

2020春季NYU变分法笔记, Bulher教授

王海阳

2020年3月9日

摘要

此笔记记录了Oliver Bulher教授于2020年春季在纽约大学所授Honors IV课程的主要内容. 写此为方便记忆, 复习, 回顾.

所用的教科书为 Gelfand 与 Fomin 所写的 Calculus of Variations, 2000 Dover. 当然, 还引用了一些其它的资料.

致谢: 无

目录

1	基本知识	3
1.1	介绍	3
1.2	欧拉-拉格朗日方程	4
1.3	多变量情况, 这节不用看	4
1.4	参数化	4
1.5	高阶欧拉-拉格朗日方程	5
2	更进一步的条件与等式	6
2.1	不受限制的变分之表达	6
2.2	自然边界条件和横向条件	6
2.3	不光滑解:W-E条件	6
2.4	拉格朗日乘数法与限制条件	7
2.4.1	第一种限制条件:函子的等高线上	7
2.4.2	第二种限制条件:函数(又称有限限制条件)	7
3	典型与相关问题	8
3.1	基本介绍	8
3.2	E-L的典型形式	8
3.3	E-L的第一积分	8
3.4	Legendre变换,典型变化	8
3.5	Noether定理	8
3.6	最小动作原理	8
3.7	受恒量	8

目录	2
3.8 汉密尔顿-雅克布方程	8
3.9 费马原则	8

1 基本知识

1.1 介绍

例子：最短路径，最短时间，等周不等式,都可以写成形式：

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

这类函子都有局部化的性质：可以拆成多段的小积分，局部求极值。

要继续下去，需要给出函数空间上恰当的距离，上述函子中的 y 是恰当地属于 C^1 的。所以我们可以考虑距离： $|y| = \max |y| + \max |y'|$ 。并且假定我们所要找的解就在这个空间中。

除此之外，函子也得需要有连续性，即 $J : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ 是个连续函数。我们也需要线性函子的概念，见教科书第八页。

引理 1. 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x) h(x) dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0$.

那么 $\alpha \equiv 0$.

引理 2. 基本引理

- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x) h'(x) dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0$.

那么 $\alpha \equiv C$, 一个常数

- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x) h''(x) dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0$.

那么 $\alpha \equiv Cx + D$, 俩个常数

- 若 α, β 为连续函数，且 $\int_a^b \alpha(x) h(x) + \beta(x) h'(x) dx = 0$.

那么 β 可微，且 $\beta' = \alpha$.

现在开始考虑变分. 对于定义在有距离的线性函数空间上的 $J[y]$ 令

$$\Delta J[h] = J[y + h] - J[y].$$

若有线性函子 ϕ 和在零点处无穷小阶函子 ϵ 使得 $\Delta J[h] = \phi[h] + \epsilon|h|$, 那么称 ϕ 为 J 的变分, 记作 ∂J . 容易得知, 变分若存在必唯一.

定理 1. $J[y]$ 在 \hat{y} 处取极值的必要条件是

$$\partial J[h] = 0, \forall h$$

.

从物理的角度来说, 我们定义 $p = F_{y'}$, $H = -F + y'p$, 其意义分别为动量和能量(Hamiltonian算子)

1.2 欧拉-拉格朗日方程

在固定端点的变分问题里,令 F 连续可微,若 y 是满足上一定理条件的极值曲线. 很容易有:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

但这样做是相当于假定了极值曲线是平滑的.稍后会介绍处理不平滑曲线的方法

定理 2. *Bernstein* 微分方程解的存在性定理. 见16页

若函数 $F, F_y, F_{y'}$ 都在有限区域内连续, 且存在 $k > 0$ 和 $\alpha(x, y), \beta(x, y) \geq 0$ 满足 $F_y > k, |F| \leq \alpha y'^2 + \beta$

那么微分方程 $y'' = F(x, y, y')$ 在给定不同端点的条件下有唯一解

定理 3. E - L 方程的特殊情况汇总

- 若 F 不直接取决于 y , 那么 E - L 公式推出: $F_{y'} = C$.
- 若 F 不直接取决于 x , 那么 E - L 公式推出: $F - y' F_{y'} = C$.
- 若 F 不直接取决于 y' , 那么 E - L 公式推出: $F \equiv C$.

1.3 多变量情况, 这节不用看

引理 3. 基本引理若 $\alpha(x, y)$ 在区域 R 上连续且满足:

$$\int \int_R \alpha(x, y) h(x, y) dx dy \equiv 0, \forall h$$

h 在 R 上连续且 h 在 R 的边界 Γ 上为0. 那么 $\alpha = 0$.

$z = z(x, y)$.那么对于函子

$$J[z] = \int \int_R F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

有

$$\partial J = \int \int_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y}) h(x, y) dx dy$$

中间必须为零的那项是一个二阶PDE, 被称为欧拉等式. 可以用来解决:给定边界,求最小面积曲面.

1.4 参数化

把原有的方程改为

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}) \dot{x}(t) dt = \int \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

保留原方程性质的充要条件: \dot{x}, \dot{y} 有一阶positive homogeneous, 也就是说 $\Phi(x, y, \lambda \dot{x}, \lambda \dot{y}) = \lambda \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$.

值得注意的是(废话的),参数的选取不是本质的.

