逻辑教育
Logic education

Hello 视觉全训班

OpenGL
OpenGL ES
GPUImage
Metal

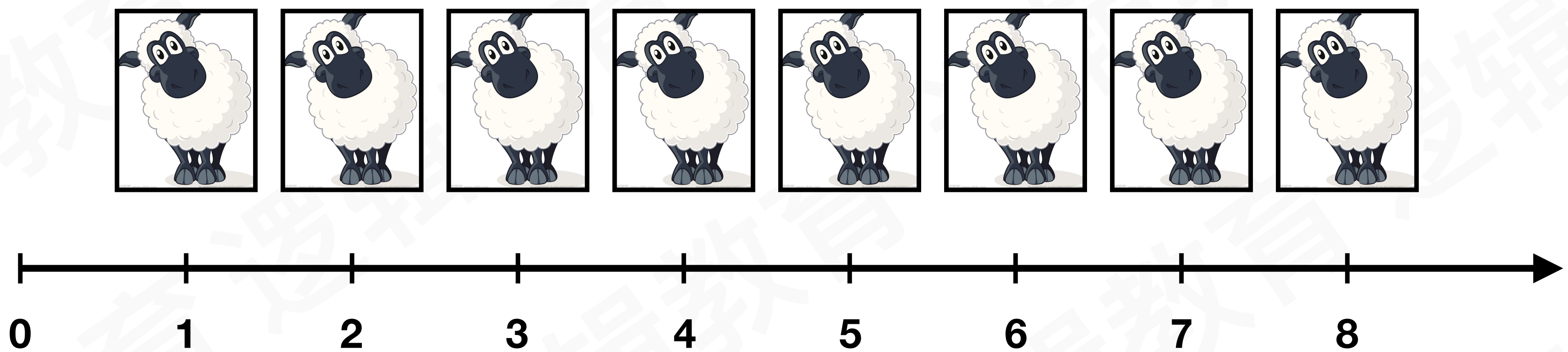
视觉全训班.3D数学从坐标到向量

@ CC老师

全力以赴．非同凡"想"

