实验一 分治算法

一、 实验目的

1、掌握分治算法的设计思想与方法，
2、熟练使用高级编程语言实现分治算法，
3、通过对比简单算法以及不同的分治求解思想，体验分治算法。

二、实验内容

使用 3 中方法求解凸包问题。
输入：平面上 n 个点的集合 Q，凸包问题是要输出一个 Q 的凸包。其中，Q 的凸包是一个凸多边形 P，Q 中的点或者在 P 上或者在 P 中。
输出：集合 Q 中的凸包点。
三种方法包括：
1. 蛮力法
2. Graham-Scan 算法
3. 分治算法

集合 Q 中的点为正方形(0,0) -(100,100)内的点，大小分别为(1000，2000，3000…)的数据集合。使用随机算法生成。
对每个算法，针对不同大小的数据集合，运行算法并记录算法运行时间；对每个算法，绘制算法性能曲线，对比算法。

三、实验过程及结果

***********。

包括算法实现的主要步骤，算法实现的关键代码，算法运行结果截图，算法性能曲线图及结果分析

1. 生成指定大小、指定范围内的点集合

   根据实验要求，需要生成范围为以(0,0)-(100,100)为左上角和右上角的正方形区域内的点，点集合的大小——即点的个数为 1000,2000,3000 等

   我们将点的个数设为参数，所以代码关注于点的生成算法。

   既然是点的集合，我认为应该满足：不存在重复点！

   此外，在代码中我生成了整数坐标的点。所以 100*100 的范围，最多点为 10,000 个，是可以满足要求的。

   核心思想是：要随机生成不重复的点，而且要保证概率相等，这个其实是

不容易做到的！因为 Python 语言的方便，同时这里 100*100 大小可以接受，所以：

a. 我先生成全集——即该区域内全部 10,000 个点（整数点）

b. 使用随机无放回采样函数 sample，从此全集中随机抽出指定数目的点。

可知上述算法能够生成无重复、随机点。

代码见 convex_hull 项目的 generate_pnts.py 文件。

2. 蛮力法算凸包

虽然网上有相对较优的算法($O(n^3)$)，不过这里还是按照 PPT 上的方法使用了$O(n^4)$的方法。当然，由于在循环中加入了被删除点的跳过操作，实际时间消耗将大大小于$O(n^4)$（实际上，曾经测试过不加跳过操作来还原暴力法的原貌，但是无奈耗时实在太长，只得放弃）。

接下来说几个关键的地方：

1. 如何判断一个点在三个点围成的三角形中

   这里有个坑，即首先需要判断这三个点能不能构成三角形。后面单独再说。

   按照 PPT 的方法，就是分别以前三个点中的两个做为一条直线上的点，求解这条直线，算剩余的一个点和待测试点到这条直线的距离（这里指函数距离 functional margin ，当然实际上只需要知道符号），如果二者距离之积为正，那么在同一边。否则不在同一边。如果相对于三个点中任意两个点构成的直线，该测试点都与三个点中剩余一点在同侧，那么则该点在其内部！测试点不是凸包！

   该段逻辑在 *find_convex_hull_bruteforce.py* 中，*calc_line_params, is_in_same_side, is_3pnts_in_one_line, is_in_rectangle* 4 个函数中。注释应该比较清晰，不过英文表达可能稍有不畅，关键地方都是用了中文描述。

2. 上述三个点如果在一条直线上该如何处理

   用 matplotlib 画出暴力法结果时发现了问题，不对！！通过观察 log 输出，以及对代码逻辑的考虑，发现了上述的问题！PPT 上因为是提纲挈领的讲算法，自然不会提及这种细节，但是代码实现上任何一个考虑不周，就会导致 BUG。

如果三个点在一条直线上，那么此时对于待测点是不能够给出是否不是凸包点的结论的！而上述判断算法将给出非凸包的结论。因为按照上述算法，*is_in_same_side* 在其中一个函数距离为 0 时会返回真。此时因为三点共线，就会认为待测试点全部在同侧（结果全部为 0，均返回真），认为是非凸包点。结果错误！

