**第二讲：三维空间刚体运动**

这讲主要目标：

理解三维空间的刚体运动描述方式：旋转矩阵、变换矩阵、四元数和欧拉角。

**2.1旋转矩阵：**

**2.1.1 点、向量和坐标系**

我们生活的世界是三维的，所以我们就习惯三维空间的运动。三维空间由3个坐标轴组成。现在我们要考虑的是：**刚体**，它具有位置，还具有位姿。

在谈论这个问题之前，我们先来聊一聊**点**和**向量**。点是空间的基本元素，没有长度也没有体积，把两个点连接起来就是向量。而向量是空间中的一样东西，当我们指定这个三维空间的某个坐标系时，才能谈论该向量在此坐标系下的坐标，也才有意义。

在线性代数来说，三维空间中某个点坐标可以用来描述。怎么描述它？设在这个线性空间内，找到该空间的一组**基[[1]](#footnote-1)**(e1, e2, e3)，那么。任意向量a在这组基下就有一个坐标：

**(2.1)**

这里称为a在此基下的坐标。坐标的具体取值，一是和向量本身有关，二是和坐标系的选取有关。

内外积说明，下面会用到，我们在这里给出运算的方式。对于，一般情况下的内积可以写成：

**(2.2)**

**其中**指向量a,b的夹角。内积也可以描述向量间的投影关系。而外积为：

**(2.3)**

两个向量的内积结果和坐标系的选取是无关的。

**2.1.2 坐标系间的欧式变换**

Slam就需要移动，我们需要设定一个惯性坐标系(或者世界坐标系)，可以认为它是固定不动的，例如图2-1中的xw,yw,zw定义的坐标系。同时，相机或机器人是一个移动坐标系，例如xc,yc,zc定义的坐标系。那么相机坐标系和世界坐标系是怎么转换的，需要先得到该点针对手机或者传感器的坐标系的坐标值，再根据刚体的位姿就是前面的载体的**位姿**变换到世界坐标系中。

两个坐标系之间的运动由一个旋转加上一个平移组成，这种运动称为**欧式变换**(Euclidean Transform)。

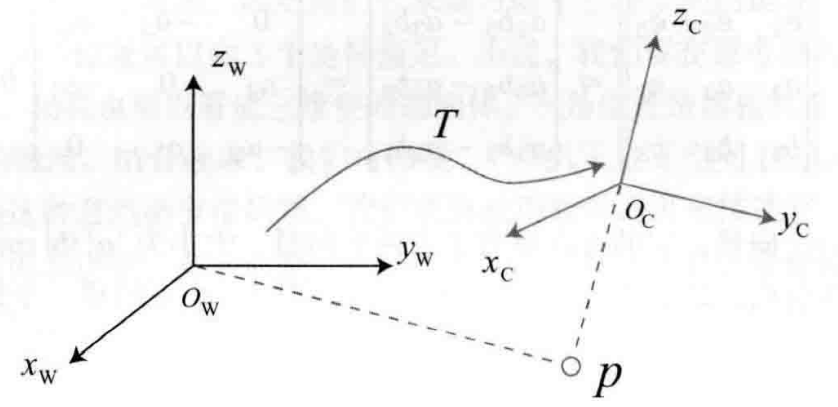


图2-1 坐标变换。对于同一个向量p，它在世界坐标系下的坐标pw和在相机坐标系下的坐标pc是不同的。这个转换关系由变换矩阵T来描述。

欧式变换由旋转和平移组成。我们首先要旋转，设某个单位正交基(e1,e2,e3)经过一次旋转变成了(e1’,e2’,e3’)。对于同一个向量a(该向量并没有随着坐标系的旋转而发生运动)，它在两个坐标系下的坐标为和。因为向量本身没变，所以根据坐标的定义有：

**(2.4)**

为了描述两个坐标系之间的关系，对上述等式的左右两边同时左乘，那么坐标的系数就变成了单位矩阵，所以：

**(2.5)**

设中间矩阵为R。这个矩阵由两组基之间的内积组成，刻画了旋转前后同一个向量的坐标变换关系。如果旋转是一样的话，这个矩阵就是一样的。矩阵R描述了旋转本身，故称为**旋转矩阵**(Rotation Matrix)。