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

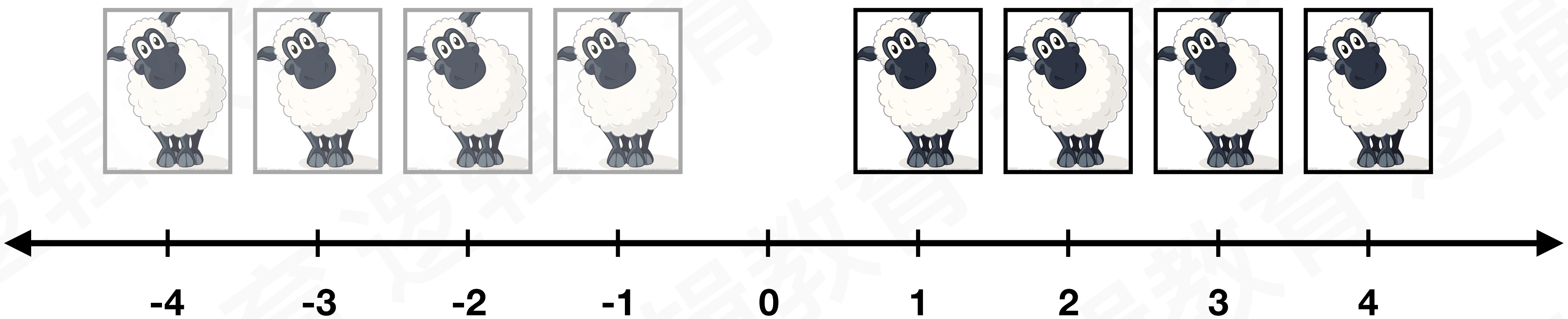
一头羊



自然数数轴

正数羊

负数羊

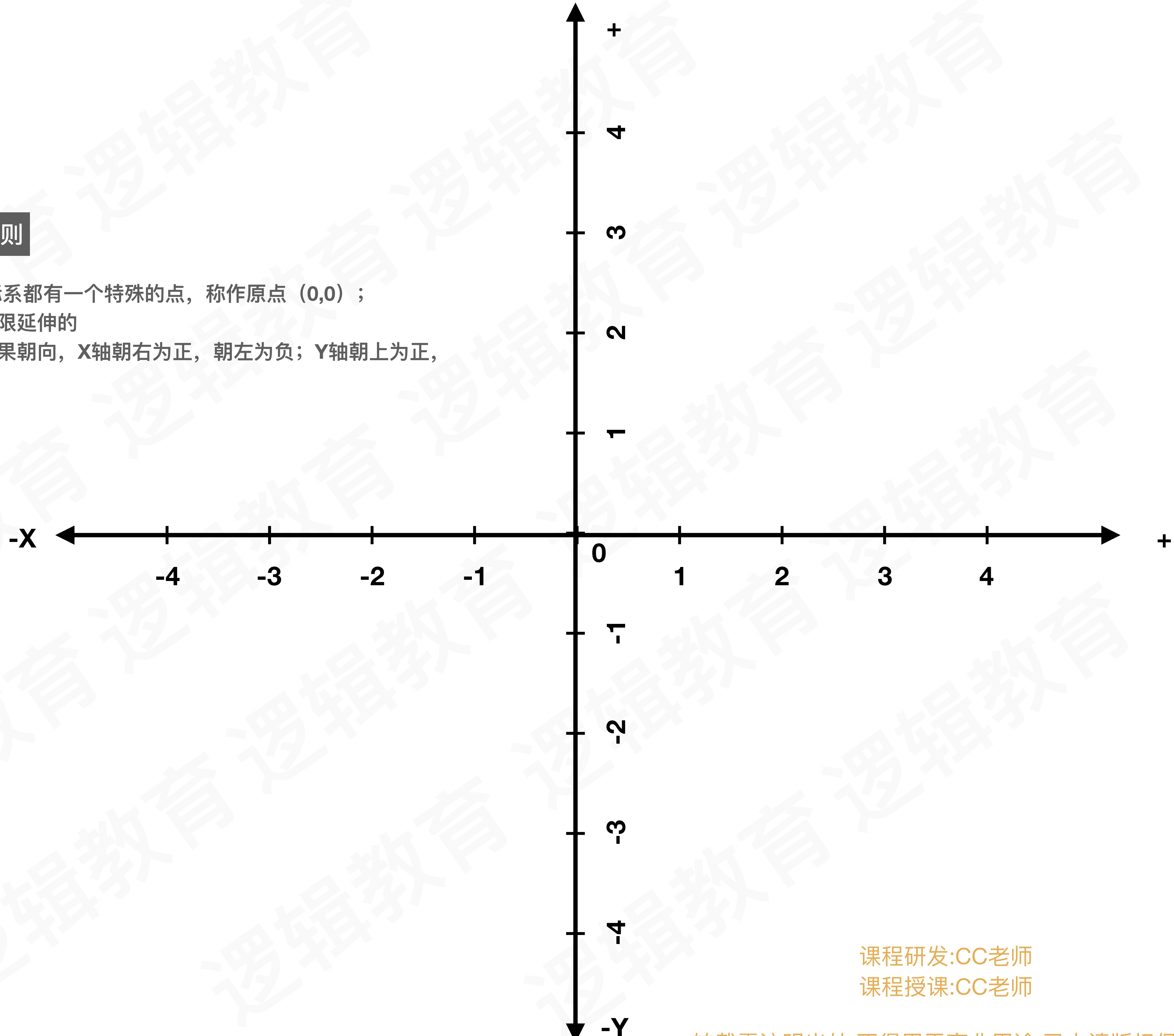


整数数轴（灰色羊表示负数）

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

2D笛卡尔坐标系原则

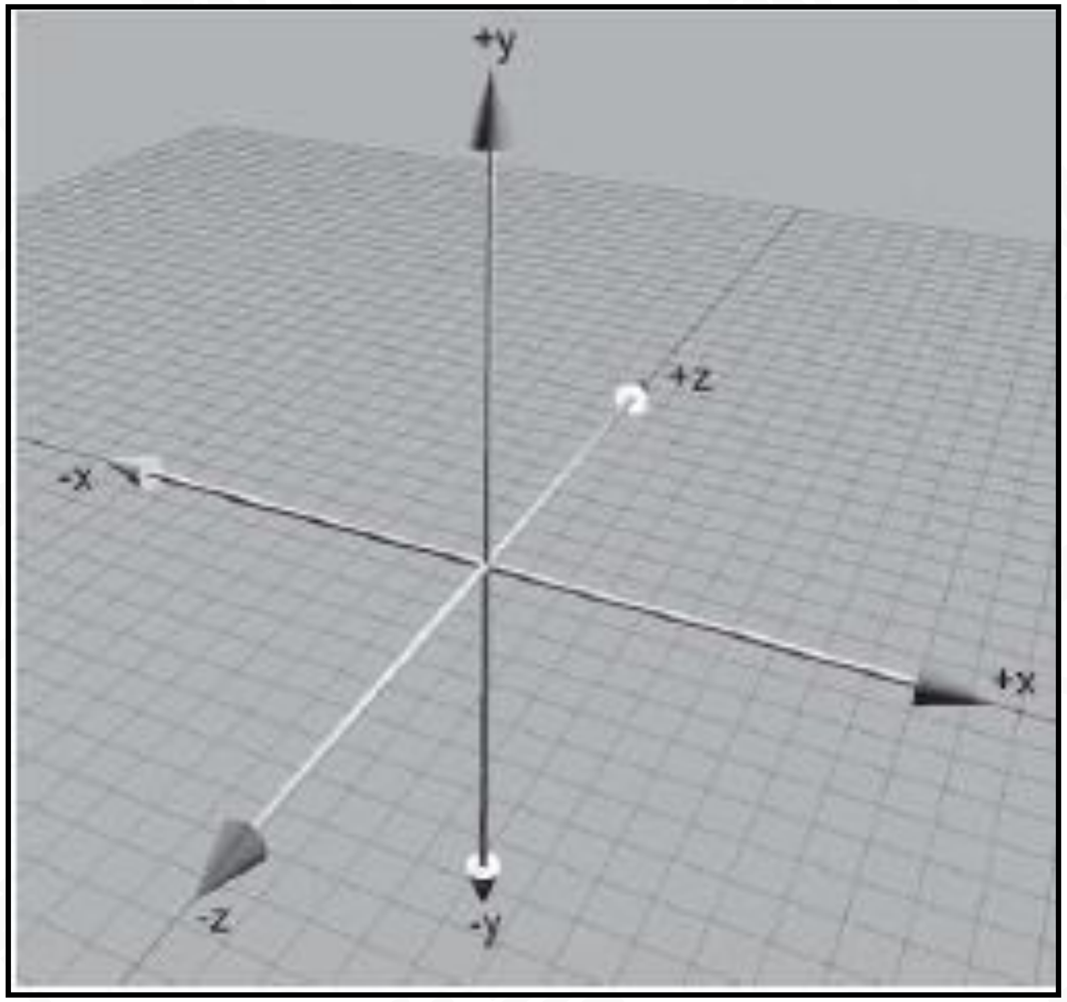
1、每个2D迪卡尔坐标系都有一个特殊的点，称作原点（0,0）；
2、笛卡尔坐标轴是无限延伸的
3、无论笛卡尔坐标如果朝向，X轴朝右为正，朝左为负；Y轴朝上为正，朝下为负