直观的想法是，判断是直线后，直接跳过此次判断。

但经过思考后，确定了如下更好的方案：如果三点共线，则必然三点中中间的点不是凸包！！

以上逻辑很直观，应用凸集合也可以证明。代码逻辑在 *find_convex_hull_bruteforce.py* 中的 91-95 行。

3. 四重循环判断点是否不是凸包

   如 PPT 上的所述，不赘言。

以上就完成了蛮力法求凸包。比较直观简单，但有坑。

3. Graham-Scan 算法求凸包

   我觉得主要有一下几个关键点

   1. 为什么可以这样做

      其实可以用凸集合的图示来想——如果存在右转的点，那么就存在一个内凹的角。在内凹部分的两个极点画一条线，该线在集合外部！所以此时就不是凸包了。

      再，如果是直线呢？即不左转，也不右转——按照凸集合的定义，这个点不是极点。所以不是凸包。当然，我觉得要是认为是凸包吧，或许问题不会很大。但是这里我们严格按照定义。

      所以以凸包上的点为起点，非左转点不是凸包上的点。

      而所有点中 y 值最小的点，必然是凸包点。（这里表述不是很清楚，后面会更详细的论述）

   2. 如何极角排序

      1. 直观的想法，使用余弦角度。$\theta = \arccos < \vec{x}\ , \vec{p}\ \ >$，其中x向量是极轴，p 向量是在归一化到极点上的坐标。因为极点是 y 值最小的，所以所有的点都在一二象限内，此区域内cos是单调递减的。所以余弦值越小，极角越大！由此算出每个向量相对极轴的极角，

由小到大排序即可！这里有个坑，就是浮点数的判断。在调试过程中，发现明明极角相同，但是算法给出的结果却不是如此。通过打印 log 发现，由于 cos 求值需要算距离，这里涉及到了开平方sqrt操作，结果为浮点数。不相等的两个浮点数，在 64 位表示下仅仅最后一位不同，然而如果直接使用=判断，就是不等的！于是想起了 C 语言中判断浮点数相等的方法，只要两个数的差在某个范围内即可认为相等。config.py 中的 EPSILON 常量，即定义了该相等的阈值。

2. 使用向量的叉乘。我们将二维坐标系中的两个向量扩展到三维，那么原始的$p1 = (x1, y1)$，$p2 = (x2, y2)$就可以表示为$p1 = (x1, y1, z1 = 0)$，$p2 = (x2, y2, z2 = 0)$，根据向量的叉乘公式，结果为 $p1 \times p2 = (y1z2 - z1y2, z1x2 - x1z2, x1y2 - y1x2) = (0, 0, x1y2 - y1x2)$。叉乘满足右手定则，故只要 p1 向量的极角大，那么叉乘的结果向量向 z 的负方向，此时$x1y2 - y1x2$为负；如过 p1 极角小，那么结果为正；如果极角相同，则等于 0（由此给出了判断两个向量共线的方法，即上面用到的三点共线的判断）。故直接根据$x1y2 - y1x2$结果的正负，可直接给出两个向量极角的比较。由于使用 Python 内建的 sorted 函数排序，只需要定义两个元素的 cmp 函数即可。此恰恰满足要求。

find_convex_hull_grahamscan.py 中 get_polar_angle_cmp_function 定义了上述两种比较函数，经过比较，其结果是相同的。但是 cos 需要开方，运算量明显比较大，且计算结果不够精确。故实际使用时，使用的是基于叉乘的结果。

3. 如果判断左转

如上描述，直接根据叉乘结果。

4. 如何初始栈中的三个凸包点

PPT 就是简单的将极点、排序后的前两个点放入到栈中即可。然而实际上却远远不止这么简单。

考虑情景：

a. 有最小 y 值的点大于 3 个

b. 三个点共线

a、b 情景有所包容，但是 b 情景包含的情况更多。首先考虑情景 1，此时就出现了极点选择的问题——多个最小 y 值的点，选哪一个呢？经过权衡比较，选择最左边，即 x 值最小的点最好。此时只要再找到最右端的具有该 y 值的点，再加上下一个排序后的点，就必然构成了初始凸包中的点！

b 情景，首先要去除 a 中的情景（因为多个 y 值相同也肯定共线，这里不考虑此情况）。即他们的 y 值是不同的，不满足 a，但是它们就是在一条直线上！这种情景的概率应该是比较小的，但是恰恰被我遇到了…解决办法，就是顺序遍历排序后的点，直到找到不共线的即可。

