第三讲：李群与李代数

主要目标

1. 理解李群与李代数的概念
2. 理解BCH近似的意义
3. 学会在李代数上的扰动模型

前言：所有代码和数据都放在

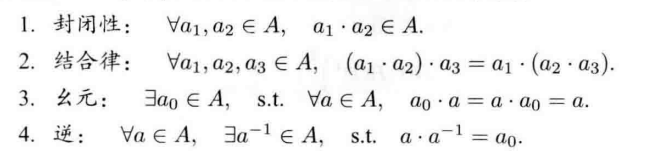
**3.1李群与李代数基础**

1. 李群

李群是具有连续(光滑)性质的群：它既是群也是流行；一个刚体能够连续的在空间中的运动的，故SO(3)和SE(3)都是李群(特殊的正交群)，由于旋转矩阵R是3\*3的维度，自由度的约束只有3个自由度，旋转矩阵R在9维空间中是一个连续的3维曲面或流形。SO3、SE3只有乘法的定义，没有加法的定义。

SO(3) =

SE(3) =



1. 李代数的概念

李代数是与李群对应的一种结构，位于向量空间。记作se3和so3，李代数是李群单元处的正切空间。切空间是一个向量空间，所以可以定义加法运算，可以通过李群到李代数的映射可以解决李群的加法运算。

**3.2旋转矩阵引出李代数**

设一个旋转矩阵R，满足

(I是一个单位矩阵)

考虑旋转随时间的变换(连续运动)，有

两侧对时间求导

整理后得：

是一个反对称矩阵

记作：

两边右乘R(t)有：

如果我们需要对旋转矩阵关于时间的求导只需要左乘一个

反对称符号，定义为^,为反对称矩阵到向量

当t0=0时 R(0)=I

在t0附近进行泰勒展开，得到：

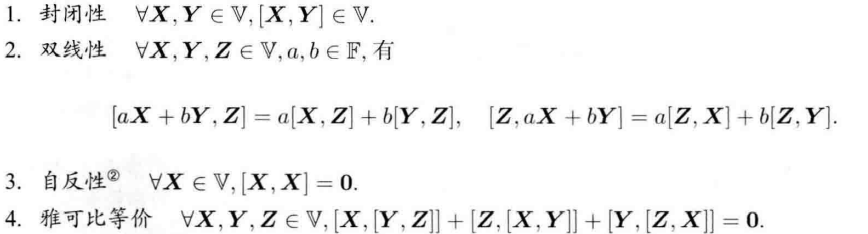
可以看到反映了**R的导数性质**，故称它在**SO(3)**原点附近的**正切空间(Tangent Space)**上。同时在t0附近，设保持为常数，就有：

因R(0)=I，解方程得：

**3.3李代数的定义**

每个李群都有与之对应的李代数。李代数描述了李群的局部性质。

李代数由一个集合、一个数域和一个二元运算[,]组成。满足以下几条性质，则称()为一个李代数，记作g。



**3.4李代数so(3)**

SO(3)对应的李代数是定义在上的向量，我们记作。每个都可以生成一个反对称矩：

李括号定义为：

向量与反对称矩阵是一一对应的，在不引起歧义的情况下，so(3)的元素是三维向量或者三维反对称矩阵：

so(3)是由一个三维向量组成的集合，每个向量对应一个反对称矩阵，可以用于表达旋转矩阵的导数。它与SO(3)的关系由指数映射给定：

**3.5李代数se(3)**

对于SE(3)，它也由对应的李代数se(3)。它的引出和so(3)相似，se(3)位于空间中:

se(3)=

我们把每个se(3)元素记作，是一个六维向量。前三维为平移(但含义与变换矩阵中的平移不同)，记作；后三维为旋转，记作，实质是so(3)元素。在这中，我们用^符号，将一个六维向量转换为四维矩阵：

对应的有李括号：

**3.6 SO(3)上的指数映射**

任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开，但是只有在收敛的情况下才会有结果，其结果还是一个矩阵：

对so(3)中的任意元素，我们也可按此方式定义它的指数映射：

从这个方式观看，解这个方程是困难的，无穷次幂。可以从其他方面进行推导。由于是三维向量，可以定义它的模长和方向，记作和,就得到。a是一个长度为1的单位向量，即。a^为反对称矩阵，有两条重要性质：

