Julia 集的分析和探索

王麟
数学与应用数学 3210104213

2022 年 7 月 4 日

摘要

二次递归方程 $z_{n+1} = {z_n}^2 + c$ 对每个固定的复数 c, 都确定了一个 Julia set。如果 z_{n+1} 不能发散到无穷，则称初始的 z_0 为属于该固定 c 的 Julia set。

1 引言

Julia 集合是以法国数学家加斯顿 · 朱莉娅（Gaston Julia）的名字命名的，他在 1915 年研究了这些集合的性质，并在 1918 年发表了著名的论文《理性基金上的 Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles》。虽然 Julia 集现在与二次多项式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 相关联，但 Julia 对更一般表达式的迭代性质感兴趣，即

$$z^4 + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^2}{z^3+4z^2+5} + c$$

Julia 集可以有各种形状，CCA 中的一个小变化可以极大地改变 Julia 集。1979 年，在计算机的帮助下，B.B.Mandelbrot 研究了 Julia 集，试图对所有可能的形状进行分类，并提出了一种新的形状：Mandelbrot 集。[1]

在过去我们讨论了 Mandelbrot 集递归式, 这是二次递归方程 $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$（c 是一个固定的复数）的特例。如今我们尝试使用类似 Mandelbrot 集的递归式进一步分析探索更普遍化的 Julia 集。

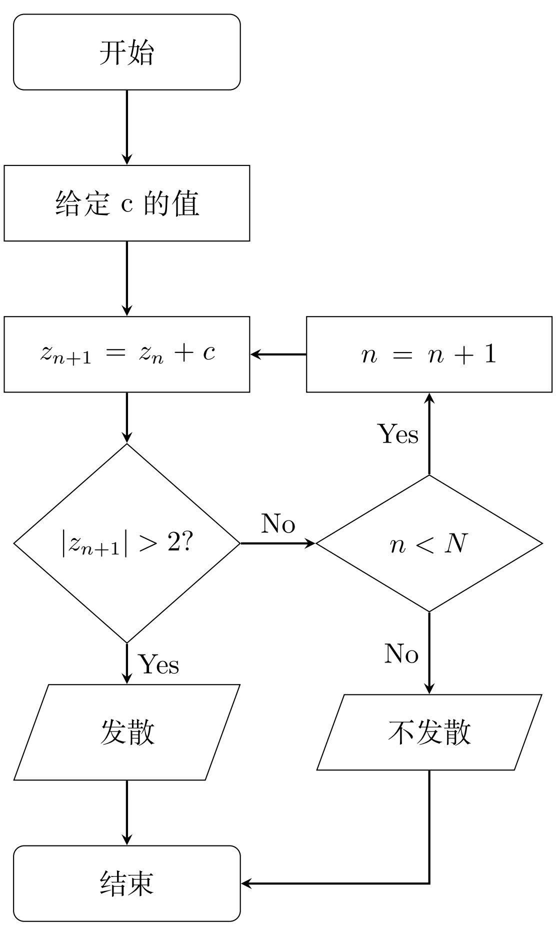
2 数学理论

我们把通过叠代方程 $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ 得到的有界元的所有 z_0 的集合称为 Julia 集。事实上，范围内每个 c 都有一个不同的 Julia 集。[2]

与我们对 Mandelbrot 集所做的类似，对于一个固定的 c 我们得到了一个复数序列 z_n n=0,1,2，$\cdots\cdots$

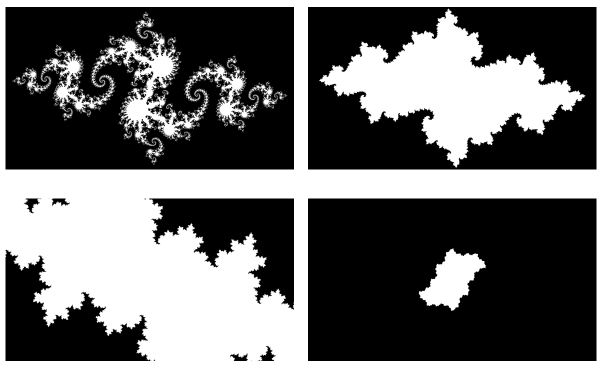
如果轨道 z_n 未能逃逸到无穷大，则初始 z_0 属于 Julia 集。其中要求 $2 \geq |z_n|$.

3 算法及与流程图



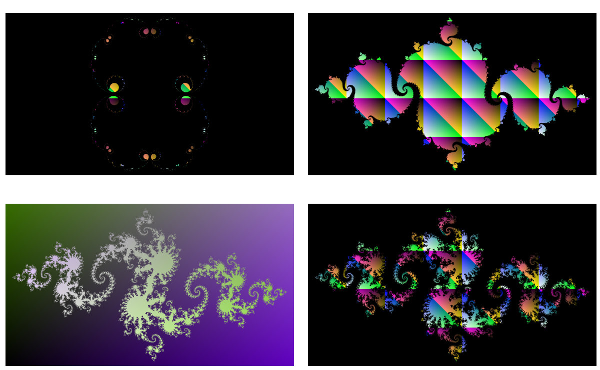
具体思路为：设置迭代次数与收敛半径、次数和常数 c，设置一个复数点集为初始点集，代入递推公式计算，找出不发散的点，记录这些点的复数域平面直角坐标阵，重复叠代步骤至到达递退上限或者发散，画出坐标，即 Julia 集的图像。

4 数值算例与分析



以上四幅图分别通过改变 dimension 改变图片缩放大小与 c 的初值改变图片形状而生成，而将叠代上限 N 不断扩大后生成的图片会愈发精细，局部细节也将产生重复。

我们尝试将图片赋予色彩



由上可见，根据叠代次数分类将边界的外部或者内部填充色彩后，其展现出了渐变色彩，这说明原本属于同一类边界内部的图像也可以进一步分

类，值得注意的是，我们尝试把所有的色彩填充至内部后，所有的位图颜色均能显现。这与 Manderbrot 展现出来的效果基本一致。

5 总结

由于 Mandelbrot 集的定义，Mandelbrot 集在给定点的几何与相应 Julia 集的结构之间存在密切的对应关系。换句话说，Mandelbrot 集形成了 Julia 集的一种索引。Julia 集要么连通，要么断开，这由 c 的值确定。

从 Mandelbrot 集内部选择的连接，而从 Mandelbrot 集外部选择的连接断开。断开连接的集合通常被称为分形，无论以何种分辨率查看，它们由单个点组成。[3]

Julia 集作为 Mandelbrot 集的充分化，其展现的连续性远不如 Mandelbrot 集明显，而将 Mandelbrot 集合的每一部分放大后都能找出与 Julia 集相似的部分，这是因为他们源于相同的叠代方式，虽然最终展现的点不同，但是其背后隐藏的分形学结构，值得我们进一步探讨 [4]

参考文献

[1] Juan Carlos Ponce Campuzano 2019-2022. The julia set. https://complex-analysis.com/content/julia_set.html.

[2] Artin. Julia 集 | 复变函数的分形之美. https://zhuanlan.zhihu.com/p/359051218.

[3] Eason. 神奇的分形艺术: Mandelbrot 集和 julia 集. https://blog.csdn.net/article/details/89739231.

[4] Cornell University. Julia sets and the mandelbrot set. https://e.math.cornell.edu/people/belk/NotesJuliaMandelbrot.pdf.