

2.b.1

$$S_I (n \times n), S_I = Q^{-\frac{1}{2}} R^T R Q^{-\frac{1}{2}}$$

cos 相似度定義：對兩向量  $a, b$   $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$

$\Rightarrow$  求項目-項目為  $R$  的一個列向量

$\therefore S_{jk}$  代表項目  $j$  和項目  $k$  的 cos 相似度

$$S_{jk} = \frac{(R^T R)_{jk}}{\|R_{:,j}\| \cdot \|R_{:,k}\|} \quad (a = R_{:,j}, b = R_{:,k})$$

$\Rightarrow Q$  為對角矩陣

$$Q_{jj} = \|R_{:,j}\|^2 = \sum_{i=1}^n R_{ij}^2$$

$$\|R_{:,j}\| = \sqrt{Q_{jj}}, \quad Q_{jj}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{Q_{jj}}}$$

$$\Rightarrow S_{jk} = \frac{(R^T R)_{jk}}{\sqrt{Q_{jj}} \cdot \sqrt{Q_{kk}}} \Rightarrow S_I = Q^{-\frac{1}{2}} R^T R Q^{-\frac{1}{2}}$$

2.b.2

由 2.b.1 可知  $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$

$$\Rightarrow S_U(i, j) = \frac{R_{i,:} \cdot R_{j,:}}{\|R_{i,:}\| \cdot \|R_{j,:}\|} = \frac{\sum_k R_{ik} \cdot R_{jk}}{\sqrt{\sum_k R_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_k R_{jk}^2}}$$

$$P_{ii} = \|R_{i,:}\|^2 = \sum_{j=1}^n R_{ij}^2$$

$$\therefore S_U(i, j) = \frac{(R R^T)_{ij}}{\sqrt{P_{ii}} \cdot \sqrt{P_{jj}}} \Rightarrow S_U = P^{-\frac{1}{2}} R R^T P^{-\frac{1}{2}}$$

2. c

推薦分數計算:  $r_{u,s} = \sum_{x \in \text{users}} \cos(u, x) \times R_{x,s}$  (使用者)

由 2. b 證明可知  $\Rightarrow \cos(u, x) = S_U(u, x)$

$\therefore$  單一元素  $r_{u,s} = \sum_{x=1}^m S_U(u, x) \cdot R(x, s)$   
 意思是要預測  $u$  對  $s$  的分數是其他  $x$  人對  $s$  的評分 ( $R(x, s)$ )  
 然後依據使用者  $x$  們對  $u$  的相似度進行平均

$$\Rightarrow r_U = S_U \cdot R = (P^{-\frac{1}{2}} R R^T P^{-\frac{1}{2}}) R = R \underbrace{P^{-\frac{1}{2}} R R^T P^{-\frac{1}{2}}}_{\text{由 2. b. 2 得}}$$

同樣的

$$r_I = S_I R = (Q^{-\frac{1}{2}} R R^T Q^{-\frac{1}{2}}) R = R \underbrace{Q^{-\frac{1}{2}} R R^T Q^{-\frac{1}{2}}}_{\text{由 2. b. 1 得}}$$

3. a

(1) 對  $q_i$  的梯度

$$E = \sum_{i(u, w) \in \text{rating}} (R_{iu} - q_i \cdot p_u^T)^2 + \lambda \left( \sum_u \|p_u\|^2 + \sum_i \|q_i\|^2 \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = \sum_{u(i, w) \in \text{rating}} (-2 (R_{iu} - q_i \cdot p_u^T) p_u + 2 \lambda q_i)$$

(2) 對  $p_u$  的梯度

$$\frac{\partial E}{\partial p_u} = \sum_{i(i, w) \in \text{rating}} (-2 (R_{iu} - q_i \cdot p_u^T) q_i + 2 \lambda p_u)$$

(3) ↖ i, u 評分誤差

設誤差  $e_{iu} = R_{iu} - q_i \cdot p_u^T$

更新公式:  $p_u \leftarrow p_u + \eta (e_{iu} \cdot q_i - \lambda p_u)$  ↖ 正則化係數

$$q_i \leftarrow q_i + \eta (e_{iu} \cdot p_u - \lambda q_i)$$

↖ learning rate

q\_i, p\_u: P, Q 矩陣的列, ex: q\_i 為 Q 的第 i 列