绝密★启用前

2023 − 2024 年河南工业大学期末考试

概率论与数理统计

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。请认真核对监考员在答上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。

I. 填空题,本大题共 6 个小题,每小题 2 分,满分 12 分

1. 设 A、B 为随机事件, $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(B|A) = 0.8$, 则 $P(A \cup B)$ = ________
2. 已知随机变量 X 的密度为 $f(x) = \begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$, 且 $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = \frac{5}{8}$, 则 a = ________, b = ________
3. 已知 $X \sim N(-2, 0.4^2)$, 则 $E(X+3)^2$ = ________
4. 设 $X \sim N(10, 0.6), Y \sim N(1, 2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $D(3X - Y)$ = ________
5. 设 $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, ...)$, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 ________
6. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的样本, 令 $Y = (X_1 + X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2$, 则当 C = ________ 时 $CY \sim \chi^2(2)$.

II. 单项选择题,本大题共 6 个小题, 每小题 2 分,满分 12 分)

7. 设 A, B 为两随机事件, 且 $B \subset A$, 则下列式子正确的是

   A. $P(A+B) = P(A)$ B. $P(AB) = P(A)$
   C. $P(B|A) = P(B)$ D. $P(B-A) = P(B) - P(A)$

8. 某人连续向一目标射击, 每次命中目标的概率为 $\frac{3}{4}$, 他连续射击直到命中为止, 则射击次数为 3 的概率是

   A. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ B. $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$ D. $C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$

9. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立, 且它们分别在区间 $[-1, 3]$ 和 $[2, 4]$ 上服从均匀分布, 则 $E(XY)$ =

   A. 3 B. 6 C. 10 D. 12

10. 设总体 $X \sim N(\mu, 2^2)$, 其中 μ 未知, $X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自总体的样本, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本方差为 s^2, 则下列各式中不是统计量的是

    A. $2\overline{X}$ B. $\frac{s^2}{\sigma^2}$ C. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ D. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

11. 若 $X \sim t(n)$, 那么 X^2 服从

A. $F(1,n)$　　B. $F(n,1)$　　C. $\chi^2(n)$　　D. $t(n^2)$

12. 设 $X_1,...,X_n,X_{n+1}...,X_{n+m}$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本, 则统计量 $y=\frac{m\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$ 服从的分布是

A. $F(m,n)$　　B. $F(n-1,m-1)$　　C. $F(n,m)$　　D. $F(m-1,n-1)$

III. 判断题,正确的请在题号前的括号内打 ✓, 错误的打 ×, 本大题共 5 个小题,每小题 2 分,满分 10 分

(　) 13. 若事件 A、B、C 两两独立, 必有 A、B、C 相互独立.

(　) 14. 若 X 的取值比较集中, 则方差 $D(X)$ 较小.

(　) 15. 若 X 服从参数 $\lambda=3$ 的泊松分布, 则 $E(X)=3, D(X)=3$.

(　) 16. 若 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, 则 X 和 Y 一定独立.

(　) 17. 已知 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体的样本, 则 $\frac{1}{3}\overline{X}+a\overline{X_i}+5$ 是统计量.

IV. 计算题,本大题共 6 个小题,每题 6 分,满分 36 分

18. 设一盒中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球, 现从中任取 3 个球, 用 X 表示被抽取的 3 个球的中间号码数, 求 X 的分布律.

19. 有两箱同种类的零件, 第一箱装了 50 只, 其中有 10 只一等品; 第二箱装了 30 只, 其中有 18 只一等品; 今从两箱中任挑出一箱, 然后从该箱中依次不放回地取出 2 个零件出来, 每次取一个. 求: (1) 第一次取到的是一等品的概率; (2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下, 求该零件来自于第一箱的概率.

20. 在一公共汽车站有四个人分别在等四路公交车, 设每人等车的时间(单位: 分钟) 都服从 $[0,5]$ 上的均匀分布, 求四个人中至少有两人等车时间超过 2 分钟的概率.

21. 已知离散型随机变量 (X,Y) 联合概率分布如 Table 1: (8 分)

$X\|Y$	1	2	3
1	$p_{11}=\frac{1}{8}$	$p_{12}=0$	$p_{13}=\frac{1}{4}$
2	$p_{21}=\frac{1}{2}$	$p_{22}=\frac{1}{8}$	$p_{23}=0$

Table 1: 联合概率分布表

求: (1) $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$; (2) $Cov(X,Y)$; (3) ρ_{XY}.

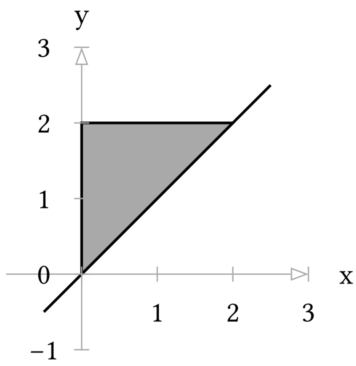
22. 随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2y}, 0<x<y\\0, \quad \text{其它}\end{cases}$

(1) 求常数 k;

(2) 求 X 和 Y 的边缘密度函数; X 与 Y 是否独立?

(3) 求在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

23. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<2,-1<y<2\}$ 上服从均匀分布. 求 $P\{Y\geq X\}$. (如图)



V. 应用题,本大题共 4 个小题,每小题 6 分,满分 24 分

24. 已知新生婴儿中生男孩的概率为 0.515. 用中心极限定理近似计算在 10000 个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率.
(备查数据: $\Phi(1) = 0.8413$; $\Phi(2) = 0.9772$; $\Phi(3) = 0.9987$)

25. 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$\theta(2\theta-1)$	$3\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

Table 2: 总体 X 的概率分布

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数; 又设 $X_1, ..., X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求: (1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$; (2) 对抽得的一组样本值 $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$, 求 θ 的矩估计值.

26. 设总体 $X \sim N(1, 0.5^2)$, $X_1, ..., X_{10}$ 是总体 X 的简单随机样本, 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 1)^2 \geq 4\right\}$. (备查数据: $\chi^2_{0.10}(10) = 15.987$, $t_{0.1}(9) = 1.383$)

27. 已知某地幼儿的身高 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从该地一幼儿园随机抽查了 9 名幼儿, 测得这 9 名幼儿的平均身高为 $115cm$. 已知该幼儿园的幼儿身高的标准差 $\sigma = 9cm$. 求总体均值 μ 的置信度为 95% 的单侧置信上限.
(备查数据: $t_{0.025}(8) = 2.306$; $t_{0.05}(8) = 1.8595$; $\Phi(1.645) = 0.95$; $\Phi(1.96) = 0.975$)

VI. 证明题

28. 设总体 $X \sim N(0,1)$, $X_1, ..., X_n (n>1)$ 为简单随机样本, 证明: 统计量 $Y = \dfrac{\sqrt{n-1}X_i}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + ... + X_n^2}}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布.