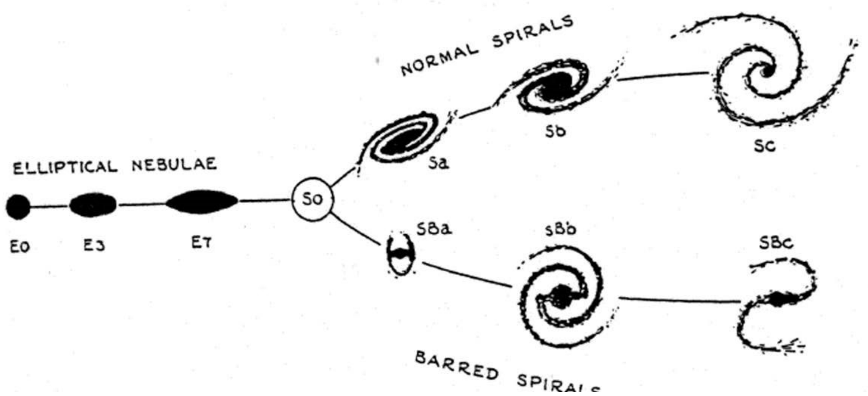


图 1: 哈勃音叉图，图左侧为早型星系，右侧为晚型星系

命题：“早型星系是比晚型星系更年轻的星系”，为假。
在早型星系，如椭圆星系中，存在大量年老的恒星，并且鲜有新恒星形成。而在晚型星系，如旋涡星系与棒旋星系，存在年轻恒星以及大量正在形成的恒星。因此早型星系应当是年长的星系，晚型星系反之。

4 如果在距离银河系中心 20kpc 处的旋转速度是 240km/s，求在此半径范围内的总质量。

半径范围内的总质量提供自转加速度：

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(<R)}{R^2}$$

$$M(<R) = \frac{v^2 R}{G} \approx 2.67 \times 10^9 M_\odot$$

5 一个星团在主序转弯处含 200 颗 F5 型星和 20 颗 $K0III$ 型巨星。用表 1.4 和表 1.5(见书中 P24、P25) 证明：它的绝对 V 星等 $M_V = -3.25$，颜色 $B - V = 0.68$。

单个星的绝对 V 星等：

$$M_V^* - M_{V\odot} = -2.5\lg\frac{L_V}{L_{V\odot}}$$

星团绝对 V 星等：

$$M_V = M_{V\odot} - 2.5\lg\frac{200L_{V,F5} + 20L_{V,K0III}}{L_{V\odot}} \approx -3.25$$

单个星的绝对 B 星等：

$$M_B^* = M_V^* + (B-V) = M_{V\odot} - 2.5\lg\frac{L_V}{L_{V\odot}} + (B-V) = M_{B\odot} - 2.5\lg\frac{L_B}{L_{B\odot}}$$

星团绝对 B 星等：

$$M_B = M_{B\odot} - 2.5\lg\frac{200L_{B,F5} + 20L_{B,K0III}}{L_{B\odot}}$$

星团色指数：

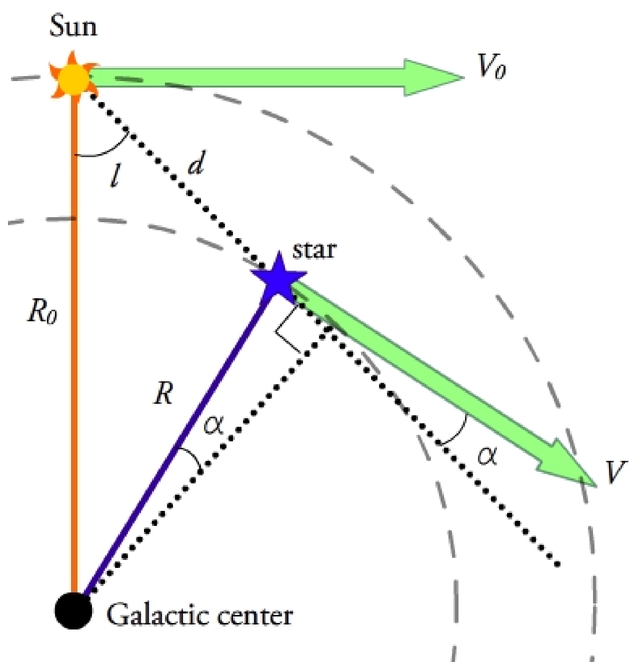
$$(B-V) = M_B - M_V \approx 0.68$$

第三章

6 为了测定一颗恒星的三角视差，我们必须至少 3 次测量它相对于远得多的天体的位置，为什么？

待测恒星的自行为三角视差法测量距离带来了误差，在相隔半年的测量后，还需要再经过半年，去测定恒星的自行，以此修正，故至少需要三次测量才可以确定天体的位置。

7 推导奥尔特公式，得到视向速度和切向速度随银经变化的关系以及奥尔特常数 A、B。



假设银盘内一恒星的银经为 l, 在距离太阳 d 处，这颗恒星和太阳都在环绕银心的圆轨道上，太阳-银心距离为 R_0，速度为 V_0, 恒星-银心距离为 R，速度为 V。由此我们可以得到该恒星相对太阳的视向速度和切向速度为：

