2020 春季 NYU 变分法笔记, Bulher 教授

王海阳

2020 年 3 月 6 日

摘要

此笔记记录了 Oliver Bulher 教授于 2020 年春季在纽约大学所授 Honors IV 课程的主要内容. 写此为方便记忆, 复习, 回顾.

所用的教科书为 Gelfand 与 Fomin 所写的 Calculus of Variations, 2000 Dover. 当然, 还引用了一些其它的资料.

致谢: 无

目录

1 基本知识 **3**

1.1 介绍 . . . 3

1.2 欧拉-拉格朗日方程 . . . 4

1.3 多变量情况, 这节不用看 . . . 4

1.4 参数化 . . . 4

1.5 高阶欧拉-拉格朗日方程 . . . 5

2 更进一步的条件与等式 **6**

2.1 不受限制的变分之表达 . . . 6

2.2 自然边界条件和横向条件 . . . 6

2.3 不光滑解:W-E 条件 . . . 6

2.4 拉格朗日乘数法与限制条件 . . . 7

2.4.1 第一种限制条件: 函子的等高线上 . . . 7

2.4.2 第二种限制条件: 函数 (又称有限限制条件) . . . 7

3 典型与相关问题 **8**

3.1 基本介绍 . . . 8

3.2 E-L 的典型形式 . . . 8

3.3 E-L 的第一积分 . . . 8

3.4 Legendre 变换, 典型变化 . . . 8

3.5 Noether 定理 . . . 8

3.6 最小动作原理 . . . 8

3.7 受恒量 . . . 8

3.8 汉密尔顿-雅克布方程 8
3.9 费马原则 8

1 基本知识

1.1 介绍

例子：最短路径，最短时间，等周不等式, 都可以写成形式：

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

这类函子都有局部化的性质：可以拆成多段的小积分，局部求极值。

要继续下去，需要给出函数空间上恰当的距离，上述函子中的 y 是恰当地属于 C^1 的。所以我们可以考虑距离：$|y|=\max|y|+\max|y'|$。并且假定我们所要找的解就在这个空间中。

除此之外，函子也得需要有连续性，即 $J:C^1([a,b])\to\mathbb{R}$ 是个连续函数。我们也需要线性函子的概念，见教科书第八页。

引理 1. 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b\alpha(x)h(x)dx=0,\forall h\in C^1,h(a)=h(b)=0.$

那么 $\alpha\equiv 0.$

引理 2. 基本引理

- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b\alpha(x)h'(x)dx=0,\forall h\in C^1,h(a)=h(b)=0.$

  那么 $\alpha\equiv C$, 一个常数

- 若 $\alpha(x)$ 连续，且 $\int_a^b\alpha(x)h''(x)dx=0,\forall h\in C^1,h(a)=h(b)=0.$

  那么 $\alpha\equiv Cx+D$, 俩个常数

- 若 α,β 为连续函数，且 $\int_a^b\alpha(x)h(x)+\beta(x)h'(x)dx=0.$

  那么 β 可微，且 $\beta'=\alpha.$

现在开始考虑变分. 对于定义在有距离的线性函数空间上的 $J[y]$ 令

$$\Delta J[h]=J[y+h]-J[y].$$

若有线性函子 ϕ 和在零点处无穷小阶函子 ϵ 使得 $\Delta J[h]=\phi[h]+\epsilon|h|$, 那么称 ϕ 为 J 的变分, 记作 ∂J. 容易得知, 变分若存在必唯一.

定理 1. $J[y]$ 在 $\hat{y}$ 处取极值的必要条件是

$$\partial J[h]=0,\forall h$$

.

从物理的角度来说, 我们定义 $p=F_{y'},H=-F+y'p$, 其意义分别为动量和能量 (Hamiltonian 算子)

1.2 欧拉-拉格朗日方程

在固定端点的变分问题里, 令 F 连续可微, 若 y 是满足上一定理条件的极值曲线. 很容易有:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

但这样做是相当于假定了极值曲线是平滑的. 稍后会介绍处理不平滑曲线的方法

定理 2. *Bernstein 微分方程解的存在性定理. 见 16 页*

若函数 $F, F_y, F_{y'}$ 都在有限区域内连续, 且存在 $k > 0$ 和 $\alpha(x,y), \beta(x,y) \geq 0$ 满足 $F_y > k, |F| \leq \alpha y'^2 + \beta$

那么微分方程 $y'' = F(x,y,y')$ 在给定不同端点的条件下有唯一解

定理 3. *E-L 方程的特殊情况汇总*

- *若 F 不直接取决于 y, 那么 E-L 公式推出: $F_{y'} = C$.*
- *若 F 不直接取决于 x, 那么 E-L 公式推出: $F - y'F_{y'} = C$.*
- *若 F 不直接取决于 y', 那么 E-L 公式推出: $F \equiv C$.*

1.3 多变量情况, 这节不用看

.

引理 3. *基本引理若 $\alpha(x,y)$ 在区域 R 上连续且满足:*

$$\int\int_R \alpha(x,y)h(x,y)dxdy \equiv 0, \forall h$$

h 在 R 上连续且 h 在 R 的边界 Γ 上为 0. 那么 $\alpha = 0$.

$z = z(x,y)$. 那么对于函子

$$J[z] = \int\int_R F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

.

有

$$\partial J = \int\int_R (F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y})h(x,y)dxdy$$

. 中间必须为零的那项是一个二阶 PDE, 被称为欧拉等式. 可以用来解决: 给定边界, 求最小面积曲面.

1.4 参数化

把原有的方程改为

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)})\dot{x}(t)dt = \int \Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$$

保留原方程性质的充要条件:$\dot{x}, \dot{y}$ 有一阶 positive homogeneous, 也就是说 $\Phi(x,y,\lambda\dot{x},\lambda\dot{y}) = \lambda\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$.

