一、填充题（每题 3 分，共 24 分）第 6 小题函数第 2 和第 3 段各得 1 分，第 8 小题每空得 1 分。

1. 0.8　　2. 0.5　　3. 2/3　　4. $F_X(z)F_Y(z)$　　5. 13/25

6. $\begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{6}(x^2-1), & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}(x-1), & 2 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$　　7. $N(0,9^2)$　　8. $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{5}$，自由度为 2

二、（8 分）解：设 A_i 为烧坏 i 个元件，$i=1,2,3$，B 为仪器发生故障，则烧坏的原件个数 $X \sim b(3,p)$，　　__________3 分

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\}P\{B|X=i\}$$　　__________6 分

$$=0.25\times C_3^1 p(1-p)^2+0.6\times C_3^2 p^2(1-p)+0.9\times p^3$$　　__________7 分

$$=-0.15p^3+0.3p^2+0.75p$$　　__________8 分

三、（12 分）解

（1）$P\{Y \ge 0\}=p_{-10}+p_{00}+p_{10}+p_{-11}+p_{01}+p_{11}$

$=0.2+0+0.1+0+0.2+0.1$

$=0.6$　　__________ 3 分

（或 $P\{Y \ge 0\}=1-P\{Y=-1\}=1-(0.1+0.1+0.2)=0.6$）

（2）$P\{X=-1\}=0.3, P\{X=0\}=0.3, P\{X=1\}=0.4$　　__________ 1 分

$P\{Y=-1\}=0.4, P\{Y=0\}=0.3, P\{X=1\}=0.3$　　__________ 2 分

$E(X)=-1\times 0.3+0\times 0.3+1\times 0.4=0.1$　　__________ 3 分

$E(Y)=-1\times 0.4+0\times 0.3+1\times 0.3=-0.1$　　__________ 4 分

$E(XY)=(-1)\times(-1)\times 0.1+(-1)\times 1\times 0+1\times(-1)\times 0.2+1\times 1\times 0.1=0$

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.01$　　__________ 6 分

（3）$p_{-1,-1}=0.1$，$P\{X=-1\}=0.4, P\{Y=-1\}=0.3$

$p_{-1,-1} \ne P\{X=-1\}\times P\{Y=-1\} \Rightarrow X$ 与 Y 不相互独立。　　__________ 3 分

四、(12 分) 解

(1) $P\{X \geq 1\} = \int_1^{+\infty} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-2}$ ______ 4 分

(2) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-2x} dx$ ______ 2 分

$= -\int_0^{+\infty} x \cdot de^{2x} dx = -xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$

$= \dfrac{1}{2}$ ______ 4 分

(3) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\dfrac{X-Y}{2} \leq z\} = \iint\limits_{\frac{x-y}{2}<z} f_X(x) f_Y(y) dxdy$ ______ 1 分

当 $z < -2$ 时， $F_Z(z) = 0$；当 $-2 \leq z < -1$ 时

$$F_Z(z) = \int_{-2z}^{4} [\int_0^{y+2z} e^{-2x} dx] dy = \frac{1}{4} e^{-4(2+z)} + z + \frac{7}{4}$$

当 $-1 \leq Z$ 时， $F_Z(z) = \int_2^4 [\int_0^{y+2z} e^{-2x} dx] dy = 1 + \dfrac{1}{4} e^{-4(2+z)} - \dfrac{1}{4} e^{-4(1+z)}$

从而有 $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < -2 \\ \dfrac{1}{4} e^{-4(2+z)} + z + \dfrac{7}{4} & -2 \leq z < -1 \\ 1 + \dfrac{1}{4} e^{-4(2+z)} - \dfrac{1}{4} e^{-4(1+z)} & z \geq -1 \end{cases}$ ______ 3 分

$f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 0 & z < -2 \\ -e^{-4(2+z)} + 1 & -2 \leq z < -1 \\ -e^{-4(2+z)} + e^{-4(1+z)} & z \geq -1 \end{cases}$ ______ 4 分