由式(3.4)-(3.5)的变换说明这个R是一个正交矩阵，它的行列式等于1。可以将n维旋转矩阵的集合定义为：

**S0(n) = (2.7)**

SO(n)是特殊正交群(李群，放在下一章说)。这个集合由n维空间的旋转矩阵组成，SO(3)是指3维空间的旋转。

欧式变换中，还需要平移。考虑世界坐标系中的向量a，经过一次旋转和一次平移t后，得到了，那么把旋转和平移合到一起，有：

**(2.8)**

t为平移向量。

在实际当中，需要定义坐标系1，坐标系2，那么向量a在两个坐标系下的坐标为a1,a2，两者关系：

**(2.9)**

：把向量a2从坐标系2变换到坐标系1。同理也是这个意思。

关于平移，它实际对应的是坐标系1原点指向坐标系2的向量，在**坐标系1下取的坐标**，从1到2的向量。

**2.1.3 变换矩阵与齐次坐标**

式(2.8)完整的表示欧式空间的旋转和平移，这个变换关系是一个线性关系。假设经过两次变换：和：

**,**

从a到c的变换为：

**.**

引入齐次坐标和变换矩阵得：

**(2.10)**

三维向量末尾加1，将其变为四维向量，称为**齐次坐标**。可以把旋转和平移写在矩阵里，使得整个关系变成线性关系。**T**为**变换矩阵(Transform Matrix)**

用表示a的齐次坐标，两次变换有：

**(2.11)**

后面直接用b = Ta代表进行了齐次坐标的转换。

关于变换矩阵T，具有特别的结构：左上角为旋转矩阵，右侧为平移向量，左下角为0向量，右下角为1。这种矩阵称为特殊欧式群：

**SE(3) = (2.12)**

求解该矩阵的逆表示一个反向的变换：

**（2.13）**

这个过程的代码就不做解释了

**2.2旋转向量和欧拉角**

**2.2.1 旋转向量**

用矩阵来表示有两个缺点：

1. SO(3)的旋转矩阵有9个量，但一次旋转只有3个自由度。
2. 旋转矩阵自身带有约束：必须是正交矩阵，且行列式为1。

希望有一种方式能够紧凑地描述。任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来刻画。于是我们用一个向量，其方向与旋转轴一致，而长度等于旋转角。这种向量称为**旋转向量**。

从旋转向量到旋转矩阵的转换过程由**罗德里格斯公式**表明，这里不做推导，直接用结果就可。

**(2.14)**

符号**^**是向量到反对称矩阵的转化符，反之也可以从一个旋转矩阵到旋转向量的转换。对于转角，取两边的**迹**，有：

**=3cos (2.15)**

**=1+2cos**

因此：

**(2.16)**

关于转轴n，旋转轴上的向量在旋转后不发生改变，说明：

**Rn = n. (2.17)**

可以看出转轴n是矩阵R特征值1对应的特征向量。

**2.2.2 欧拉角**

欧拉角提供了一种非常直观的方式来描述旋转——它使用**3个分离的转角**，把一个旋转分解成3次绕不同轴的旋转。可定义ZYZ(绕Z轴旋转，在绕Y轴旋转，最后绕Z轴旋转)，ZYX等旋转方式。

欧拉角用“偏航-俯仰-滚转(yaw-pitch-roll)”3个角度来描述一个旋转。等价于ZYX轴旋转，对着我们的为X轴，右侧为Y轴，上方为Z轴。如图2-2所示。那么，ZYX转角相当于把任意旋转分解成以下3个轴上的转角：