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

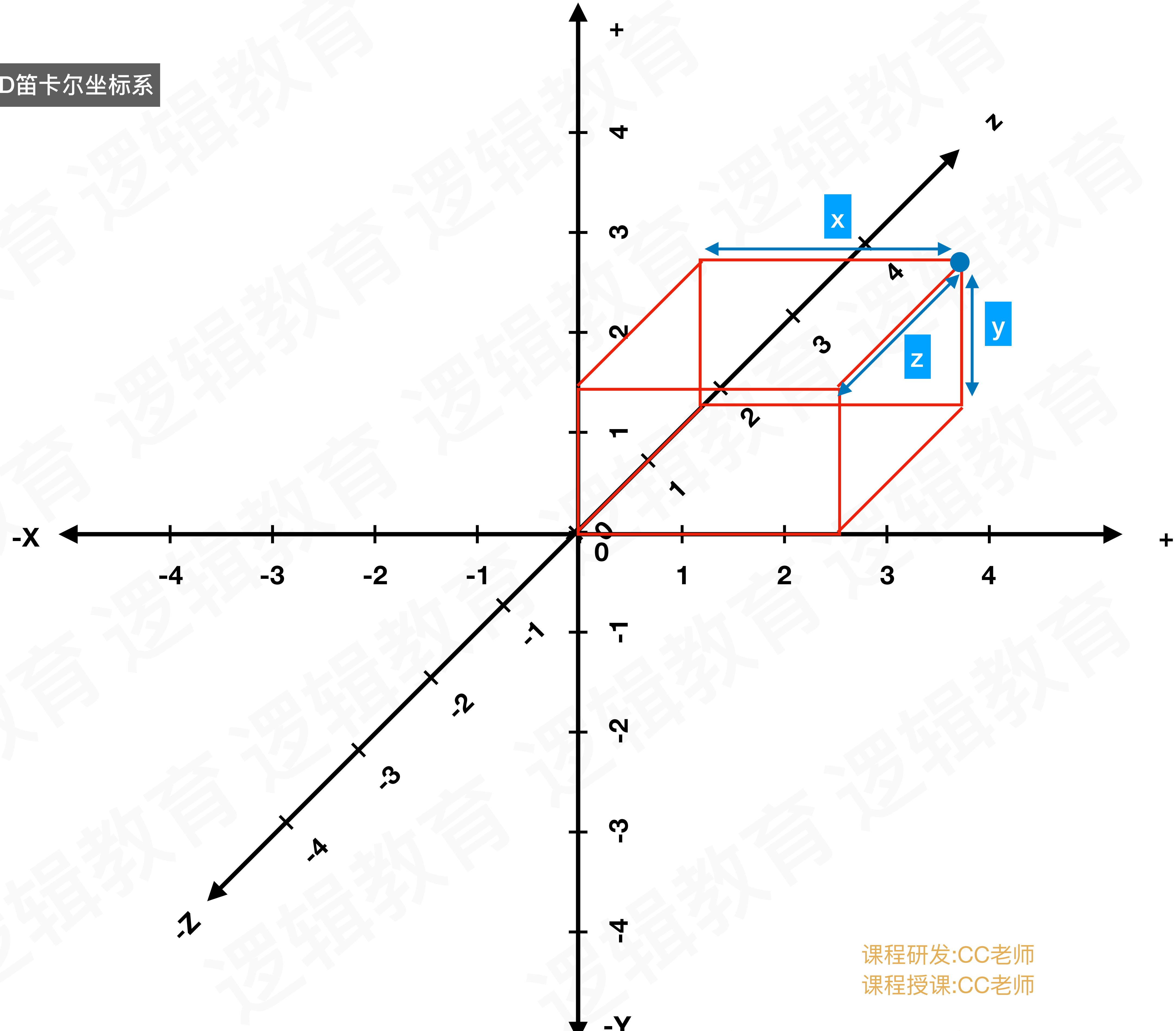
3D笛卡尔坐标系



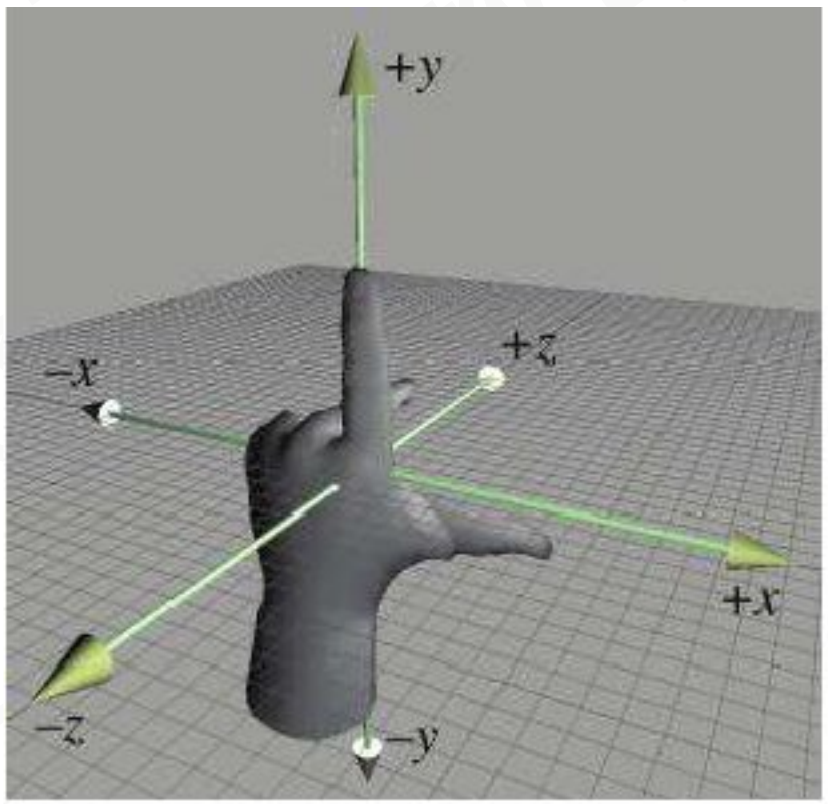
课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