5. Graham-Scan 算法

如 PPT 上所言，不赘述。

代码见：*find_convex_hull_grahamscan.py*

4. 分治法

关键点有两个，我认为是 PPT 讲的比较含糊的地方：

1. 到底如何合并

首先，如 PPT 上画的图，选择的新极点是左边凸包的**内点**。所谓内点，就是凸包内部的点。根据凸集合的定义，所有内点都可以根据凸包点线性插值表示（具体实现见 find_convex_hull_dc.py 中 *generate_inner_pnt* 函数）。因为是内点，所以左边的整个凸包对于该点都是逆时针有序的！

考虑右边的凸集合。首先，右边的集合已经是一个凸包了，所以所有的点必然也是相对于其内部点逆时针排序的！但是，相对于左边的点，他们就不是有序的了。但我们可以找到右边凸包点中，相对于左边极点，极角最大和最小的点。那么由最小的点到最大的点，逆时针遍历右半部分，得到的序列对于此左边极点是逆时针有序的；对于左半部分，顺时针遍历，得到的点序列相对此极点是逆时针有序的。这个可以画一个图，能够比较直观的看出。证明不是很会。上述时间复杂度是$O(n)$（代码中使用了算法导论以及 PPT 上都提及的使用分治找最大最小值的算法，比价次数是$\frac{3n}{2}$，当然，时间复杂度仍然是$O(n)$）。

现在我们就得到了三个相对于同一个极点分别内部有序的序列了！直接对这三个序列做关于此极角的 Merge 排序，使用上面定义的比较函数即可。时间复杂度是$O(n)$。

以上，就完成了 Merge 操作。

2. 分

   PPT 上给出的话一笔带过。实现时为了达到真正有意义的分治算法，使用了线性时间查找中位数的方法。即实现了《算法导论》第九章中第 i 顺序统计量中，randomized_select 算法。

