

题目简介:

经典的设施选址问题 (Facility Location): 给定网络拓扑图, 考虑网络上的路径损耗费用以及服务器的费用的情况下, 选取部署服务器的位置和数目。

给定网络结构模型如图 1: 一个由若干网络节点构成的有向图, 每个节点至少与另外一个节点通过网络链路相连, 每条链路的网络总带宽不同, 单位租用费不同, 链路上被占用的带宽总和不得超过该链路的总带宽, 链路上行下行带宽独立。消费节点 (红色部分) 直接连接到小区住户的网络, 不同消费节点的带宽消耗需求不同。

题目要求:

寻找最优的服务器部署方案: 从网络结构模型中选择一部分网络节点, 在其上部署服务器, 服务器与对应的这个节点直连 (对应的这个网络节点之间的通信没有带宽限制、也没有通信成本)。方案要使数据流从服务器可以到达消费节点, 并满足所有消费节点的带宽消耗需求。

在满足所有消费节点带宽消耗需求的前提下, 使得耗费的总成本 (服务器部署成本+带宽租用成本 (即单位租用费*占用带宽)) 最低。方案不仅需要包括部署服务器的节点位置, 而且还要包括每个消费节点与所有服务器之间的网络路径以及路径上占用的带宽。

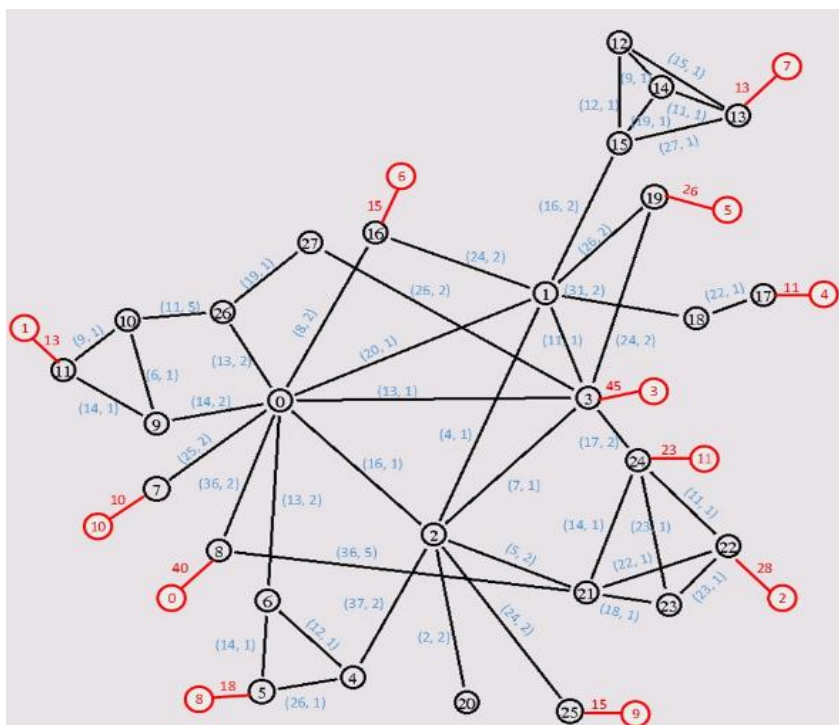


图 1. 网络拓扑图, 黑色圆圈为网络节点, 红色圆圈为消费节点, 圆圈内的数字为节点编号。节点之间的连线为网络链路。链路上的标记(x, y)中, x 表示链路总带宽, y 表示单位网络租用费。消费节点相连链路上的数字为消费节点的带宽消耗需求。

题目抽象分析：

设原图 $G = (V, A)$, $V = \{1, 2, 3 \cdots n\}$, $A \subseteq \{(v, \omega) : v, \omega \in V, v \neq \omega\}$, (v, ω) 表示连接节点 v 和 ω 的有向边，边的数量一共是 m 条， B 是 $m \times 2$ 矩阵，存储每条边的带宽上限和单价， U 是消费节点集合， $\vec{\zeta}$ 是每个消费节点需求组成的向量，

$$\begin{aligned} \min_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{v}} & \left(\sum_{i=1}^{i=n} v_i \times 300 + \sum_{i=1}^m y_i \bullet B_{i2} \bullet x_i \right) \\ s.t. \quad & \forall i \in (V - U), v_i = 0: \quad \sum_{\omega \in V, (\omega, i) \in A} x(\omega, i) - \sum_{\omega \in V, (i, \omega) \in A} x(i, \omega) = 0 \\ & \forall i \in U: \quad \sum_{\omega \in V, (\omega, i) \in A} x(\omega, i) - \sum_{\omega \in V, (i, \omega) \in A} x(i, \omega) = \zeta_i \\ & \forall i \in V: y_i \leq B_{i1} \\ & \forall i \in V, x_i = 0: y_i = 0 \\ & \forall i \in V: y_i \leq B_{i1} \end{aligned}$$