**a^a^ = = a – *I*,**

**还有：**

**a^a^a^= a^( a – *I*)= -a^.**

有这个两条性质可以把指数映射写成：

**exp() = exp()=**

**=I + + + + ……**

**= a-a^a^+a^+ --+……**

**= a+-(1-)a^a^**

其中：

**为sin**

**(1-)为cos**

**=a^a^+I+ -**

**=(1-cos)a^a^+I+**

**= I+ (1-)a^+.**

最后，得到一个式子：

exp()=**I+ (1-)a^+.**

这与罗德里格斯公式是一样的，说明了so(3)是由旋转向量组成的空间，这里so3映射到李群SO(3)，反之则有SO(3)映射到so(3)，需要定义一个对数映射：

**==.**

**3.7 SE(3)上的指数映射**

为了节省时间，我这里不在详细推导SE(3)指数映射(换汤不换药)。se(3)上的指数映射形式如下：

**exp() =**

**= T**

其中**有：**

**=I++++……**

**=()(a^)+(+…)a^a^ +I**

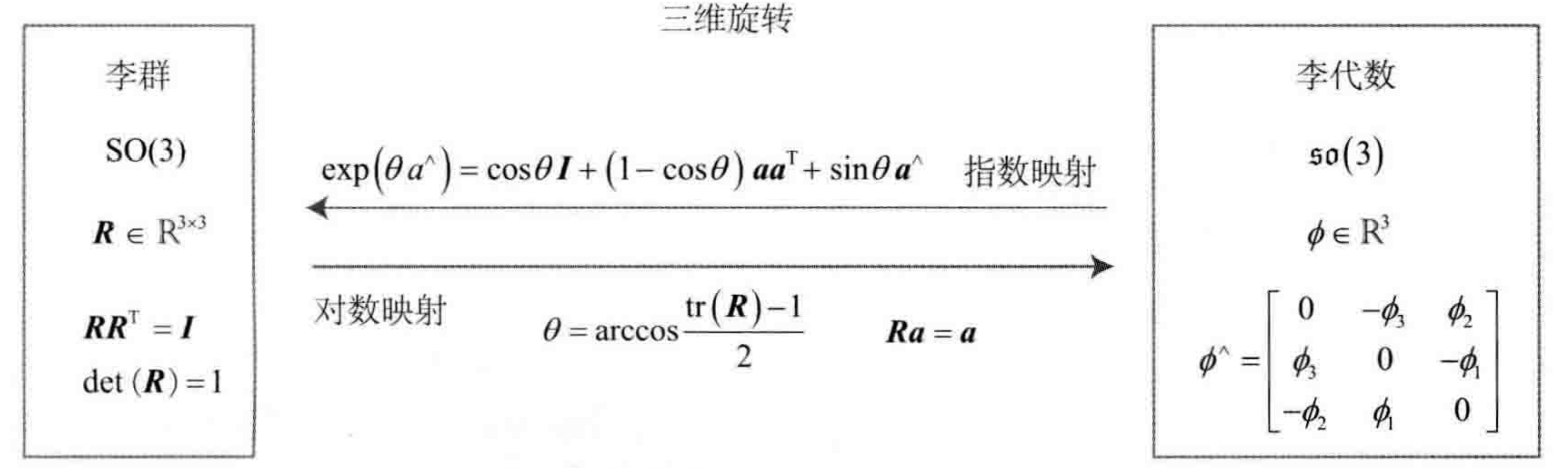
**=(1-cos)( a^) + (a)+I**

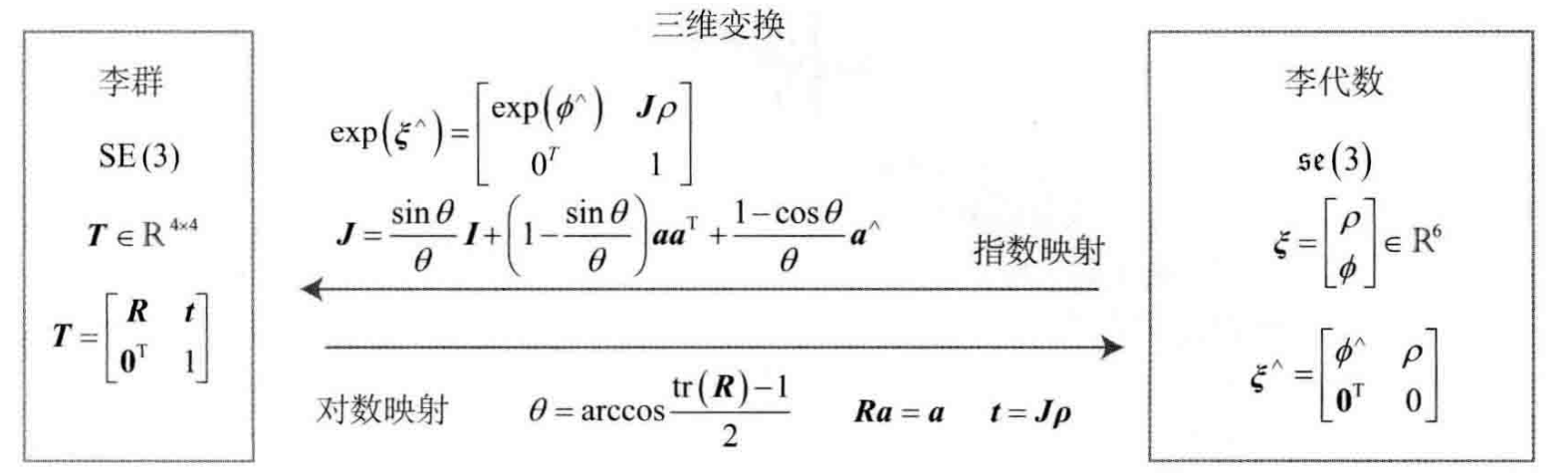
**=I + (1-) a+a^ J.**

**J = I + (1-) a+a^**

T中的左上角是旋转矩阵(可以由四元数、旋转向量等计算而来)，右上角则为t，它满足：

由于J可以由得到，所以这里的也可以由此线性方程解得。现在，已经弄清了李群、李代数的定义与相互的转换关系





**3.8 李代数求导与扰动模型**

BCH公式与近似形式

李代数可以进行优化，我们在优化的过程中导数是非常必要的信息。

我们需要证明等式：

**exp() exp() = exp()**

如果是标量的话，公式成立；但此处我们计算的是矩阵的指数函数，而非标量的指数。换言之，需要证明下式成立：

**= A+B**

由于推导过程很复杂，就只要记住结果就可以：

**=A+B+[A,B]+[A,[A,B]]-[B,[A,B]]+……**

其中[]为李括号。BCH公式告诉我们，当处理两个矩阵指数之积时，它们会产生一些由李括号组成的余项。考虑SO(3)上的李代数,当或为小量时，小量二次以上的项(二阶小量是阶数为二的无穷小量,即极限中与（x-x0）^2同阶的小量,因为其相对一阶小量dx更易于趋于无穷小,所以可以忽略)都可以忽略掉。此时，BCH拥有线性近似表达：