1.5 高阶欧拉-拉格朗日方程

取函子 $\int F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) dx$.

其E-L方程为: $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}$

2 更进一步的条件与等式

2.1 不受限制的变分之表达

为了解决端点可以移动的变分法问题, 首先需要给函数空间一个新的距离:

$$\rho(y, y^*) = \max |y - y^*| + \max |y' - y'^*| + \rho(P_0, P_0^*) + \rho(P_1, P_1^*)$$

其中 $P_0 = (x_0, y(x_0) = y_0)$, $P_1 = (x_1, y(x_1) = y_1)$, $P_0^* = (x_0 + \partial x_0, y_0 + \partial y_0)$, $P_1 = (x_1 + \partial x_1, y_1 + \partial y_1)$.

令 $h(x) = y^*(x) - y(x)$. 可以求得公式:

$$\partial J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + F_{y'} \partial y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + (F - F_{y'} y') \partial x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

也可以简写为 $\partial J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + p \partial y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} - H \partial x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$

2.2 自然边界条件和横向条件

在上一小节中, 若曲线 y 为极值曲线, 也就是说 $\partial J = 0$. 那么可以任意的选取 h . 特别地, 我们选取不移动端点的 h , 如此便可得到 E-L 等式是极值曲线的必要条件. 那么我们就可以略去公式中的积分项, 得到自然边界条件:

$$(p \partial y - H \partial x) \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0.$$

例子: 函数空间的每个函数的端点都落在两个给定曲线 ($y = \phi(x)$, $y = \psi(x)$) 上.

此时, 自然边界条件变成了:

$$F + (\phi' - y') p \Big|_{x=x_0} = 0, F + (\psi' - y') p \Big|_{x=x_1} = 0$$

上述条件被称为是横向条件(transversality). 注意到, 这两个等式是我们固定自然边界条件中的 P_0^* , P_1^* 中的一个, 再把两个端点处的 $\partial x, \partial y$ 用 ϕ', ψ' 联系起来所得到的.

2.3 不光滑解: W-E 条件

在固定端点的求函数极值的问题中, 如果我们把”解一定光滑的假设”变成”解一定逐段光滑”, 那么就可以获得弱极值曲线的必要条件(broken extremal).

简单的概括, 在不光滑点处, p, H , 动量与能量, 是需要连续的. 这被称为 *Weierstrass-Erdmann corner condition*.

假设我们所需解的解只在一个点不光滑, 那我们该如何解它呢?

- 找两个端点处满足 E-L 方程的两组起始于不同端点的两组曲线 $\{f_1\}, \{f_2\}$.
- 取两组曲线的交点
- 用 W-E 条件筛选出合格的交点
- 验证最小性.

2.4 拉格朗日乘数法与限制条件

2.4.1 第一种限制条件:函子的等高线上

例子: 等周不等式的解决. 等周不等式的极值可以写做在特定限制下(长度固定)时, 来极值化函子的解. 所以一般的, 可以表达为如下形式.

$$J[y] = \int F(x, y, y') dx$$

在条件 $y(a) = A, y(b) = B, K[y] = \int G(x, y, y') dx = l$ 下的极值.

定理 4. 若 y 是上述条件下的一个极值, 且 y 不是函子 K 的极值. 那么存在常数 λ 使得 y 是函子 $\int_a^b F + \lambda G dx$ 的极值.

也就是说, 满足以下微分方程:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \lambda (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) = 0$$

更一般的来说, 对于函子 $J[y_1, \dots, y_n]$ 和限制条件 $K_i[y] = l_i, i = 1, \dots, k$. 有微分方程系统:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (F + \sum_1^k \lambda_i G_i) - \frac{d}{dx} (\frac{\partial}{\partial y'_i} F + \sum_1^k \lambda_i G_i) = 0$$

2.4.2 第二种限制条件:函数(又称有限限制条件)

边界条件为: $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B, i = 1, \dots, n$ 和 $g_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0, j = 1, \dots, k < n$. 被归类为有限限制条件, 可以看出, 限制条件相当于是给出了一个 $n - k$ 维的流形. 而我们也被限制在这个流形上考虑极值问题.

先从简单的 $n = 2, k = 1$ 的情况开始.

定理 5. 给定 $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$, 且 (x, y, z) 在曲面 $g(x, y, z) = 0$ 上, 且 g_y, g_z 不同时在曲面上消失. 且极值曲线 $y(x), z(x)$ 存在.

那么存在函数 $\lambda(x)$ 使得 $y(x), z(x)$ 是 $\int_a^b F + \lambda(x) g dx$ 的极值曲线. 也就是满足微分方程:

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

这类条件说是有限, 实际却是无限.

3 典型与相关问题

3.1 基本介绍

典型, 也就是把做变量代换 $(x, y, y') \rightarrow (x, y, p = F_{y'})$ 是个非常有用的工具, 它可以把我们的EL条件化成形式较好的一阶微分方程, 更有其妙用无穷.

上述变量代换允许进行的条件为: $\det \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$, 或者更美好的条件是上述矩阵正定. 这样就有了原来的凸性.

3.2 E-L的典型形式

3.3 E-L的第一积分

3.4 Legendre变换, 典型变化

3.5 Noether定理

3.6 最小动作原理

3.7 守恒量

3.8 汉密尔顿-雅克布方程

3.9 费马原则