2020 春季 NYU 变分法笔记, Bulher 教授

王海阳

2020 年 3 月 9 日

摘要

此笔记记录了 Oliver Bulher 教授于 2020 年春季在纽约大学所授 Honors IV 课程的主要内容. 写此为方便记忆, 复习, 回顾.

所用的教科书为 Gelfand 与 Fomin 所写的 Calculus of Variations, 2000 Dover. 当然, 还引用了一些其它的资料.

致谢: 无

目录

1 基本知识

1.1 介绍

例子：最短路径，最短时间，等周不等式, 都可以写成形式：

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

这类函子都有局部化的性质：可以拆成多段的小积分，局部求极值。

要继续下去，需要给出函数空间上恰当的距离，上述函子中的 y 是恰当地属于 C^1 的。所以我们可以考虑距离：$|y| = \max|y| + \max|y'|$。并且假定我们所要找的解就在这个空间中。

除此之外，函子也得需要有连续性，即 $J : C^1([a, b]) \to \mathbb{R}$ 是个连续函数。我们也需要线性函子的概念，见教科书第八页。

引理 1. 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x)h(x)dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0.$
那么 $\alpha \equiv 0.$

引理 2. 基本引理

- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x)h'(x)dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0.$
  那么 $\alpha \equiv C$, 一个常数
- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b \alpha(x)h''(x)dx = 0, \forall h \in C^1, h(a) = h(b) = 0.$
  那么 $\alpha \equiv Cx + D$, 俩个常数
- 若 α, β 为连续函数，且 $\int_a^b \alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x)dx = 0.$
  那么 β 可微，且 $\beta' = \alpha.$

现在开始考虑变分. 对于定义在有距离的线性函数空间上的 $J[y]$ 令

$$\Delta J[h] = J[y + h] - J[y].$$

若有线性函子 ϕ 和在零点处无穷小阶函子 ϵ 使得 $\Delta J[h] = \phi[h] + \epsilon|h|$, 那么称 ϕ 为 J 的变分, 记作 ∂J. 容易得知, 变分若存在必唯一.

定理 1. $J[y]$ 在 $\hat{y}$ 处取极值的必要条件是

$$\partial J[h] = 0, \forall h$$

.

从物理的角度来说, 我们定义 $p = F_{y'}, H = -F + y'p$, 其意义分别为动量和能量 (Hamiltonian 算子)

1.2 欧拉-拉格朗日方程

在固定端点的变分问题里, 令 F 连续可微, 若 y 是满足上一定理条件的极值曲线. 很容易有:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

但这样做是相当于假定了极值曲线是平滑的. 稍后会介绍处理不平滑曲线的方法

定理 2. *Bernstein 微分方程解的存在性定理. 见 16 页*

若函数 $F, F_y, F_{y'}$ 都在有限区域内连续, 且存在 $k > 0$ 和 $\alpha(x,y), \beta(x,y) \geq 0$ 满足 $F_y > k, |F| \leq \alpha y'^2 + \beta$

那么微分方程 $y'' = F(x,y,y')$ 在给定不同端点的条件下有唯一解

定理 3. *E-L 方程的特殊情况汇总*

- *若 F 不直接取决于 y, 那么 E-L 公式推出: $F_{y'} = C$.*
- *若 F 不直接取决于 x, 那么 E-L 公式推出: $F - y'F_{y'} = C$.*
- *若 F 不直接取决于 y', 那么 E-L 公式推出: $F \equiv C$.*

1.3 多变量情况, 这节不用看

.

引理 3. *基本引理若 $\alpha(x,y)$ 在区域 R 上连续且满足:*

$$\int\int_R \alpha(x,y)h(x,y)dxdy \equiv 0, \forall h$$

h 在 R 上连续且 h 在 R 的边界 Γ 上为 0. 那么 $\alpha = 0$.

$z = z(x,y)$. 那么对于函子

$$J[z] = \int\int_R F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

.

有

$$\partial J = \int\int_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})h(x,y)dxdy$$

. 中间必须为零的那项是一个二阶 PDE, 被称为欧拉等式. 可以用来解决: 给定边界, 求最小面积曲面.