以第一个近似为例。当一个旋转矩阵(李代数为)左乘一个微小旋转矩阵(李代数为)时，可以近似地看做，在原有的李代数上加上了一项，同理下面是右乘了一个微小位移。**在使用的时候需要注意是左侧模型还是右乘模型。**

以左乘为例。左乘BCH近似雅克比。

**=J = I + (1-) a+a^.**

逆：

**= cotI + (1-)-**

**右乘雅克比矩阵只需要对自变量取符号就可以了**

**=**

定义一个旋转矩阵**R**，对应的李代数为。我们给它左乘一个微小旋转，记作，对应的李代数为**。**那么，在李群上，得到的结果就是**，**在李代数上，根据BCH近似，为 **+ 。**合并起来，可以简单地写成：

**SO(3)上的李代数的求导**

我们在SLAM中，需要估计相机的位置和姿态，该位姿是由SO(3)上的旋转矩阵或者SE(3)上的变换矩阵描述的。我们假设相机的位姿为T。它观察到一个世界坐标位于p的点，产生了一个观察数据z。那么，由坐标变换关系知：

**z = Tp + w**

其中w为随机噪声。由于它的存在，z往往不可能精确地满足z=Tp的关系。所以，我们通常会计算理想的观测与实际数据的误差：

**e = z - Tp.**

假设一共有N个这样的路标点和观测，于是就有N个上式。那么对相机进行位姿的估计，相当于寻找一个最优的T，使得整体误差最小化：

需要计算目标函数J关于变换矩阵T的导数。如果我们把T当成一个普通矩阵来处理优化，就必须对它加以约束。从李代数的角度来说，由于李代数由向量组成，具有良好的加法运算，因此，使用李代数加法对李代数求导。

1. 用李代数表示姿态，然后根据李代数加法对**李代数求导**。
2. 对李群**左乘或右乘**微小扰动，然后对该**扰动求导，**称为左扰动和右扰动模型。

第一种对应到李代数的求导模型，而第二种方式则对应到扰动模型

**李代数求导**

先，考虑SO(3)上的情况。假设我们对一个空间点p进行旋转，得到Rp。现在要计算旋转之后的点的坐标相对于旋转的导数，非正式的记为

由于SO(3)没有加法，无法求导。设R对应的李代数为，我们计算：

由导数的定义：

=

=

=

=

=

第三行为泰勒展开舍去高阶后的近似(由于取了极线，可以写等号)，第4行到第5行反对称符号看做叉积，交换之后变号，于是，我们推导出了旋转之后的点对应的李代数的导数：

**扰动模型(左乘)**

另一种求导方式是对R进行一次扰动，看结果相当于扰动的变换率。这个扰动可以乘在左边也可以乘在右边。设做扰动对应的李代数为。然后对求导，即：

对它进行求导：

这不进行详细的说明了，与上面的一致

**SE(3)上的李代数求导**

最后，我们给出SE(3)上的扰动模型，而直接李代数上的求导就不再介绍了。假设某空间点p经过一次变换T(对应的李代数为)，得到Tp。给T左乘一个扰动=exp()，我们设扰动项的李代数为=，那么：