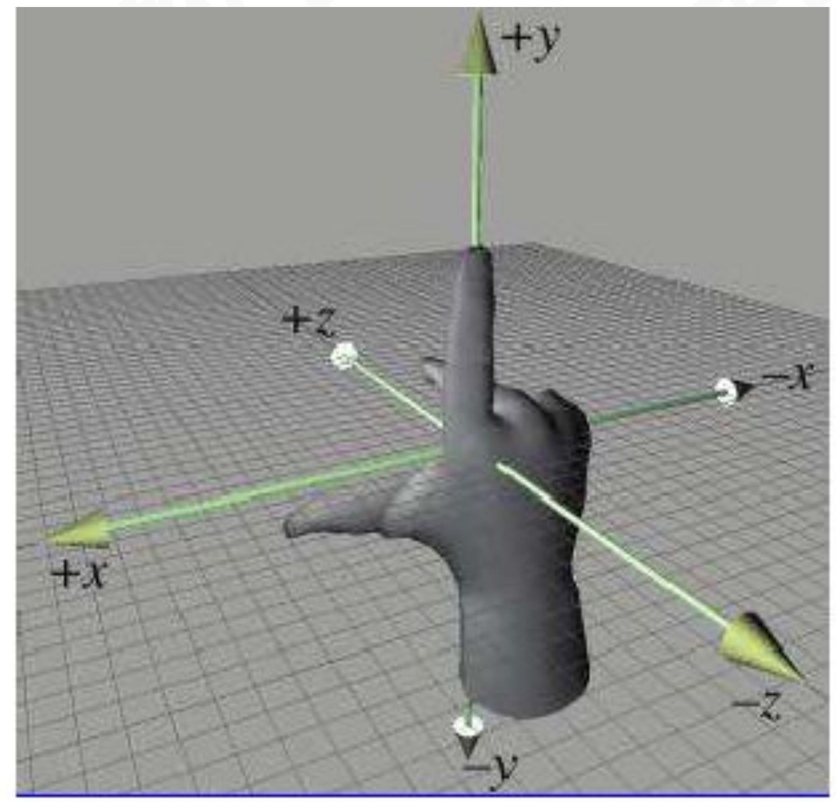
3D笛卡尔坐标系



左手坐标系 与 右手坐标系

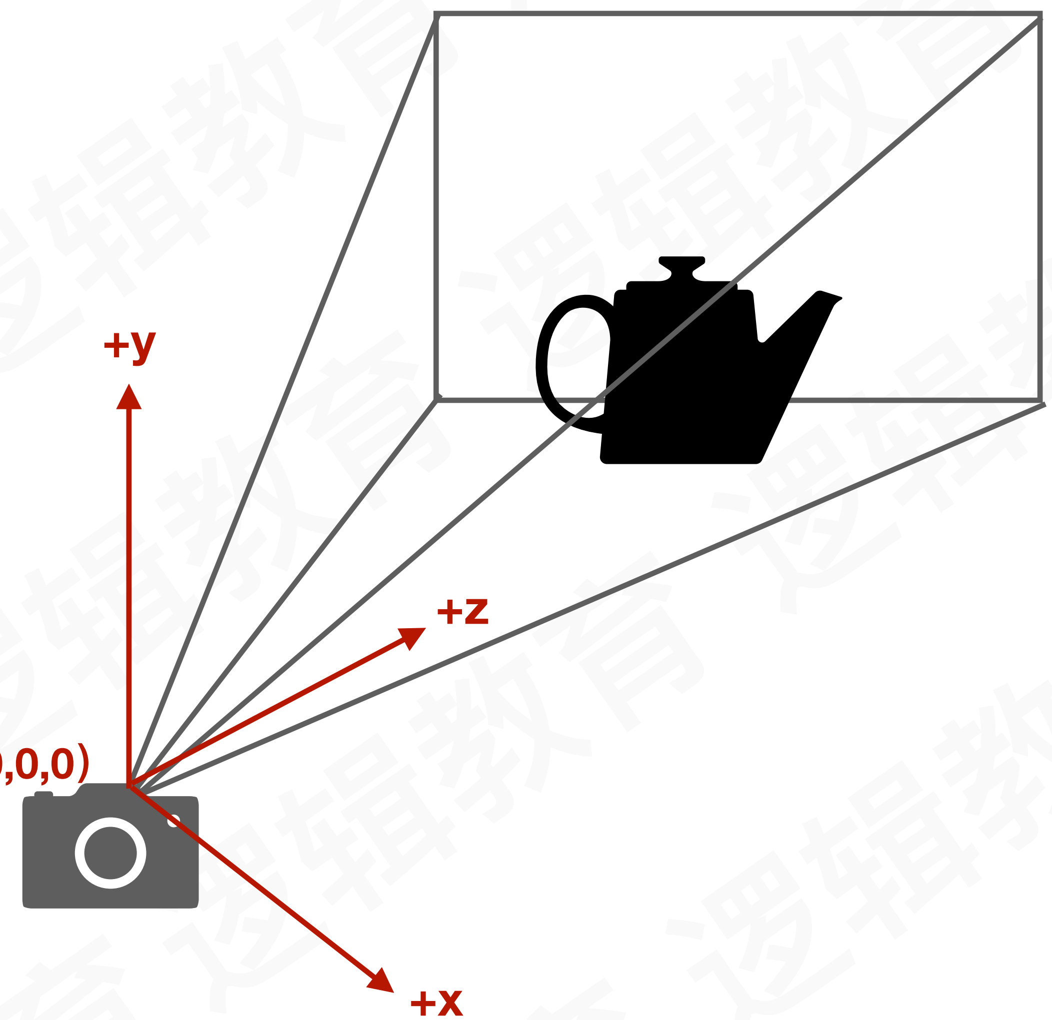


左手坐标系



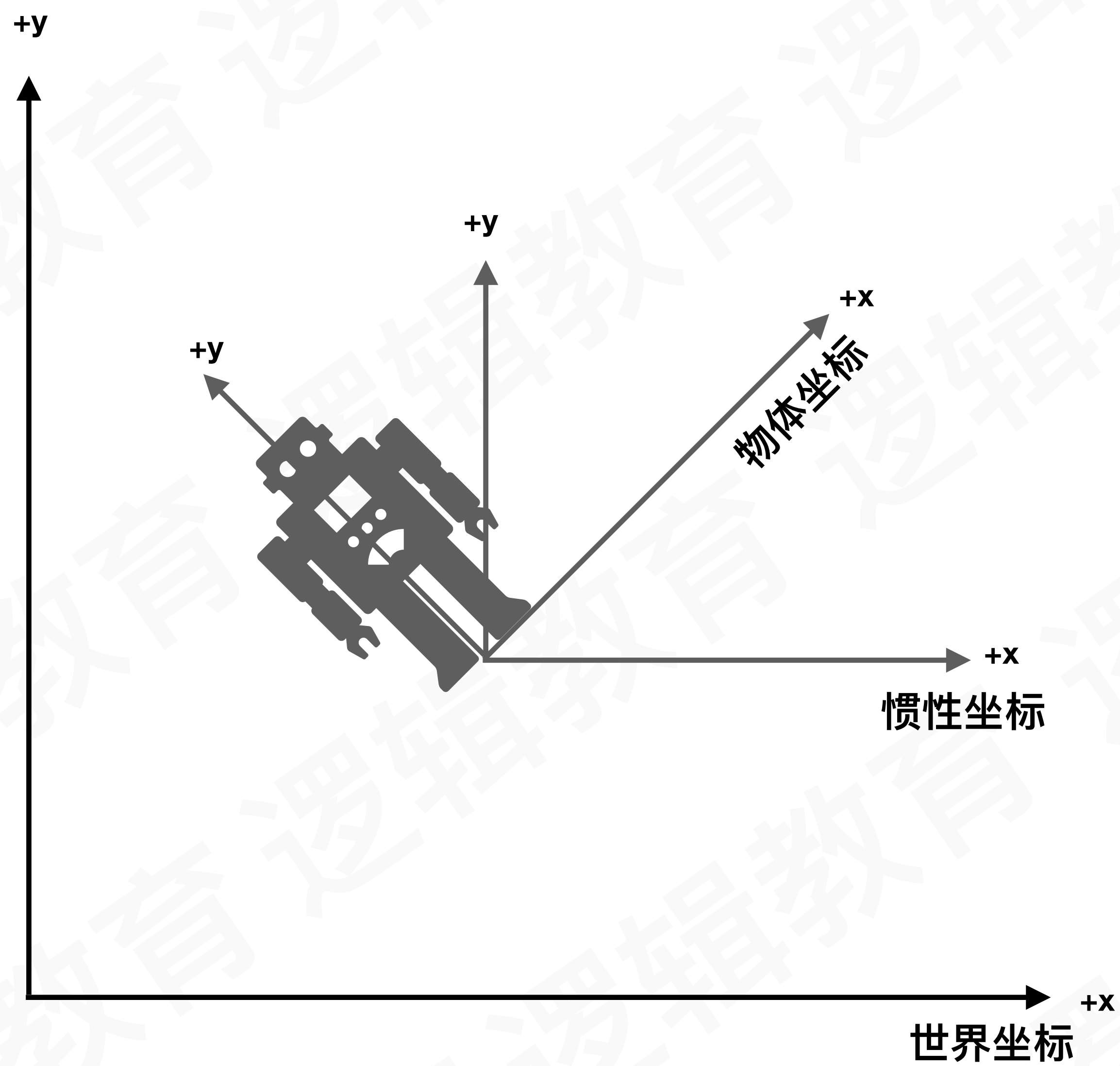
右手坐标系

摄像机坐标系



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

世界坐标、惯性坐标、物体坐标



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

向量的记法

列向量

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

横向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

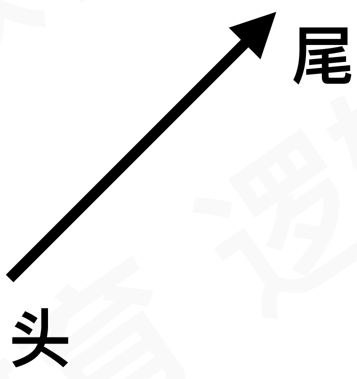
通常使用下标法来引用向量的某个分量

比如，a1 = 1;   a2 = 2 ; a3 = 3

在课程中，针对的是2D\3D\4D向量，所以不用下标法

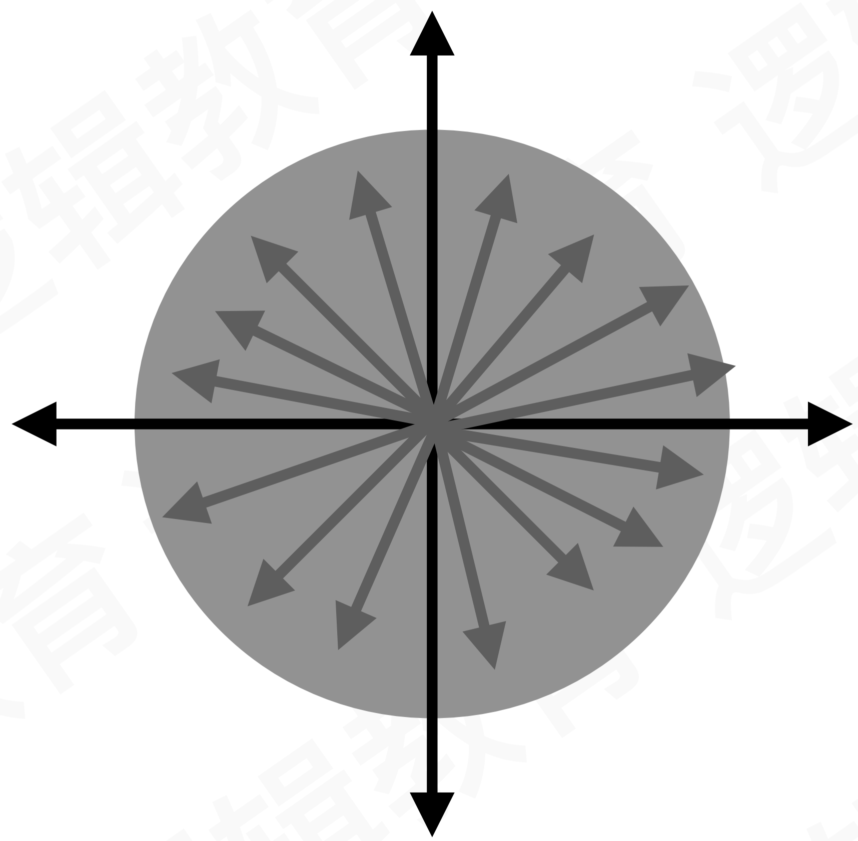
2D向量：x y
3D向量：x y z
4D向量：x y z w

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师



3D零向量

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育 Logic education

负向量表达式:向量变负

$$-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix}$$

推演到2D、3D、4D:

$$-\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y & -z \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -y & -z & -w \end{bmatrix}$$