值得注意的是 (废话的), 参数的选取不是本质的.

1.5 高阶欧拉-拉格朗日方程

取函子 $\int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)dx$.

其 E-L 方程为: $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}$

2 更进一步的条件与等式

2.1 不受限制的变分之表达

为了解决端点可以移动的变分法问题, 首先需要给函数空间一个新的距离:

$$\rho(y, y^*) = \max|y - y^*| + \max|y' - y^*| + \rho(P_0, P_0^*) + \rho(P_1, P_1^*)$$

其中 $P_0 = (x_0, y(x_0) = y_0), P_1 = (x_1, y(x_1) = y_1), P_0^* = (x_0 + \partial x_0, y_0 + \partial y_0), P_1 = (x_1 + \partial x_1, y_1 + \partial y_1)$.

令 $h(x) = y^*(x) - y(x)$. 可以求得公式:

$$\partial J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + F_{y'} \partial y|_{x=x_0}^{x=x_1} + (F - F_{y'} y') \partial x|_{x=x_0}^{x=x_1}$$

也可以简写为 $\partial J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h(x) dx + p \partial y|_{x=x_0}^{x=x_1} - H \partial x|_{x=x_0}^{x=x_1}$

2.2 自然边界条件和横向条件

在上一小节中, 若曲线 y 为极值曲线, 也就是说 $\partial J = 0$. 那么可以任意的选取 h. 特别地, 我们选取不移动端点的 h, 如此便可知得到 E-L 等式是极值曲线的必要条件. 那么我们就可以略去公式中的积分项, 得到自然边界条件:

$$(p \partial y - H \partial x)|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0.$$

例子: 函数空间的每个函数的端点都落在俩个给定曲线 $(y = \phi(x), y = \psi(x))$ 上.

此时, 自然边界条件变成了:

$$F + (\phi' - y')p|_{x=x_0} = 0, F + (\psi' - y')p|_{x=x_1} = 0$$

上述条件被称为是横向条件 (transversality). 注意到, 这两个等式是我们固定自然边界条件中的 P_0*, P_1* 中的一个, 再把两个端点处的 $\partial x, \partial y$ 用 ϕ', ψ' 联系起来所得到的.

2.3 不光滑解:W-E 条件

在固定端点的求函子极值的问题中, 如果我们把" 解一定光滑的假设" 变成" 解一定逐段光滑", 那么就可以获得弱极值曲线的必要条件 (broken extremal).

简单的概括, 在不光滑点处, p, H, 动量与能量, 是需要连续的. 这被称为 *Weierstrass-Erdmann corner condition*.

假设我们所需求的解只在一个点不光滑, 那我们该如何解它呢?

- 找俩个端点处满足 E-L 方程的两组起始于不同端点的俩组曲线 $\{f_1\}, \{f_2\}$.
- 取两组曲线的交点
- 用 W-E 条件筛选出合格的交点
- 验证最小性.

2.4 拉格朗日乘数法与限制条件

2.4.1 第一种限制条件: 函子的等高线上

例子: 等周不等式的解决. 等周不等式的极值可以写做在特定限制下 (长度固定) 时, 来极值化函子的解. 所以一般的, 可以表达为如下形式.

$$J[y] = \int F(x, y, y')dx$$

在条件 $y(a) = A, y(b) = B, K[y] = \int G(x, y, y')dx = l$ 下的极值.

定理 4. *若 y 是上述条件下的一个极值, 且 y 不是函子 K 的极值. 那么存在常数 λ 使得 y 是函子 $\int_a^b F + \lambda G dx$ 的极值.*

也就是说, 满足以下微分方程:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda(G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}) = 0$$

更一般的来说, 对于函子 $J[y_1, \ldots, y_n]$ 和限制条件 $K_i[y] = l_i, i = 1, \ldots, k$. 有微分方程系统:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(F + \sum_1^k \lambda_i G_i) - \frac{d}{dx}(\frac{\partial}{\partial y_i'}F + \sum_1^k \lambda_i G_i) = 0$$

2.4.2 第二种限制条件: 函数 (又称有限限制条件)

.

边界条件为: $y_i(a) = A_i, y_i(b) = B, i = 1, \ldots, n$ 和 $g_j(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, j = 1, \ldots, k < n$. 被归类为有限限制条件, 可以看出, 限制条件相当于是给出了一个 $n - k$ 维的流形. 而我们也被限制在这个流形上考虑极值问题.

先从简单的 $n = 2, k = 1$ 的情况开始.

定理 5. *给定 $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z.y', z')dx$, 且 (x, y, z) 在曲面 $g(x, y, z) = 0$ 上, 且 g_y, g_z 不同时在曲面上消失. 且极值曲线 $y(x), z(x)$ 存在.*

那么存在函数 $\lambda(x)$ 使得 $y(x), z(x)$ 是 $\int_a^b F + \lambda(x)g dx$ 的极值曲线. 也就是满足微分方程:

$$F_y + \lambda g_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_z + \lambda g_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$$

这类条件说是有限, 实际却是无限.

3 典型与相关问题

3.1 基本介绍

典型, 也就是把做变量代换 $(x, y, y') \to (x, y, p = F_{y'})$ 是个非常有用的工具, 它可以把我们的 EL 条件化成形式较好的一阶微分方程, 更有其它妙用无穷.

上述变量代换允许进行的条件为: $\det \frac{\partial(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$, 或者更美好的条件是上述矩阵正定.

3.2 E-L 的典型形式

3.3 E-L 的第一积分

3.4 Legendre 变换, 典型变化

3.5 Noether 定理

3.6 最小动作原理

3.7 受恒量

3.8 汉密尔顿-雅克布方程

3.9 费马原则