1. 绕物体的Z轴旋转，得到偏航角yaw
2. 绕物体的Y轴旋转，得到俯仰角pitch
3. 绕物体的X轴旋转，得到滚转角roll

可以用描述任意的旋转。

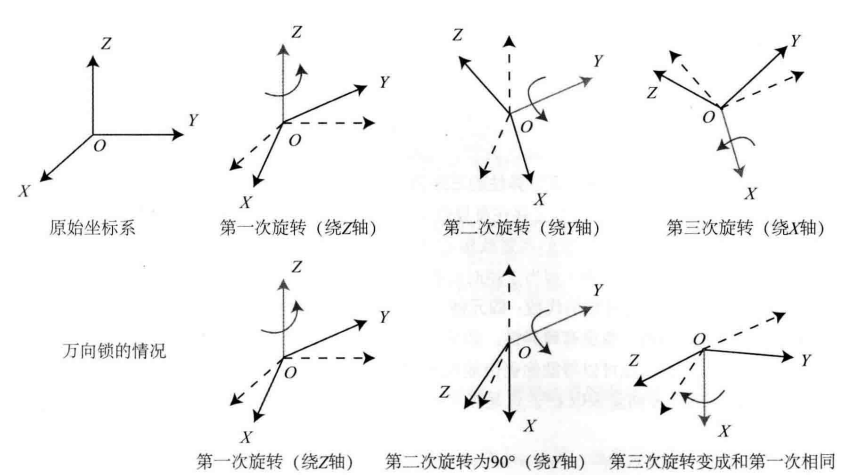


图2-2

欧拉角具有奇异性：在俯仰角为时，第一次旋转与第三次旋转使用的是同一个轴，就会失去一个自由度。

**2.3 四元数**

**2.3.1 四元数的定义**

旋转矩阵用9个量描述3个自由变量，具有冗余性；欧拉角和旋转向量是紧凑的，但具有奇异性。

**四元数**(Quaternion)。它是紧凑的，也没有奇异性。

用到欧拉公式：

**(2.18)**

这是一个单位长度的复数。在二维情况下，旋转可以由**单位复数**来描述。也可以用单位四元数描述三旋转。

一个四元数q拥有一个实部和三个虚部。

**(2.19)**

其中i,j,k为四元数的虚部。这三个虚部满足以下关系式：

**(2.20)**

把i、j、k看成三个坐标轴，那么它们与自己的乘法和复数一样，相互之间的乘法和外积一样。也可用用一个标量和一个向量来表达四元数：

**.**

S称为四元数的实部，而v称为虚部。

**2.3.2 四元数的运算**

设两个四元数，，用向量分别表示为或者用原始四元数表示：

**,**

1. 加减法

**= (2.21)**

1. 乘法

**= -**

**+**

**+ (2.22)**

**+**

利用内外积运算：

**. (2.23)**

1. 模长

四元数模长定义为：

**(2.24)**

**= (2.25)**

1. 共轭

**(2.26)**

**(2.27)**

1. 逆

**(2.28)**

1. 数乘

**(2.29)**

**2.3.3 用四元数表示旋转**

四元数表达对一个点的旋转。假设一个空间三维点，以及一个单位四元数q指定的旋转。三维点p经过旋转之后变为。使用矩阵表示，那么有。

三维空间点用一个虚四元数来描述：

相当于把四元数的3个虚部与空间中的3个轴相对应。那么，旋转之后的点可表示为这样的乘积：

**(2.30)**

最后把的虚部取出来，即得到旋转之后点的坐标了。

**2.3.4 四元数到其它旋转表示的转换**

任意单位四元数描述了一个旋转，该旋转也可以用旋转矩阵或旋转向量描述。四元数乘法可以写成一种矩阵的乘法。设q=，可以定义如下的符号和为：

**(2.31)**

这两个符号将四元数映射成为一个的矩阵。于是四元数乘法可以写成矩阵的形式：

**= (2.32)**

同理可得：

**= = (2.33)**

现在考虑使用四元数对空间点进行旋转的问题。

**= (2.34)**

代入两个符号对应的矩阵：

**== (2.35)**

因为和p都是虚四元数，所以该矩阵的右下角即给出了**从四元数到旋转矩阵**的变换关系：

**(2.36)**

为了得到四元数到旋转向量的转换公式，对上式两侧求迹，得：

**(2.37)**

变换得：

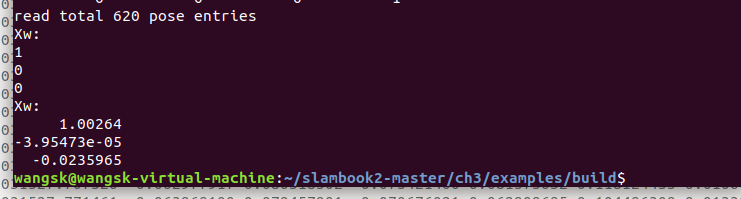
即：

所以：

**.**

至于旋转轴，如果在式(2.35)中用q的虚部代替p，得到q的虚部组成的向量在旋转是不动的，即构成了旋转轴。去掉它的模长，可以得到四元数到旋转向量的转换公式：

**(2.38)**



1. 基就是张成这个空间的一组线性无关的向量 [↑](#footnote-ref-1)