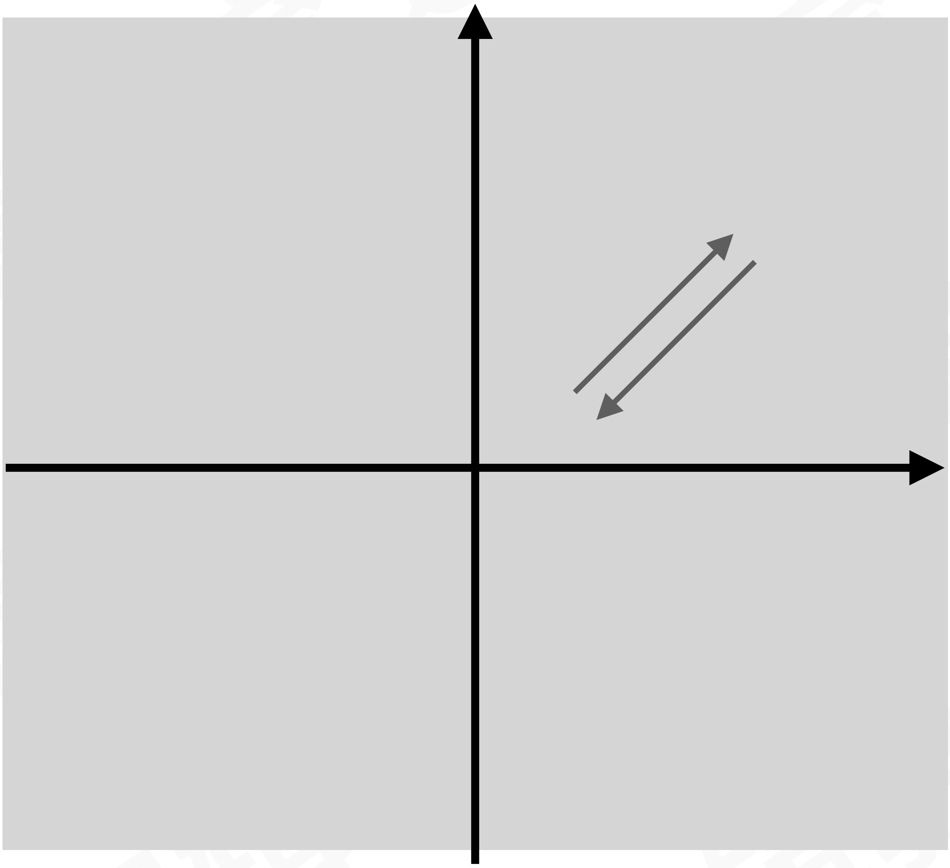
实例

$$-\begin{bmatrix} 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1.34 & -3/4 & -5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.34 & 3/4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

向量大小计算公式

$$\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_{n-1}^2 + V_n^2}$$

2D 、3D向量大小的计算公式

$$\|V\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$\|V\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

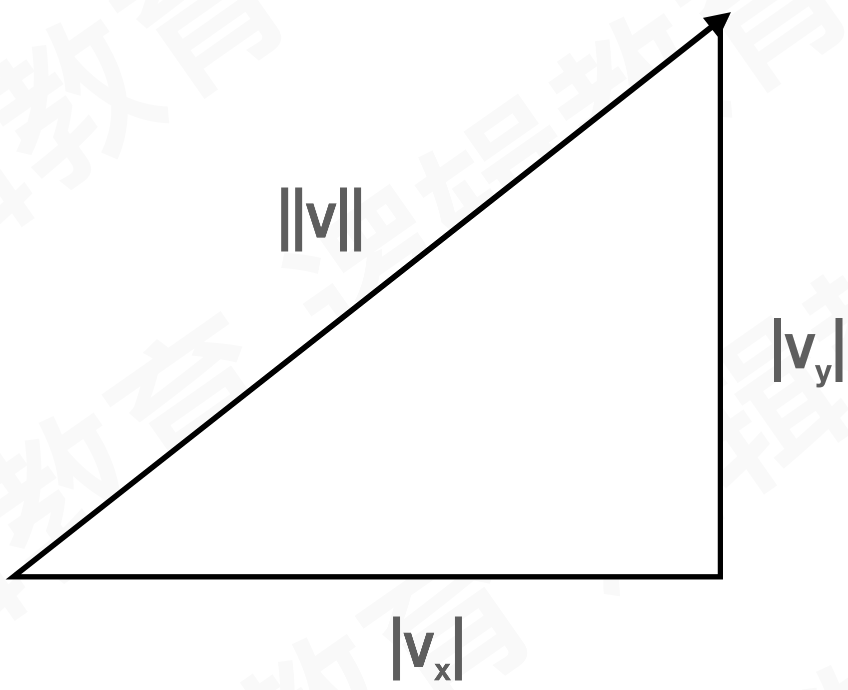
练习

$$\|[5 \ \ -4 \ \ 7]\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 49}$$

$$= \sqrt{90}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师


$\|v\|$
$|v_y|$
$|v_x|$

逻辑教育
Logic education

标量与向量的乘法

$$K\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$$

应用到3D 向量

$$K\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} k\,x \\ k\,y \\ k\,z \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

标量与向量的除法

$$\frac{v}{k} = \frac{1}{k}(v) = \begin{bmatrix} v_x/k \\ v_y/k \\ v_z/k \end{bmatrix}$$

练习：标量与向量的乘除法

2 [1 2 3] = [2 4 6]

-3 [-5 0 0.4] = [15 0 -1.2]

[4.7 -6 8] ÷ 2 = [2.35 -3 4]

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

注意:

- 标量和向量相乘时，不需要写乘号。将2个量挨着写即表示相乘（常将标量写左边）；
- 标量与向量的乘法和除法优先级高于加法和减法；
- 标量不能除以向量，并且向量不能除以另一个向量；
- 负向量能被认为是乘法的特殊情况，乘以标量-1；

几何意义

几何意义上，向量乘以标量k的效果是以因子[k]缩放向量的长度。例如，为了使得向量的长度加倍，使得向量乘以2。如果k<0，则向量的方向就会被倒转。

标准化向量

$$V_{norm} = \frac{v}{||v||}, V \,!= 0$$

练习 标准化2D向量 [12,-5]

$$\frac{[\ 12\ \ -5\ ]}{||\ [\ 12\ \ -5\ ]\ ||} = \frac{[\ 12\ \ -5\ ]}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{[\ 12\ \ -5\ ]}{13}$$

$$= [\ 0.923\ \ -0.385\ ]$$

零向量是不能被标准的，数学上是不允许的，因为将导致除0.几何上也没有意义。因为零向量没有方向

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

向量加法

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$$

向量减法

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

练习

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 a+b , a-b , b+c-a

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

答案

逻辑教育 Logic education

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 a+b , a-b , b+c-a

$$a + b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$a - b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 2-5 \\ 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b+c-a = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+7-1 \\ 5-3-2 \\ 6+0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

思考

1、向量能不能与标量相加减?
2、向量能不能与维度不同的向量相加减?
3、向量加减法都适用于标量加减法规则，比如交换律?