1.4 参数化

把原有的方程改为

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)})\dot{x}(t)dt = \int \Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$$

保留原方程性质的充要条件: $\dot{x}, \dot{y}$ 有一阶 positive homogeneous, 也就是说 $\Phi(x,y,\lambda\dot{x},\lambda\dot{y}) = \lambda\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$.

值得注意的是 (废话的), 参数的选取不是本质的.

1.5 高阶欧拉-拉格朗日方程

取函子 $\int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)dx$.
其 E-L 方程为: $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}$

2 更进一步的条件与等式

2.1 不受限制的变分之表达

为了解决端点可以移动的变分法问题, 首先需要给函数空间一个新的距离:

$$\rho(y,y^*)=\max|y-y^*|+\max|y'-y^*|+\rho(P_0,P_0^*)+\rho(P_1,P_1^*)$$

其中 $P_0=(x_0,y(x_0)=y_0),P_1=(x_1,y(x_1)=y_1),P_0^*=(x_0+\partial x_0,y_0+\partial y_0),P_1=(x_1+\partial x_1,y_1+\partial y_1)$.

令 $h(x)=y^*(x)-y(x)$. 可以求得公式:

$$\partial J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx+F_{y'}\partial y|_{x=x_0}^{x=x_1}+(F-F_{y'}y')\partial x|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

也可以简写为 $\partial J=\int_{x_0}^{x_1}(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})h(x)dx+p\partial y|_{x=x_0}^{x=x_1}-H\partial x|_{x=x_0}^{x=x_1}$

2.2 自然边界条件和横向条件

在上一小节中, 若曲线 y 为极值曲线, 也就是说 $\partial J=0$. 那么可以任意的选取 h. 特别地, 我们选取不移动端点的 h, 如此便可知得到 E-L 等式是极值曲线的必要条件. 那么我们就可以略去公式中的积分项, 得到自然边界条件:

$$(p\partial y-H\partial x)|_{x=x_0}^{x=x_1}=0.$$

例子: 函数空间的每个函数的端点都落在俩个给定曲线 $(y=\phi(x),y=\psi(x))$ 上.

此时, 自然边界条件变成了:

$$F+(\phi'-y')p|_{x=x_0}=0,F+(\psi'-y')p|_{x=x_1}=0$$

上述条件被称为是横向条件 (transversality). 注意到, 这两个等式是我们固定自然边界条件中的 P_0*,P_1* 中的一个, 再把两个端点处的 $\partial x,\partial y$ 用 ϕ',ψ' 联系起来所得到的.

2.3 不光滑解:W-E 条件

在固定端点的求函子极值的问题中, 如果我们把" 解一定光滑的假设" 变成" 解一定逐段光滑", 那么就可以获得弱极值曲线的必要条件 (broken extremal).

简单的概括, 在不光滑点处, p,H, 动量与能量, 是需要连续的. 这被称为 *Weierstrass-Erdmann corner condition.*

假设我们所需求的解只在一个点不光滑, 那我们该如何解它呢?

- 找俩个端点处满足 E-L 方程的两组起始于不同端点的俩组曲线 $\{f_1\},\{f_2\}$.
- 取两组曲线的交点
- 用 W-E 条件筛选出合格的交点
- 验证最小性.

2.4 拉格朗日乘数法与限制条件

2.4.1 第一种限制条件: 函子的等高线上

例子: 等周不等式的解决. 等周不等式的极值可以写做在特定限制下 (长度固定) 时, 来极值化函子的解. 所以一般的, 可以表达为如下形式.

$$J[y] = \int F(x, y, y')dx$$

在条件 $y(a) = A, y(b) = B, K[y] = \int G(x, y, y')dx = l$ 下的极值.

