2022 年厦门大学第十九届景润杯高等数学竞赛理工类试题及解答

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}=$___________.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$.因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x\right]$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}[\ln(1+t)-t]=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}$$.故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2.设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-(xy-t)^2}\mathrm{d}t,(x>0,y>0)$，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$___________.

解：令 $u=xy-t$，则 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\mathrm{e}^{-(xy)^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y\mathrm{e}^{-(xy)^2}\cdot(-2xy)\cdot y$

$=-2xy^3\mathrm{e}^{-(xy)^2}$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{-(xy)^2}$， $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\mathrm{e}^{-(xy)^2}\cdot(-2xy)\cdot x=-2x^3y\mathrm{e}^{-(xy)^2}$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-(xy)^2}+y\mathrm{e}^{-(xy)^2}(-2x^2y)=\mathrm{e}^{-(xy)^2}-2x^2y^2\mathrm{e}^{-(xy)^2}$.于是，$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$=\frac{x}{y}\cdot\left(-2xy^3\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right)-2\left(1-2x^2y^2\right)\mathrm{e}^{-(xy)^2}+\frac{y}{x}\cdot\left(-2x^3y\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right)=-2\mathrm{e}^{-(xy)^2}.$$

3.微分方程 $y''+\left(y'\right)^2+4=0$ 的通解为___________.

解：因为 $\left(\mathrm{e}^y\right)'=\mathrm{e}^y\cdot y'$，$\left(\mathrm{e}^y\right)''=\left(\mathrm{e}^y\cdot y'\right)'=\mathrm{e}^y\left(y'\right)^2+\mathrm{e}^y y''$，则原方程可以改写成

$\left(\mathrm{e}^y\right)''+4\mathrm{e}^y=0$.故原方程的通解为 $\mathrm{e}^y=C_1\cos2x+C_2\sin2x$，或者

$y=\ln\left(C_1\cos2x+C_2\sin2x\right)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

4.曲线 $L:\begin{cases}x=t(1-\sin t)\\ y=t\cos t\end{cases},0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$，所围图形的面积为___________.

解：$A=\dfrac{1}{2}\oint_L(-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2(1-\sin t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3+\dfrac{1}{2}\left[t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{48}\pi^3-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\pi^3-\left[t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{48}\pi^3-\frac{1}{2}\pi+1.$$

5.已知平面Π与平面$\Pi_1: 13x-5y-10z+13=0$关于平面$\Pi_2: x-2y+3z+1=0$对称，则平面Π的方程为___________.

解：设$P(x,y,z)$为平面Π上任意一点，$P_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$为点$P(x,y,z)$关于平面$\Pi_2$的对称点.

于是，$\overrightarrow{PP_1}=\left(x_1-x,y_1-y,z_1-z\right)=t(1,-2,3)$（其中$(1,-2,3)$为平面$\Pi_2$的法向量），即

$x_1=x+t, y_1=y-2t, z_1=z+3t$.因为$P_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$在平面$\Pi_1$上，则

$13(x+t)-5(y-2t)-10(z+3t)+13=0$，故$7t=13x-5y-10z+13\ (*)$，又因为$\overline{PP_1}$的

中点$\left(\dfrac{x+x_1}{2},\dfrac{y+y_1}{2}\cdot\dfrac{z+z_1}{2}\right)$在平面$\Pi_2: x-2y+3z+1=0$上，则有

$x+x_1-2\left(y+y_1\right)+3\left(z+z_1\right)+2=0$，即$2x+t-2(2y-2t)+3(2z+3t)+2=0$，整理

得$2x-4y+6z+14t+2=0$.将$(*)$代入，得$2x-4y+6z+26x-10y-20z+26+2=0$，

故所求平面方程为$2x-y-z+2=0$.

6.已知$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n-1}(2n)!}$，将$f(x)$展开成$x-\dfrac{\pi}{2}$的幂级数，该幂级数为___________.

解：$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n-1}(2n)!}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}=2\cos\dfrac{x}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$.于是，

$$f(x)=2\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}.$$

二、（8分）求曲线$y=\dfrac{x+2\sin x}{1+\cos x}, x=-\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{\pi}{2}$以及$x$轴所围成的图形面积.