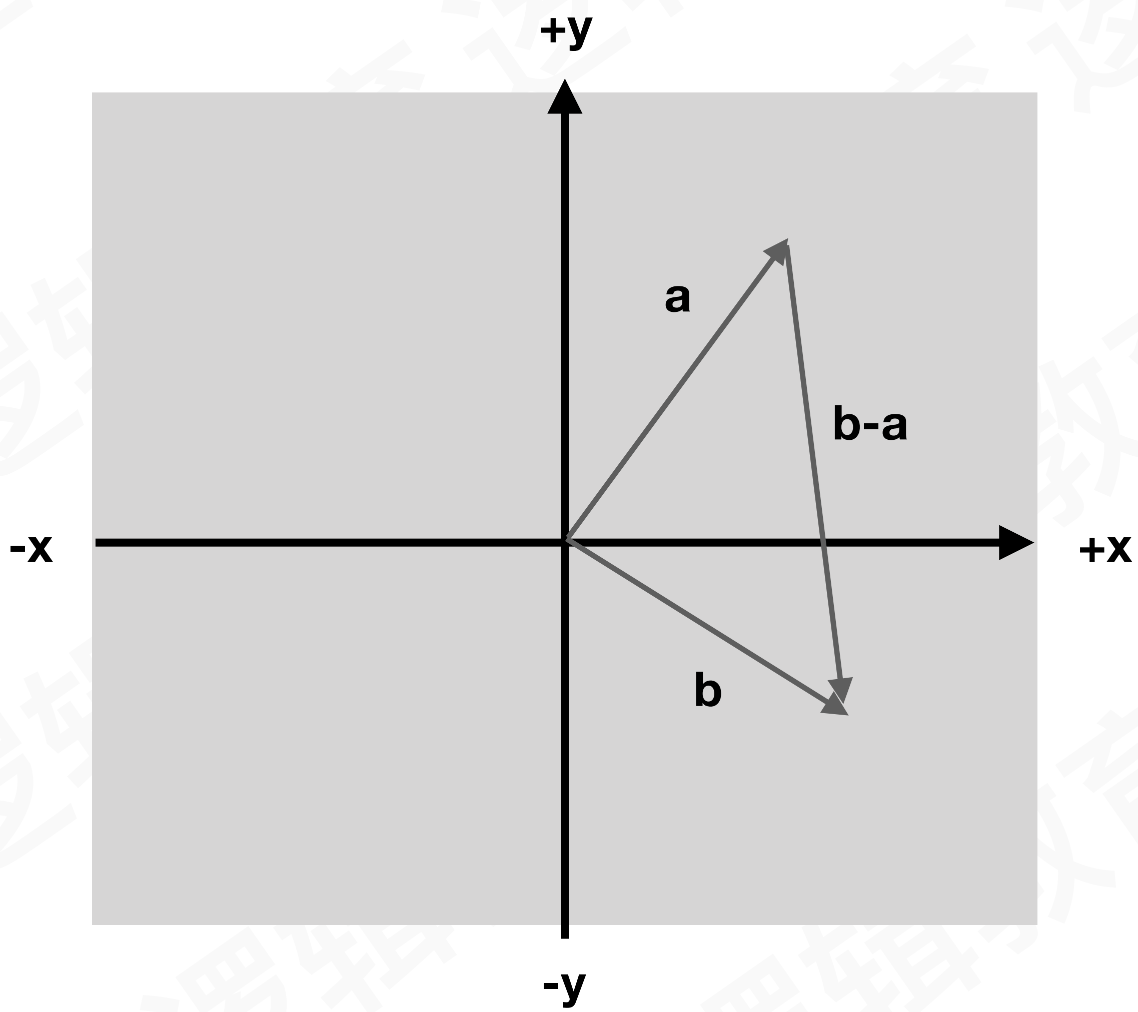
课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

注意

- 向量不能与标量或维度不同的的向量相加减
- 和标量加法一样，向量加法满足交换律，但向量减法不满足交换律。永远有 $a + b = b + a$,但 $a - b = -(b - a)$，仅当$a = b$ 时，$a - b = b - a$;

几何意义

向量a和b相加的几何解释为:平移向量，使向量a的头连接向量b的尾。接着从a的尾向b的头画一个向量。这就是向量的加法的“三角形法则”。向量的减法与之类似。



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

距离公式

$$\text{距离}(a, b) = \|d\| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$\text{距离}(a, b) = \|b-a\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}$$

练习

a = [5 0] , b = [-1 8] ,求ab向量之间的距离

计算2点之间距离

从几何意义上，2点之间的距离等于从一个点到另一个点的向量的长度。

在3D情况下

d = b - a;

a到b的距离等于向量d的长度。在前面的课程讲过。距离(a , b) = ||d||

研发:CC老师

授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

答案

$$([5\ 0],[-1\ 8]) = \sqrt{(-1-5)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$= 10$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

向量点乘

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

应用到2D、3D 中：

$a \bullet b = b \bullet a$

$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$ a,b都是2D向量

$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ a,b都是3D向量

练习

1、求 2D 向量[4 6] · [-3 7]的乘积

2、求3D 矩阵 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

答案

$[\,4\ 6\,]\cdot[\,-3\ 7\,] = 4\cdot(-3) + 6\cdot 7 = 30$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\cdot 0 + (-2)\cdot 4 + 7\cdot 1 = -1$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

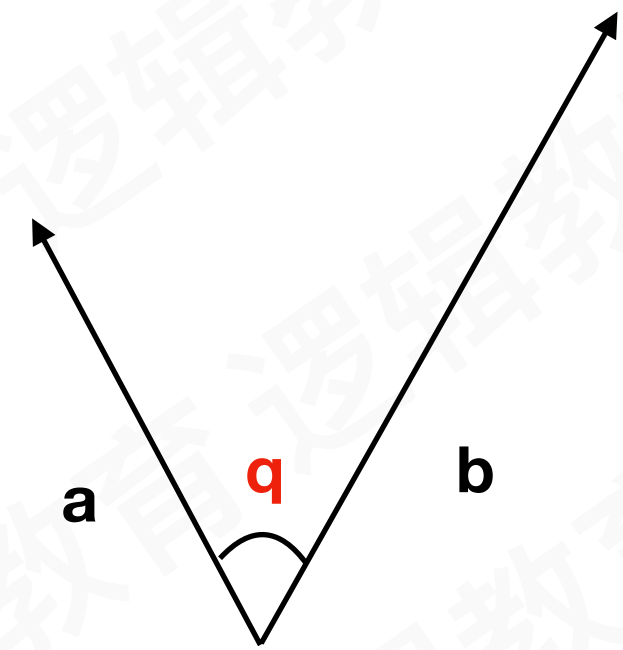
逻辑教育
Logic education

点乘几何意义

$$a \cdot b = \|a\| \, \|b\| \cos(q)$$

3D中，两向量的夹角是在包含两向量的平面中定义的

$$q = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{\|a\| \, \|b\|}\right)$$



用点乘计算2个向量之间的夹角q,如果a,b都是单位向量

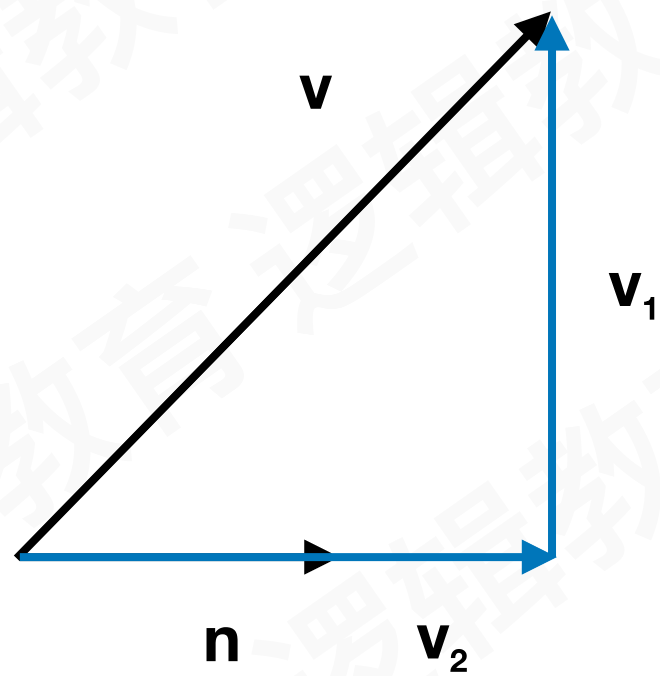
$$q = \arccos(a \cdot b)$$

a • b	q	角度	a 和 b
>0	0°≤q≤90°		方向基本相同
0	q = 90°		正交
<0	90°<q≤108°		方向基本相反

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

给定 2 个向量 v 和 n . 能将 v 分解成 2 个向量: V1 和 V2; 它们分别平行于和垂直于 n; 并且满足 v = v1 + v2; 一般平行向量 V2 为 v 在 n 上的投影

问题: 根据 已知的 v 和 n ; 求出 V1 和 V2 向量;