定理 4. *若 y 是上述条件下的一个极值, 且 y 不是函子 K 的极值. 那么存在常数 λ 使得 y 是函子 $\int_a^b F + \lambda G dx$ 的极值.*

也就是说, 满足以下微分方程:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}) = 0$$

更一般的来说, 对于函子 $J[y_1, \ldots, y_n]$ 和限制条件 $K_i[y] = l_i, i = 1, \ldots, k$. 有微分方程系统:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(F + \sum_1^k \lambda_i G_i) - \frac{d}{dx}(\frac{\partial}{\partial y_i'}F + \sum_1^k \lambda_i G_i) = 0$$

2.4.2 第二种限制条件: 函数 (又称有限限制条件)

.

边界条件为: $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B, i = 1, \ldots, n$ 和 $g_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, j = 1, \ldots, k < n$. 被归类为有限限制条件, 可以看出, 限制条件相当于是给出了一个 $n - k$ 维的流形. 而我们也被限制在这个流形上考虑极值问题.

先从简单的 $n = 2, k = 1$ 的情况开始.

定理 5. *给定 $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z.y', z')dx$, 且 (x, y, z) 在曲面 $g(x, y, z) = 0$ 上, 且 g_y, g_z 不同时在曲面上消失. 且极值曲线 $y(x), z(x)$ 存在.*

那么存在函数 $\lambda(x)$ 使得 $y(x), z(x)$ 是 $\int_a^b F + \lambda(x) g dx$ 的极值曲线. 也就是满足微分方程:

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$$

这类条件说是有限, 实际却是无限.

3 典型与相关问题

3.1 基本介绍

典型, 也就是把做变量代换 $(x, y, y') \to (x, y, p = F_{y'})$ 是个非常有用的工具, 它可以把我们的 EL 条件化成形式较好的一阶微分方程, 更有其妙用无穷. 同时, 我们还有转换 $F \to H$.

$$H = -F + y'p$$

上述变量代换允许进行的条件为: $\det \frac{\partial(p_1,\ldots,p_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0$, 或者更美好的条件是上述矩阵正定. 这样就有了原来的凸性.

而转换后的 EL 方程有如下形式:

$$\begin{aligned}
&dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum y_i' dp_i \\
&\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\
&\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \\
&\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i' \\
&\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial y_i}.
\end{aligned} \tag{1}$$

只有最后一行是 EL 等式, 前几行只是推导过程.

3.2 E-L 的第一积分

若 F 不直接与 x 相关, 那么有上一个式子, 我们知道 H 也和 x 不直接相关.

$$\frac{dH}{dx} = \sum \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dp_i}{dx} = \sum \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} = 0$$

所以 H 在每个满足 EL 方程的 y 上是常数, 如果我们假设所有物理系统里的运动都要服从 EL 方程, 那么我们可以把 H 称作物理系统的第一积分, 也可以称作 EL 等式的第一积分.

对于任意一个第一积分 $\Phi(y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n)$, 我们可以探索它的充要条件:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{p_i}{dx} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial p + i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} = [\Phi, H] \tag{2}$$

最后这个括号叫泊松括号, 由此我们可知第一积分的充要条件是 $[\Phi, H]$ 在轨迹上处处为零.

3.3 Legendre 变换, 典型变化

由勒让德变换, 我们可以由另一种方式来获取 EL 方程的典型式. ... 有点懒得介绍啊. 总而言之, 这是个 involution, 也就是变换俩次等于不变换.

例子. $f(\epsilon) = \frac{\epsilon^a}{a}, a > 1$ 可以被 involution 为 $H(p) = \frac{p^b}{b}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

定理 6. *基本定理对于下凸函数 $f(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ 和其勒让德变换 $H(p_1, \cdots, p_n)$, 有:*

- $f(\epsilon) = \max_p[-H(p) + \epsilon p]$
- $H(p) = \max_\epsilon -f(\epsilon) + \epsilon p$
- *(Young's 不等式)*$f(\epsilon) + H(p) \geq \epsilon p$
- $\alpha f(\epsilon) \to \alpha H(p/\alpha)$.
- $f(\alpha) \to H(p/\alpha)$
- 叠加是个什么状态我忘了.
- $f(\epsilon - a) = H(p) + pa$

有了勒让德变换的基本性质后, 我们能开始构造 EL 公式的典型了. 选取新的函子:

$$J[y] = \int_a^b -H(x, y, p) + py' dx.$$

就可以得到 EL 函数的典范型:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dy}{dx}$$

3.4 典型变换

普通 EL 方程的不变算子有着形式:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), u_x v_y - u_y v_x \neq 0$$

. 那么典型变换 (不改变 EL 典型方程的算子) 有哪些呢?