=

=

=

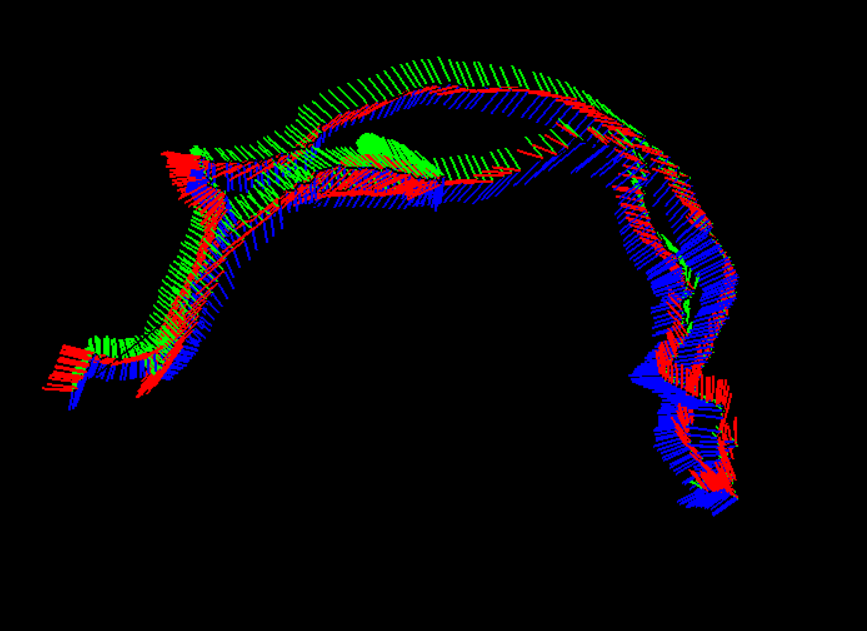
=

=

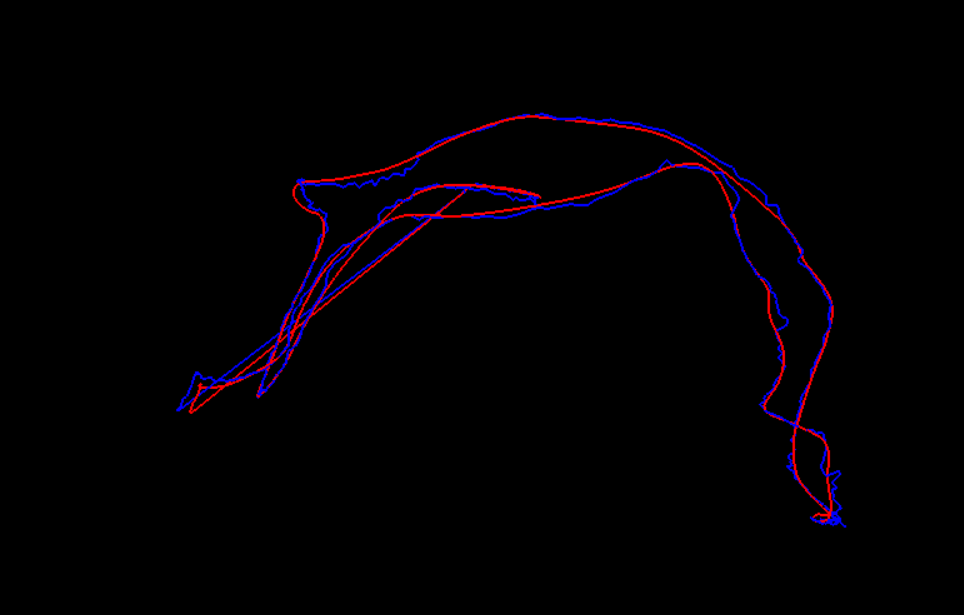
把最后的结果定义成一个运算符，它把一个齐次坐标的空间点变换成一个4\*6的矩阵。此式稍微需要解释的是矩阵求导方面的顺序，假设a,b,x,y都是列向量，那么在我们的符号写发下，有下面规则：

**3.7 实践：李群与李代数**

第一个图可视化演示



第二个图评估轨迹误差



计算误差：