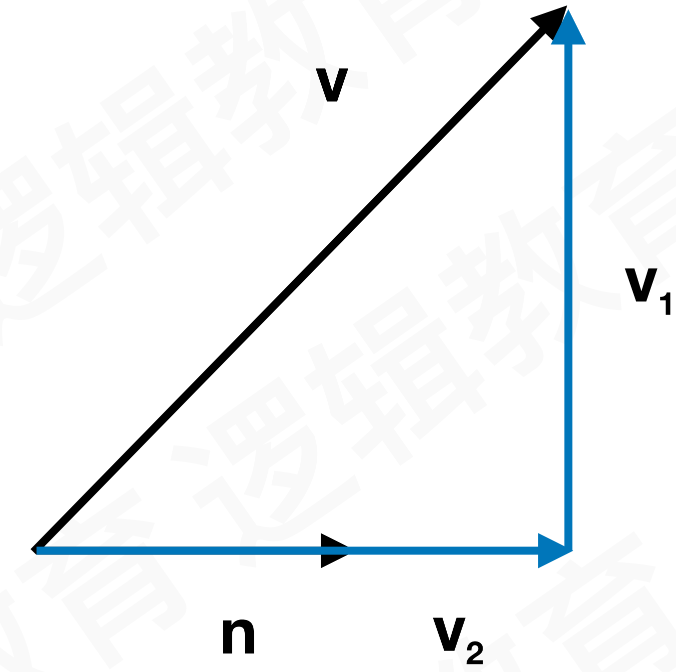


课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

根据向量v 和向量 n 求向量V_2, ?

逻辑教育
Logic education

v_2 平行于 n ,即可表示为: $v_2 = n \dfrac{\| v_2 \|}{\| n \|}$



因此 只要求得v_2的模，就能计算投影向量的值。借助于三角分解，方便求解

$$\cos q = \frac{\| v_2 \|}{\| v \|}$$

$$\| v_2 \| = \cos q \cdot \| v \|$$

根据 $a \cdot b = \|a\| \, \|b\| \cos(q)$ 公式

带入等式 $v_2 = n \dfrac{\| v_2 \|}{\| n \|}$ 得

得到求解 v_2 向量公式

$$v_2 = n \frac{\cos q \cdot \| v \|}{\| n \|}$$

$$v_2 = n \frac{v \cdot n}{\| n \|^2}$$

分子分母同时乘以 $\| n \|$

如果 n 是单位向量，除法就不必要了

$$v_2 = n \frac{\cos q \cdot \| v \| \cdot \| n \|}{\| n \|^2}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

根据向量V_2 求向量V_1?

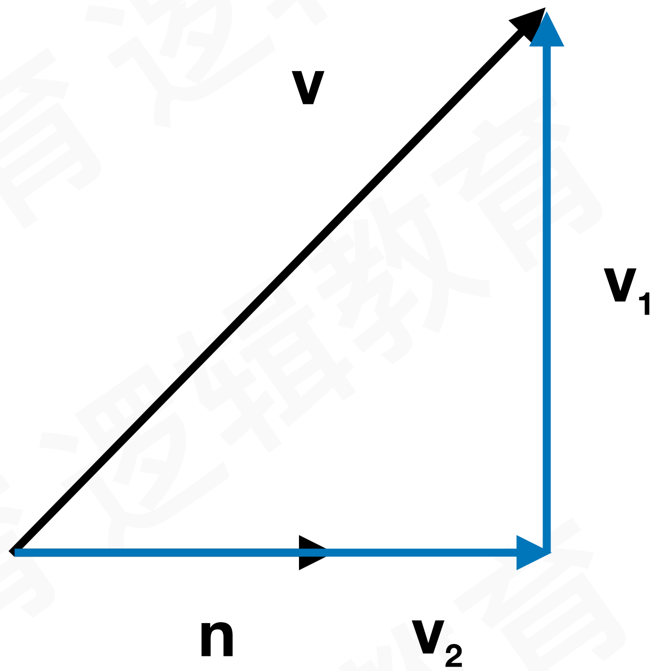
知道了V_2, 求V_1就很简单了

$$v_2 = n\frac{v \cdot n}{\|n\|^2}$$

$$V_1 + V_2 = \|V\|$$

$$V_1 = \|V\| - V_2$$

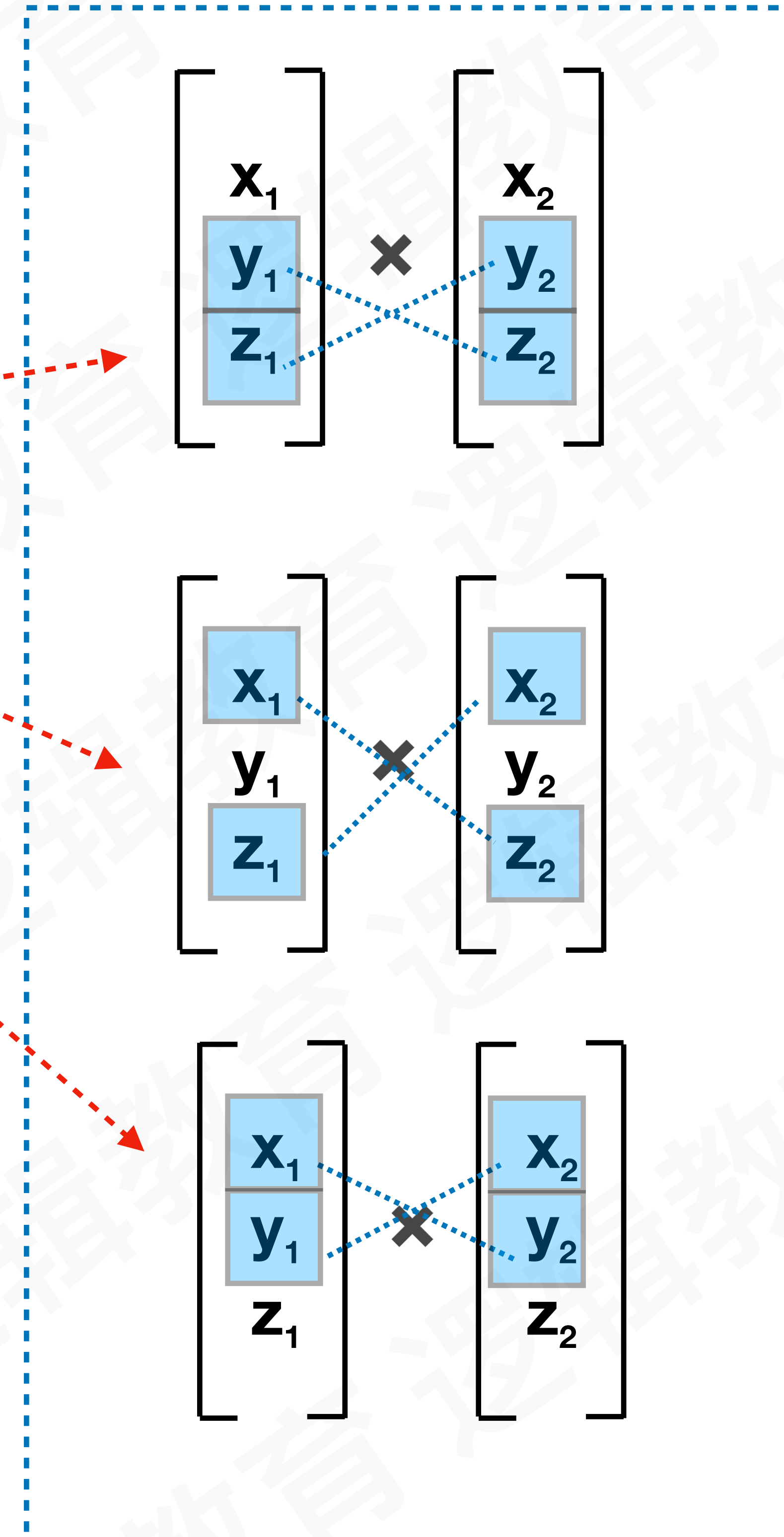
$$= \|V\| - n\frac{v \cdot n}{\|n\|^2}$$