五、(10 分) 解

设 X 为 120 个终端中使用打印机的终端个数，则 $X \sim b(120, \dfrac{3}{60})$ ______ 3 分

由中心极限定理，

$$P\{X \geq 10\} = P\{\frac{X - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}} \geq \frac{10 - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}}\} \approx 1 - \Phi(\frac{10 - 120 \times \frac{3}{60}}{\sqrt{120 \times \frac{3}{60} \times \frac{57}{60}}})$$

$= 1 - \Phi(\dfrac{4}{\sqrt{5.7}})$ ______ 10 分

（采用 $P\{10 \leq X \leq 120\}$ 计算也给满分，无二项分布表达式不扣分）

六、（8 分）解

1）似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$ ________ 2 分

$=\lambda^{2n}e^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i$ ________ 4 分

$\ln L(x_1,\cdots,x_n)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ________ 6 分

$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ ________ 7 分

$\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$ ________ 8 分

（似然函数错误，基本思路正确酌情给 5-8 分）

七、（10 分）解 每 0.25 公顷平均出材量置信区间为

$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$ ________ 5 分

$=(22-t_{0.025}(24)\frac{2.5}{\sqrt{25}},\bar{x}+t_{0.025}(24)\frac{2.5}{\sqrt{25}})$ ________ 8 分

$=(22-2.06\times\frac{1}{2},22+2.06\times\frac{1}{2})$ ________ 9 分

$=(20.97, 23.03)$ 立方米

每公顷平均出材量置信区间为

$(20.97\times4,\quad 23.03\times4)=(83.88, 92.12)$ 立方米 ________ 10 分

八、（10 分）（只做一个假设检验得 7 分，其中拒绝域得 6 分）解

假设检验（1）$H_0 : E(X) = \mu = 500; H_1 : \mu \neq 500$ ________ 2 分

（2）$H'_0 : D(X) = \sigma^2 \leq 8^2; H'_1 : \sigma^2 > 8^2$ ________ 3 分

（1）采用 t 检验法：若 H_0 为真，则 $t = \dfrac{\overline{X} - 500}{\sqrt{s^2 / 25}} \sim t(24)$

拒绝域 $|t| = \left| \dfrac{\bar{x} - 500}{\sqrt{s^2 / 25}} \right| \geq t_{0.025}(24) = 2.064$ ________ 6 分

计算得到 $t = \dfrac{\bar{x} - 500}{\sqrt{s^2 / 25}} = \dfrac{502 - 500}{9/5} = \dfrac{10}{9} < 2.064$

不在拒绝域内，故接受原假设 H_0，认为灌装重量均值正常。 ________ 7 分

（2）采用 χ^2 检验：若 H_0' 为真，则 $\chi^2 = \dfrac{(25-1)S^2}{8^2} \sim \chi^2(24)$

拒绝域为 $\chi^2 = \dfrac{(25-1)s^2}{8^2} \geq \chi^2_{0.05}(24) = 36.4$ ________ 9 分

计算得到 $\chi^2 = \dfrac{(25-1)9^2}{8^2} = 30.375 < \chi^2_{0.05}(24)$

不在拒绝域内，故接受原假设 H_0'，认为灌装机标准差在正常范围内。

由（1）和（2）的结论，认为机器正常。 ________ 10 分

九、（6分）解 设$Y_1 = X_2 + X_3, Y_2 = X_2 - X_3$，则

$$COV(Y_1, Y_2) = COV(X_2 + X_3, X_2 - X_3)$$

$$= D(X_2) - D(X_3) = 0$$

Y_1与Y_2不相关，由于Y_1和Y_2都服从正态分布，从而Y_1与Y_2相互独立。由此可知

$X_1 + X_2 + X_3 = X_1 + Y_1$与$Y_2$相互独立。 ______ 2分

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0,1)$$ ______ 4分

$$\frac{X_2 - X_3}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_2 - X_3)^2}{2} \sim \chi^2(1)$$ ______ 5分

由t分布定义知

$$\frac{\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(X_2 - X_3)^2}{2}}} \sim t(1)，即 U = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_2 - X_3|} \sim t(1)。$$ ______ 6分