其中， \vec{x} 是选中的边集， $\vec{x} \in \{0, 1\}^{|A|}$ ，如果 $x(v, \omega) = 1$ ，则说明 $(v, \omega) \in A$ 是选中的边，

反之不是， \vec{y}_i 表示选中边的给定输入输出带宽， m 维向量，每个元素小于题目给定的边的

上限带宽， \vec{v}_i 表示选中的作为服务器节点，其表达方式和 \vec{x} 相同，选中的节点对应元素为 1，

其余为 0；

第一个约束条件表示选中的节点中，除开服务器节点和消费节点，其余的输入输出带宽总和为 0；第二个约束条件表示消费节点的输入输出带宽差为对应节点的消费值；第三个约束条件表示服务器节点只有输出边，没有输入边，第四个约束条件表示每条选中的边的给定带宽小于其上限。

目标方程表示所有费用的总和，包括服务器的总费用，选定的边的带宽与单价的乘积总和。

选取服务器样例

如图 2 所示，其中绿色圆圈表示已部署的视频内容服务器，通往不同消费节点的网络路径用不同颜色标识，并附带了占用带宽的大小

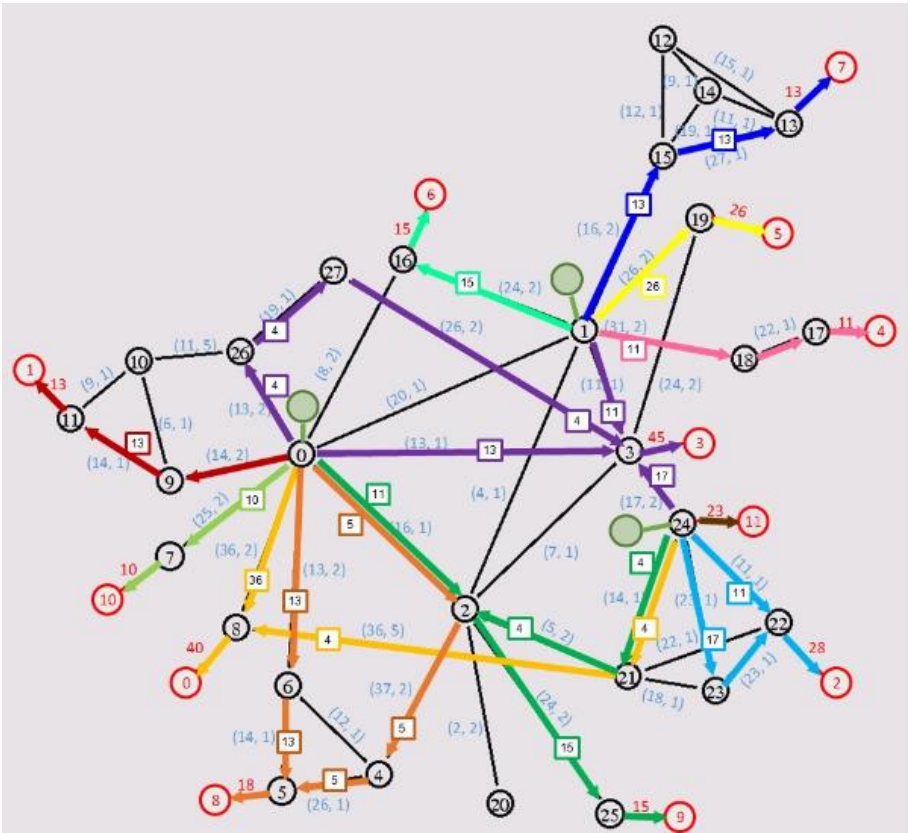


图 2. 成本较低的方案