Julia 集的分析和探索

王麟

浙江大学

2022 年 7 月 4 日

目录

Julia 集合是以法国数学家加斯顿 · 朱莉娅（Gaston Julia）的名字命名的，他在 1915 年研究了这些集合的性质，并在 1918 年发表了著名的论文《理性基金上的 Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles》。虽然 Julia 集现在与二次多项式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 相关联，但 Julia 对更一般表达式的迭代性质感兴趣，即

$$z^4 + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^2}{z^3 + 4z^2 + 5} + c$$

Julia 集可以有各种形状，CCA 中的一个小变化可以极大地改变 Julia 集。1979 年，在计算机的帮助下，B.B.Mandelbrot 研究了 Julia 集，试图对所有可能的形状进行分类，并提出了一种新的形状：Mandelbrot 集。
在过去我们讨论了 Mandelbrot 集递归式, 这是二次递归方程 $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$（c 是一个固定的复数）的特例。如今我们尝试使用类似 Mandelbrot 集的递归式进一步分析探索更普遍化的 Julia 集。

Mandelbrot 集合是一个复数 c 的集合，c 由 $z_0 = 0$ 开始迭代而得到, 得到的值可以组成一个数列，当该数列发散到无穷时，对应的点就属于 Mandelbrot 集合。Mandelbrot 集合是分形中最经典例子。如 $c = 0$ 时，显然数列永远是 0，并不发散，因此 $c = 0$ 不属于 Mandelbrot 集合。又如 $c = 3i$ 时，对应的数列为 $3i, -9+3i, 63-51i, 1431-6477j3i, -9+3i, 63-51i, 1431-6477j3i, -9+3i, 63-51i, 1431-6477j....$，数字越来越庞大，因此 3i 就属于 Mandelbrot 集合。Julia 集是一种在复平面上非发散点形成的分形点的集合。体现出了复变函数的分形之美。虽然映入眼帘的结果图看起来有点奇异，却同时又有一种奇特的美。这幅图实际上是复变函数迭代形成的 Julia 集的图像。

具体思路为：设置迭代次数收敛半径，次数和常数，设置一个复数点集为初始点集，带入公式计算，找出不发散的点，记录这些点的位置矩阵，重复 2、3 步骤 n 次，画出矩阵，即 Julia 集的图像。设置迭代次数收敛半径，次数和常数，设置一个复数点集为初始点集，带入公式计算，找出不发散的点，记录这些点的位置矩阵，重复 2、3 步骤 n 次，画出矩阵，即 Julia 集的图像。

这是本次实验的流程图

1