   成功找到了中位数，但是划分时出现了 BUG。假设我们将小于等于中位数的点划到左部分，其余到右部分。同样考虑两种情景：

   a. 所有点的 x 值都相同

   b. 找到的中位数实际上是所有点中 x 值最大的

   上述情景 b 发生的概率较大！上面任何一种情况，都将导致左部分子集为待划分集合，而右部分为空！这样递归调用，将无穷递归！最终爆栈。

   解决办法比价简单，第一种情况直接分成两半，第二种就改变逻辑，将小于中位数的划到左边，大于等于的放到右边。

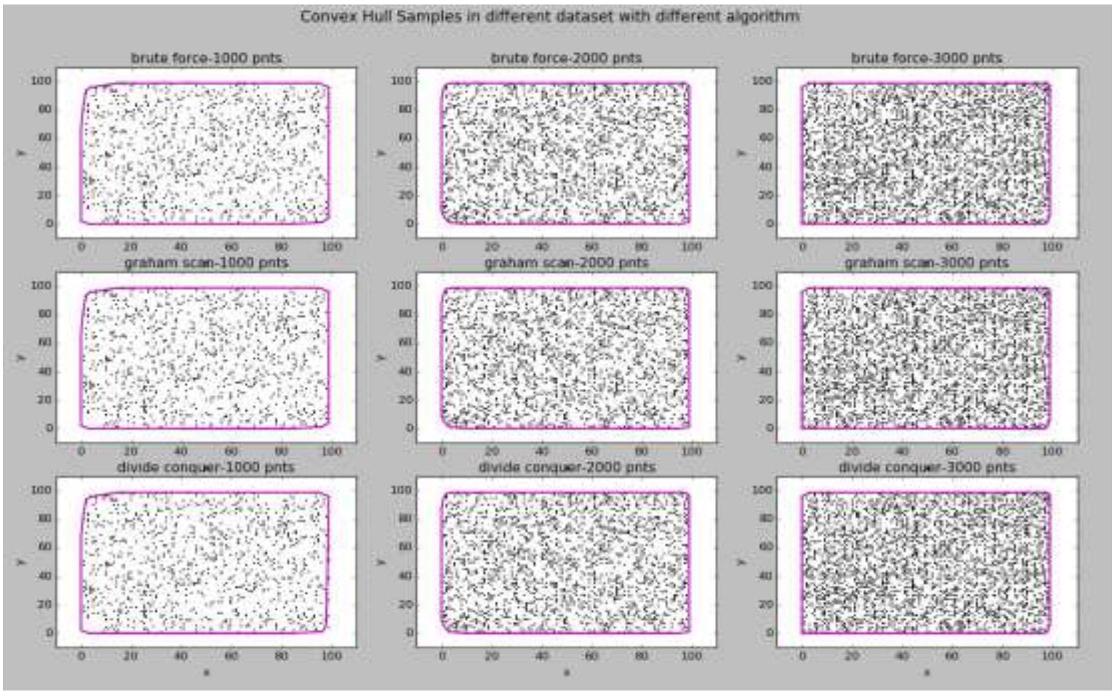
非常多的细节。不再赘述。代码见 *find_convex_hull_dc.py*。

5. 实验结果（运行结果截图）及对比分析（时间性能曲线）

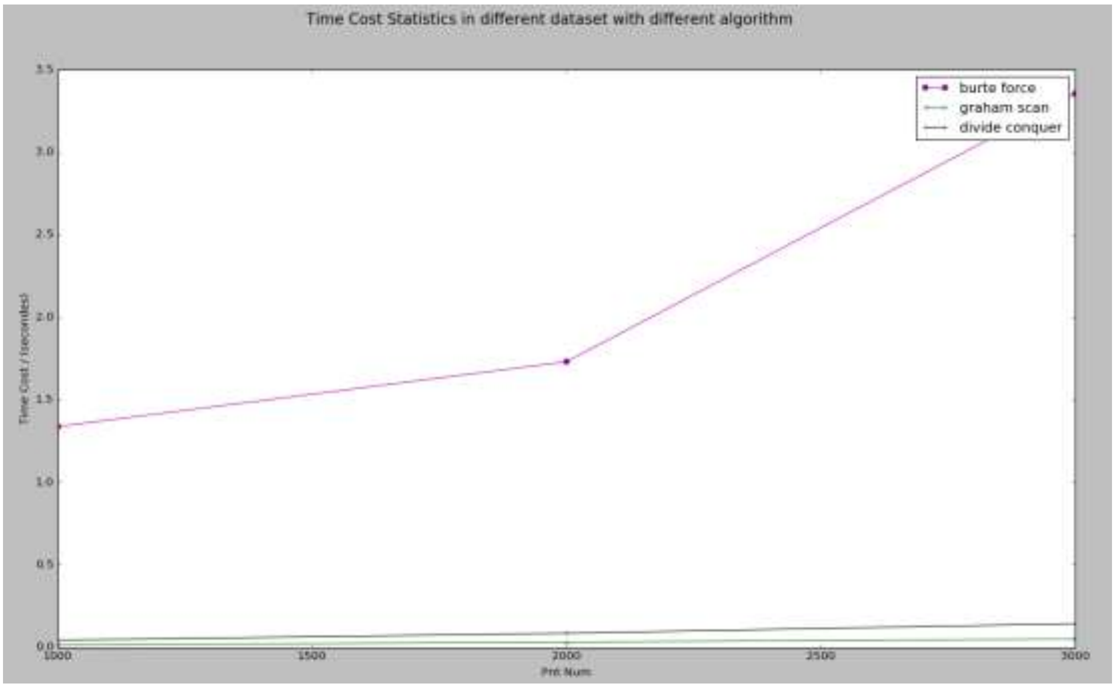
控制台输出（最后为时间，单位为秒）：

```
E:\Users\小文件\Documents\GitHub\aade\convex_hull>python main.py
INFO:root:brute force-1000 done .
INFO:root:gramham scan-1000 done .
INFO:root:divide conquer-1000 done .
INFO:root:brute force-2000 done .
INFO:root:gramham scan-2000 done .
INFO:root:divide conquer-2000 done .
INFO:root:brute force-3000 done .
INFO:root:gramham scan-3000 done .
INFO:root:divide conquer-3000 done .
method-name          | pnt-nums=1000         | pnt-nums=2000         | pnt-nums=3000
brute-force          |                  1.34 |                  1.73 |                  3.35
graham scan          |                  0.01 |                  0.03 |                  0.05
divide conquer       |                  0.04 |                  0.09 |                  0.14
```