若 $Y_i = Y_i(x, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n), P_i = P_i(x, y, p)$. 那么有新的函子:

$$J^*[Y_1, \cdots, Y_n, P_1, \cdots, P_n] = \int \sum P_i Y_i' - H^* dx.$$

引理 4. *若两个函子有相同的极值曲线, 那他俩间差一个全导数.*

由此, 知道了充要条件: $\sum p_i dy_i - H dx = \sum P_i dY_i - H^* dx + d\Phi(x, y, p)$. 翻译以下, 就是:

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial Y_i}, \quad H^* = H + \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

这个语境下, Φ 被称为生成函数. 生成函数还可以写成: $\Psi = \Phi + \sum P_i Y_i$. 这样就有了对偶

$$p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad H^* = H + \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

3.5 Noether 定理

典型变换是一个空间里的对称, 而诺特定理完美的描述了这类对称能给我们带来什么样的结果: 各类守恒定理. 最简单的情况就是在 F 与 x 无关时的第一积分 H. 而更一般的情况如下.

考虑变换 $y(x) \to y^*(x^*)$:

$$x^* = \Phi(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = \Phi(x, y, y'), \quad y_i^* = \Psi_i(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = \Psi_i(x, y, y')$$

我们称这个函子 $J[y]$ 在上述变换下不变当且仅当

$$\int_{x_0^*}^{x_1^*} F(x^*, y^*, \frac{y^*}{x^*})dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \frac{dy}{dx})dx.$$

若我们有一组由实数 index 的连续不变变换 $\Phi^\epsilon, \Psi^\epsilon$, 且 $\Phi^0(x, y, y') = x, \Psi_i^0(x, y, y') = y_i$, 就有:

定理 7. *(Noether)*

$$\sum F[y_i']\psi_i + (F - \sum y_i' F_{y_i'})\phi = const$$

这里的 $\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}$, $\quad \phi = \frac{\partial |Phi}{\partial \epsilon}$

这个定理的特殊情况就是我们之前说的 H 在不直接取决与 x 时, H 是个第一积分.

3.6 最小动作原理

把一个有 n 个粒子的物理系统的动能定义为: $T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$.

再假设我们有动能: $U = U(t, x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)$. 那么各个例子在各个方向上的力可以被定义为: $X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \cdots$.

如此, 我们就可以引入拉格朗日算子 (动作):

$$L = T - U.$$

在一个固定的时刻 t_0, 系统是固定的状态. 而此后系统以 $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ 的方式演变, 那么有:

定理 8. *principal of least action*

$(x(t), y(t), z(t))$ 是函子 $J[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ 的极值曲线.

最小运动原理的有限制条件 (在一个曲面上运动) 时一样成立, 而且常常只能局部成立.

3.7 守恒量

接上一小节, 我们有典型变量: $p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$ 和对 y, z 相同的等式. 由此有:

$$H = -L + \sum p_{ix}\dot{x}_i = U - T + \sum m_i \dot{x}_i^2 = U + T.$$

得到了以下:

定理 9. 守恒定理

- 能量守恒:

  如果给定系统守恒, 也就是说拉格朗日函数和时间无关, 那么能量守恒

- 动量守恒

  如果 *action* 函子在变换: $(x, y, z) \to (x + \epsilon, y, z)$ 下保持不变, 那么 $x-$ 动量: $P_x = \sum p_{ix}$ 守恒. 同理可以获得对 P_y, P_z 的类似公式. 所有的动量都守恒被称为动量守恒. 这里的变换可以看成平移变换

- 角动量守恒

  如果 action 函子在变换: $(x_i, y_i, z_i) \to (x_i\cos(\epsilon) + y_i\sin(\epsilon), -x_i\sin(\epsilon) + y_i\cos(\epsilon), z_I)$ 下保持不变. 那么绕 z 轴的角动量:$\sum p_{ix}y_i - p_{iy}x_i$ 守恒. 更一般的, 所有角动量守恒可以写作: $\sum p_i \times r_i$ 守恒. 这里的变换可以看成旋转变换.