$$V_{obs,r} = V\cos\alpha - V_0 \sin l$$

$$V_{obs,t} = V\sin\alpha - V_0 \cos l$$

带入太阳和该恒星的角速度 Ω_0 和 Ω：

$$V_{obs,r} = \Omega R\cos\alpha - \Omega_0 R_0 \sin l$$

$$V_{obs,t} = \Omega R\sin\alpha - \Omega_0 R_0 \cos l$$

我们在图中可以用几何的方法得到以下关系：

$$R\cos\alpha = R_0 \sin l$$

$$R\sin\alpha = R_0 \cos l - d$$

然后我们就可以得到：

$$V_{obs,r} = (\Omega - \Omega_0)R0\sin l$$

$$V_{obs,t} = (\Omega - \Omega_0)R0\cos l - \Omega d$$

将 $\Omega - \Omega_0$ 对 R_0 进行泰勒展开并保留一阶项：

$$\Omega - \Omega_0 = (R - R_0)\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} + \mathcal{O}((R - R_0)^2)$$

这里我们假设恒星距离太阳很近，那么同样我们可以得到以下关系：

$$R_0 - R = d\cos l$$

综上可得：

$$V_{obs,r} = -R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} d\cos l\sin l = -R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} d\frac{\sin(2l)}{2}$$

$$V_{obs,t} = -R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} d\cos^2 l - \Omega d = -R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} d\frac{\cos(2l)}{2} + \left(-\frac{1}{2}R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} - \Omega\right)d$$

化简得：

$$V_{obs,r} = Ad\sin(2l)$$

$$V_{obs,t} = Ad\cos(2l) - Bd$$

这里奥尔特常数 A、B：

$$A = -\frac{1}{2}R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{R_0} - \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0}\right)$$

$$B = -\frac{1}{2}R_0\left.\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0} - \Omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{R_0} + \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right|_{R_0}\right)$$

8

8.1 太阳（系）在轨道上绕着银河系中心公转一周的时间，称为银河年或宇宙年。请根据两个基本量 R_0、V_0 的数值计算银河年的大小。

$$T = \frac{2\pi R_0}{V_0} = 2\pi\frac{8.5\mathrm{kpc}}{220\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 7.49\times10^{15}\mathrm{s} \approx 2.37\times10^{8}\mathrm{yr}$$

8.2 假设在太阳轨道半径处猎户臂密度波速是 120km/s，求自太阳诞生以来 46 亿年太阳已穿行猎户臂多少次？

太阳两次穿过猎户臂得时间间隔为：

$$\Delta T\frac{2\pi R_0}{V_0 - V} = 2\pi\frac{8.5\mathrm{kpc}}{220 - 120\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 1.65\times10^{16}\mathrm{s} \approx 5.22\times10^{8}\mathrm{yr}$$

$$\frac{4.6\times10^{9}\mathrm{yr}}{5.22\times10^{8}\mathrm{yr}} = 8.81$$

故自太阳诞生以来 46 亿年太阳已穿行猎户臂 8 次。

9 设银道面上的星际消光为 $1^{\mathrm{m}}/\mathrm{kpc}$，问：

9.1 用极限星等 23.5^{m} 的望远镜观测银心处一颗最暗的恒星，其绝对星等是多少？

视星等：

$$m = 23.5^{\mathrm{m}} - 8.5\mathrm{kpc} \times 1^{\mathrm{m}}/\mathrm{kpc} = 15^{\mathrm{m}}$$

绝对星等：

$$M = m + 5 - 5\lg D = 0.35$$

9.2 如果忽略星际消光，它的绝对星等是多少？

$$M = 23.5^{\mathrm{m}} + 5 - 5\lg D = 8.85$$

10 如果在恒星最初开始形成的 $t = 0$ 时刻，盘气体有 $Z(0) = 0.15Z_{\odot}$，并且 $M_g(t = 0)/M_g(t) = 50/13$。用单区瞬时循环模型证明：$p \approx 0.63Z_{\odot}$，且今天约 20% 的小质量恒星应当有 $Z < Z_{\odot}/4$。

$$Z(t) = Z(0) + p\ln\left[\frac{M_g(t=0)}{M_g(t)}\right]$$

得：

$$p = \frac{Z(t) - Z(0)}{\ln\left[\dfrac{M_g(t=0)}{M_g(t)}\right]} = \frac{1 - 0.15}{\ln\dfrac{50}{13}}Z_{\odot} \approx 0.63Z_{\odot}$$

$$M_*(< Z) = M_g(0)\{1 - \exp[-\frac{Z - Z(0)}{p}]\}$$

$$\frac{M_*(< Z_{\odot}/4)}{M_*(< Z_{\odot})} = \frac{1 - \exp[-\dfrac{Z_{\odot}/4 - Z(0)}{p}]}{1 - \exp[-\dfrac{Z_{\odot} - Z(0)}{p}]} = 0.198 \approx 20\%$$