得到的凸包图示：



根据时间消耗绘制的性能曲线图：



注：上面点的坐标并没有标识（…使用 matplotlib 画的，似乎并不能直接绘制折线点的坐标），但控制台的输出给出了具体的时间消耗。

由上面的图可以得到如下结果：

1. 所有算法实现正确。根据算法找到的凸包点的确是凸包点。
2. Graham-Scan 时间耗时最少。分治次之，暴力太慢。

分析 1：为何分治比 Graham 慢？

尽管时间复杂度都是$O(n\ \log\ n)$，但是通过算法描述，的确可以知道，分治方法比较复杂，一些操作开销比较大。具体来说：

a. 每次划分数据集，要生成子集。在 Python 实现中，直接使用了生成式来完成。相当于又申请了内存。而内存申请与释放都是耗时的。

b. 递归操作。递归是耗时的，因为要保持当前的程序状态，涉及到大量程序现场的保存，弹栈出栈消耗大。

而 Graham 是没有上面的时间消耗的！

分析 2：暴力法似乎并不是$O(n^4)$的？

因为在循环操作中，对已经判断出的不是凸包的点，直接跳过了判断。首先，这对程序的正确性没有影响！因为不用依靠内点去消除内点——凸包点可以完成此任务。然而，它**大大**减少了迭代、计算次数。曾经测试过不加此跳过超过，其时间消耗难以忍受。

注：上述描述中未贴出关键代码，但是关键操作的逻辑都写出了。因为我觉得只要逻辑叙述正确，那么代码就不是必要的。其次，文字中均指出了关键代码的位置（精确到函数名），如果师兄、师姐需要查看代码，还请直接打开相应文件即可~ （主要是 Word 里贴代码，如果不调样式真是太难看了…）

四、 实验心得

1. 工程实现需要考虑大量细节

在上面的实验过程及结果中已经说明了大量的细节。比如需要判断三点是否共线、判断按中位数划分左右子集是否真的成功、Graham 初始栈中的三个元素需要一段精心的考虑等。而这些，在算法描述中都是忽略的。算法描述的是最关键算法的思想，严谨的伪代码可能会考虑到下标等，但是也绝不会精细的处理每一个细节。

所以，不真的把代码写出来，不能说真的了解了一个问题的实际解决方案。

2. 精妙的算法以及数学

使用 Graham-Scan 算法，就能够如此效果显著的降低时间复杂度，不得不叹服算法的强大。

而向量的叉乘，就能知道哪个向量的极角大、是否共线等，真是神奇。

3. 有 BUG 不能怪数据

因为使用的是整数点，所以写的过程中发现了大量的 BUG。在暴力法判断凸包时，发现结果竟然不对，当时内心是崩溃的…知道是共线问题，但是如果加判断，最简单的暴力也变得复杂了。当时把生成点的方法改成随机浮点，结果就正确了。后来还是觉得，墨菲定律需要引起重视——凡是可能出错的，必然会出错。其实也是幸运，能够快速找到引起错误的 Case。最难调的 Bug，不就是小概率时出现的 Bug 吗?既然是幸运的，那就老老实实改代码咯。