3.8 汉密尔顿-雅克布方程

对在一个曲面 S 所有经过 A, B 两点的曲线 $y(x) = (y_1, \cdots, y_n)$, 和一个给定的函子 $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$. 若有极值曲线 y^*, 那么 $S = J[y^*]$ 被称为测地线距离, y^* 被称为测地线. 显而易见的 $S = S(A, B)$.

例子. 费马原则指出, 光速沿着时间最短的路程前进, 那么 $F = \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{v}$.

给定 Lagrangian L, 两点间的测地线, 可以得出: $dS = \partial J$. 由此又可以得出:

$$dS = \partial J = \sum p_i dy_i - Hdx$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial y_n}) = 0.$$

这就是哈密顿-雅克布方程, 它是一个 PDE. EL 典型方程是上述方程的特征系统 (? 这是什么鬼??)

定理 10. *给定上述方程的一组解 (取决于参数 α) $S = S(x, y_1, \cdots, y_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_m), m \le n$, 那么每个微分 $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ 都是欧拉典型方程的第一积分.*

定理 11. *给出上述方程的完整积分 (一般解)S, 并假设矩阵 $|\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial y_k}|$ 的行列式不为零. 取任意的常数 $\beta_i, i = 1, \cdots, n$.*

那么由关系:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} S(x, y, \alpha) = \beta_i$$

所决定的函数 y_i. 与函数 $p_i = \frac{\partial}{\partial y_i} S$.

给出了典型方程

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$$

的一般解.

不知道上面这玩意该怎么解释啊? 把问题转化成了一个几何问题? 还是说什么啊?

3.9 费马原则

在一个对时间对称的物理系统里, 我们有比最小动作原理更特殊且更美妙的原则: 费马原则. 它提供了将一个选取从点 A 到点 B 真正路径 (不依赖于时间) 的问题, 变成在黎曼曲面上找测地线的问题.

给定一个时间对称的 $L(q, \dot{q})$ 和相对应的 H, 考虑在极值曲线上的变分, 满足:

- 从极值曲线 q^* 到极值曲线 $q^* + \delta q$
- H 在俩个极值曲线上都是常数.
- 第二条路径会和第一条路径同时离开 A 点, 但可能会在不同的时间 $t_B + \delta t_B$ 到达 B.

- 函子是 S

这类变分被称为同能变分.

有 $\delta S^* = -H_B \delta t_B = -E\delta t_B$.

现在可以把重写 S 为

$$S[q] = \int_{t_A}^{t_B} (\sum p_i \dot{q}_i - H)dt = S_0[q] - \int_{t_A}^{t_B} H dt.$$

$S_0[q] = \int_{t_A}^{t_B} (\sum p_i \dot{q}_i)dt$ 被称为是截断动作. $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

上面俩点加起来, 可以获得截断动作 ∂S_0 在现实路径上的同能变分为零. 这就是最基础的费马原理.

要想应用费马原理, 我们要在截断动作中实现时间对称. 有时或许可以利用 E 的值来消灭掉时间, 有时又不行.

例子, 当有类似这样的式子时:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\sum_{ik} \alpha_{ik}(q) dq_i dq_k}{dt^2} + V(q) = E$$

可以翻译成:

$$\sqrt{\sum_{ik} \alpha_{ik}(q) dq_i dq_k} = \sqrt{2(E - V(q))} dt.$$

就可以使得我们的式子写成不涉及时间的形式:

$$S_0[q] = \int \sqrt{2(E - V(q))} \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}(q) dq_i dq_k}.$$

相当于有黎曼测度:

$$ds^2 = 2(E - V(q)) \sum_{ik} a_{ik}(q) dq_i dq_k$$

一个内积的形式.

这个应该是和哈密顿雅可比等式有着一定的关联, 但是上节课我没听懂, 因为上上节课我没听.