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

向量的叉乘

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$$



叉乘的在加减法前优先级和点乘是一样的; 乘法在加减法之前计算;
当点乘 和 叉乘 在一起时, 叉乘优先计算;
a . b × c = a . (b × c);
因为点乘 返回的是一个标量 同时标量 和向量是不能进行叉乘 . 所以
(a . b) × c 是没有意思的;

练习

1、求3D 矩阵叉乘

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

答案 1、求3D 矩阵叉乘 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 * 8)-(4 * (-5)) \\ (4 * 2)-(1 * 8) \\ (1 * (-5))-(3 * 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

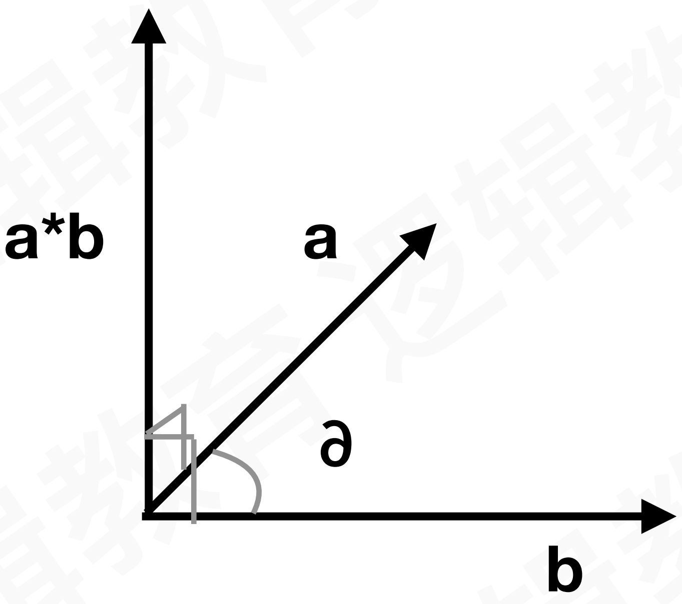
逻辑教育
Logic education

向量的叉乘几何意义

① 向量a,b在一个平面中。向量a * b 指向该平面的正上方，垂直于a 和b;

② a * b 的长度等于向量的大小与向量夹角的sin值的积，如下：

|| a * b || = ||a|| ||b|| sin∂



课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育 Logic education

课后作业

A 热身作业区

1.计算如下向量表达式：

a $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

b $3\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}$

2.计算如下向量之间的距离：

a $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

b $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -14 \\ 30 \end{bmatrix}$

3.计算如下向量表达式：

a $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot -38$

b $3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$

4.计算向量[1,2]和[-6,3]的夹角

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

课后作业

B 兴趣区

5.给定2个向量 $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,$n = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 请将V 分解为平行和垂直于n的分量。（n 为单位向量）

6.某人正在登机，航班规定乘客随身携带物品不能超过二尺长、二尺宽或二尺高。此人有物品，3尺长。他能把这物品带上飞机，为什么？他能携带的物品最长为多长？

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育 答案

Logic education

A 热身作业区答案

1.计算如下向量表达式：

a)

$$\begin{bmatrix}3\\10\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\\-7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-8\\10-(-7)\\7-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\17\\3\end{bmatrix}$$

b)

$$3\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2\\10\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a\\3b\\3c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\\40\\-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a-8\\3b-40\\3c+24\end{bmatrix}$$

2.计算如下向量之间的距离：

a)

$$\begin{aligned}\text{distance}\left(\begin{bmatrix}3\\10\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\-7\\4\end{bmatrix}\right) &= \sqrt{(3-8)^2+(10-(-7))^2(7-4)^2}\\ &= \sqrt{(-5)^2+17^2(-3)^2}\\ &= \sqrt{25+289+9}\\ &= \sqrt{323}\\ &\approx 17.9722\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{distance}\left(\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-14\\30\end{bmatrix}\right) &= \sqrt{(10-(-14))^2+(6-30)^2}\\ &= \sqrt{24^2+(-24)^2}\\ &= \sqrt{576+576}\\ &= \sqrt{1152}\\ &= 24\sqrt{2}\\ &\approx 33.9411\end{aligned}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育 答案
Logic education

A 热身作业区答案

3.计算如下向量表达式：

a) $$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot -38 = \begin{bmatrix} (2)(-38) \\ (6)(-38) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -76 \\ -228 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} 3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} (3)(-2) \\ (3)(0) \\ (3)(4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8+0 \\ -2+9 \\ 3/2+7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 17/2 \end{bmatrix} \\ &= (-6)(8) + (0)(7) + (12)(17/2) \\ &= -48 + 0 + 102 \\ &= 54 \end{aligned}$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

答案

逻辑教育
Logic education

A 热身作业区答案

4.计算向量[1,2]和[-6,3]的夹角

$$
\begin{aligned}
\theta &= \operatorname{acos}\left(\frac{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-6 & 3\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}-6 & 3\end{bmatrix}\right\|}\right)\\
&= \operatorname{acos}\left(\frac{(1)(-6)+(2)(3)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-6)^2+3^2}}\right)\\
&= \operatorname{acos}\left(\frac{-6+6}{\sqrt{5}\sqrt{45}}\right)\\
&= \operatorname{acos} 0\\
&= 90^o
\end{aligned}
$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育 答案
Logic education

B 兴趣区

5.给定2个向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 请将V 分解为平行和垂直于n的分量。（n 为单位向量）

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_{\|} &= \mathbf{n}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{1^2} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + (-1)(0) \right) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} = \begin{bmatrix} (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{7\sqrt{2}}{2}) \\ (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{7\sqrt{2}}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/2 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

逻辑教育
Logic education

B 兴趣区

6.某人正在登机，航班规定乘客随身携带物品不能超过二尺长、二尺宽或二尺高。此人有物品，3尺长。他能把这物品带上飞机，为什么？他能携带的物品最长为多长？

这个男人可以登机，他将物品斜在一个立方体形状的盒子，是2英尺长，2英尺高，和2ft宽。他能携带的最长物品的长度是 大约41.5英寸

$$\|\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$$

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

向量计算公式

续表

公式	解释
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	向量加法的结合律
$s(t\mathbf{a})=(st)\mathbf{a}$	标量乘法的结合律
$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$	标量乘法对向量加法的分配律
$\Vert k\mathbf{a}\Vert=\vert k\vert\Vert\mathbf{a}\Vert$	向量乘以标量相当于以标量的绝对值为因子缩放向量
$\Vert\mathbf{a}\Vert\geqslant 0$	向量的大小非负
$\Vert\mathbf{a}\Vert^2+\Vert\mathbf{b}\Vert^2=\Vert\mathbf{a}+\mathbf{b}\Vert^2$	勾股定理在向量加法中的应用
$\Vert\mathbf{a}\Vert+\Vert\mathbf{b}\Vert\geq\Vert\mathbf{a}+\mathbf{b}\Vert$	向量加法的三角形法则
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	点乘的交换律
$\Vert\mathbf{a}\Vert=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$	用点乘定义向量大小
$k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$	标量乘法对点乘的结合律
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$	点乘对向量加减法的分配律
$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$	任意向量与自身的叉乘等于零向量
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$	叉乘逆交换律
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-\mathbf{a})\times(-\mathbf{b})$	叉乘的操作数同时变负得到相同的结果
$k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(k\mathbf{b})$	标量乘法对叉乘的结合律
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$	叉乘对向量加法的分配律
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$	向量与另一向量的叉乘再点乘该向量本身等于零

5.13 练　习

截自 3D 数学 第54 页

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

see you next time ~

@ CC老师

全力以赴 . 非同凡"想"

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师

Hello Coder

学习,是一件开心的事

知识,是一个值得分享的东西

献给,我可爱的开发者们.

课程研发:CC老师
课程授课:CC老师