因此，今天约 20% 的小质量恒星有 $Z < Z_{\odot}/4$。

第五章

11 假设螺距角 i 保持常数，将会有对数旋涡。

11.1 证明对于某个常数 k，有 $f(R,t)\tan i = \ln R + k$。

螺距角 i 保持常数, 因此有:

$$R\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}R}t = \frac{1}{\tan i} = const. \tag{1}$$

解得:

$$\Omega(R)t = \frac{1}{\tan i}\ln R + C \tag{2}$$

这里 C 是常数，因此我么可以得到:

$$f(R,t)\tan i = \ln R + C\tan i + \phi_0 = \ln R + k \tag{3}$$

这里 $k = C\tan i + \phi_0$。

11.2 从这样的旋臂上一点开始，以固定角 ϕ 向外运动，证明我们穿过下一条旋臂是在半径大 $\exp(2\pi\tan i/m)$ 倍的地方。

相邻两条悬臂存在下面关系:

$$m[\phi + f(R_1,t_1)] = m[\phi + f(R_2,t_2)] + 2\pi \tag{4}$$

考虑星系旋转是一个准静态过程取 $t_1 = t_2 = t$, 带入方程3:

$$m\ln R_1 + km = m\ln R_2 + km + 2\pi\tan i$$

得:

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp(2\pi\tan i/m)$$

11.3 令 $m = 2$，画出对数旋涡，并检验 1.2 结论是否正确。

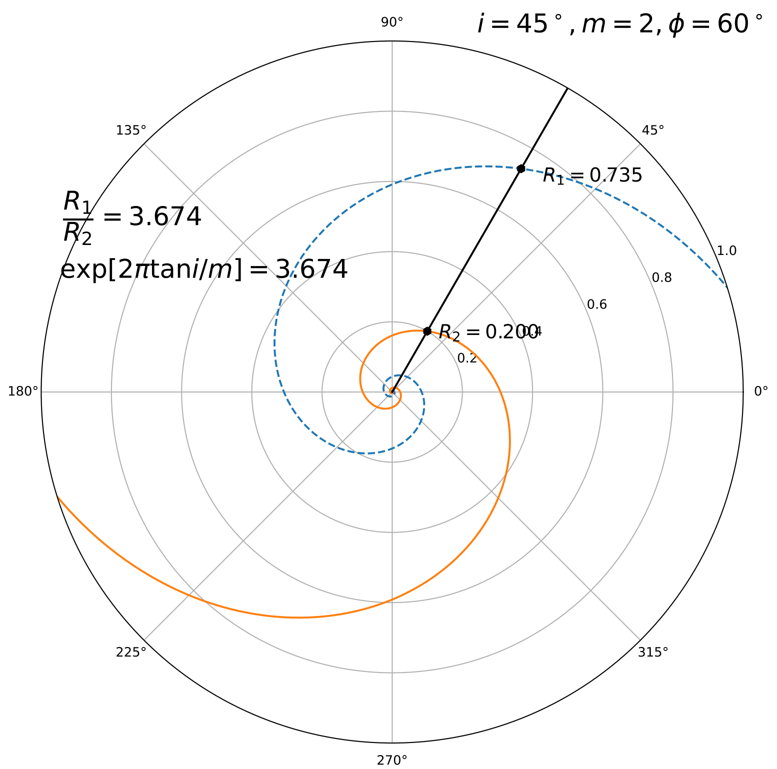


图 2: 如图，可以证明 $\dfrac{R_1}{R_2} = \exp(2\pi \tan i/m)$。

12 NGC7331 在 I 波段有视星等 $m_I = 7.92^{\mathrm{m}}$。用表 1.4(见下图) 求太阳的 M_I，从 NGC7331 的旋转曲线 (第五章课件 P55) 的平坦部分估计 $V_{\max}$，按 I 波段 $T-F$ 关系公式 (第五章课件 P62) 估计出 NGC7331 的距离。

查表得:

$$M_{I,\odot} = M_{V,\odot} - (V-T) = 4.11 \tag{5}$$

根据旋转曲线，可以估算出 $V_{\max} = 250\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^-1$ 根据 $T-F$ 公式，可得 NGC7331 和太阳在 I 波段的光度之比，进而得到 M_I 之比:

$$M_I = M_{I,\odot} - 2.5\lg\frac{L_I}{L_{I,\odot}} = M_{I,\odot} - 2.5\lg\left[4\times10^{10}\left(\frac{V_{\max}}{200\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^-1}\right)^4\right] \approx -23.36 \tag{6}$$

根据绝对星等和视星等的关系:

$$d = 10^{-\dfrac{M_I - m_I - 5}{5}} \approx 18.03\mathrm{Mpc} \tag{7}$$