解：$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|x+2\sin x|}{1+\cos x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\pi-4\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi+2\ln 2.$$

三、(8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解：令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}\frac{\ln(1+t)}{t}}{t^2}$.因为

$$\frac{\ln(1+t)}{t}=1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right),\quad(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\mathrm{e}^{1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)}$$

$$=\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)\right)^2+o\left(t^2\right)\right]=\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right)\right]$$

$$=\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{t}{2}+\frac{11t^2}{24}+o\left(t^2\right)\right],$$ 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{t}{2}+\frac{11t^2}{24}+o\left(t^2\right)\right]-\mathrm{e}\cdot\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+o\left(t^2\right)\right]}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}\cdot\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{1}{8}.$$

四、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且

$\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x-xh)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x-xh)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{h\to\infty}\frac{1}{\ln\ln(x-xh)}\frac{f(x)}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，即 $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln f(x-xh)-\ln f(x)}{h}=\frac{1}{x}$.于

是，$-x(\ln f(x))'=\frac{1}{x}$，解得 $\ln f(x)=\frac{1}{x}+C$.故 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}+C}$.由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 知，$\mathrm{e}^C=1$，

得 $C=0$.因此，$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

五、(8 分) $F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},x^2+y^2\le t^2\right\}$，

$f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.试求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^5}$.

解：$F(t)=\iiint_\Omega f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f\left(r^2\right)r\mathrm{d}r\int_0^r\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r$，因此，

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\mathrm{d}r}{t^5}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi t^2 f\left(t^2\right)}{5t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi f\left(t^2\right)}{5t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi f\left(t^2\right)}{5t^2}=\frac{2\pi}{5}f'(0)=\frac{2\pi}{5}.$$

六、（8 分）设$b>a$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\sqrt[n]{x-a}\,f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明：记$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$\int_a^b\sqrt[n]{x-a}\,f(x)\mathrm{d}x=\sqrt[n]{x-a}F(x)\Big|_a^b-\frac{1}{n}\int_a^b(x-a)^{\frac{1}{n}-1}F(x)\mathrm{d}x$

$=\sqrt[n]{b-a}F(b)-\frac{1}{n}\int_a^b(x-a)^{\frac{1}{n}-1}F(x)\mathrm{d}x$，因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界，即存在正数$M>0$，使得$|f(x)|\le M,\forall x\in[a,b]$.于是，$|F(x)|=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t$

$\le M(x-a),x\in[a,b]$.从而，$\left|\frac{1}{n}\int_a^b(x-a)^{\frac{1}{n}-1}F(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{n}\int_a^b(x-a)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}(b-a)^{\frac{n+1}{n}}$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{n+1}(b-a)^{\frac{n+1}{n}}=0$及夹逼极限准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b(x-a)^{\frac{1}{n}-1}F(x)\mathrm{d}x=0$.故

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\sqrt[n]{x-a}\,f(x)\mathrm{d}x=F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

七、（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}$的收敛域，并求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}$，其中$S(x)$为该幂级数的和函数，$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots$.

解：记$u_n(x)=\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}x^2=0<1$，该幂级数的收敛域为

$(-\infty,+\infty)$.和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=xS_1(x)$，其中

$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$.$S_1'(x)=1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-3)!!}=1+x\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!!}=1+xS_1(x)$，即

$S_1'(x)-xS_1(x)=1$.于是，$S_1(x)=\mathrm{e}^{-\int(-x)\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int(-x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left[\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x+C\right]$.注意到

$S_1(0)=0$，则$C=0$.因此，$S(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$.故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

八、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$f(0)=0$，且满足

$\frac{1}{2}\int_0^1\left[f(x)-\int_0^x f(t)dt\right]dx=f(2)$，证明：在 $(0,2)$ 内存在两个不同的点 ξ,η，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=0$.

证明：$\int_0^1\left[f(x)-\int_0^x f(t)dt\right]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\int_0^x f(t)dtdx$

$=\int_0^1 f(x)dx-x\int_0^x f(t)dt\Big|_0^1+\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$，由积分中值定理，存在 $c\in[0,1]$，使得 $\int_0^1 xf(x)dx=cf(c)$，即 $cf(c)=2f(2)$.作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，因为 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $F(c)=F(2)$.由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(c,2)\subset(0,2)$，使得

$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $f(\xi)=f(\xi)-f(0)=f'(\eta)\xi$，

于是，$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}=-f'(\eta)$，即 $f'(\xi)+f'(\eta)=0$.

九、（10 分）证明：（1）$\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pi<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx<\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$；（2）$\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pi^2<\int_L xds<\frac{\sqrt{6}}{4}\pi^2$，其中 L 为平面曲线 $L:y=\sin x,0\le x\le\pi$.

证明：（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx$，令

$f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，

$f'(x)=\sin x\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)>0$，即 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调增加，则

$\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pi<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{1+\cos^2 x}+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)dx<\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$.故

$$\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pi < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{6}}{4}\pi\,.$$

（2）$\int_L x\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.因此，

$$\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pi^2 < \int_L x\mathrm{d}s < \frac{\sqrt{6}}{4}\pi^2\,.$$