三、典型例题

例1 一个工人生产了3个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$, 试用 A_i $(i=1,2,3)$ 表示下列事件 :

(1) 只有第一个零件是合格品 (B_1);

(2) 三个零件中只有一个零件是合格品 (B_2);

(3) 第一个是合格品,但后两个零件中至少有一个次品 (B_3);

(4) 三个零件中最多只有两个合格品 (B_4);

(5) 三个零件都是次品 (B_5).

解 (1) $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(2) $B_2 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \quad \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \quad \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$;

(3) $B_3 = A_1(\overline{A_2} \quad \overline{A_3})$;

(4) $B_4 = \overline{A_1A_2A_3}$, 或 $B_4 = \overline{A_1} \quad \overline{A_2} \quad \overline{A_3}$;

(5) $B_5 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, 或 $B_5 = \overline{A_1 \quad A_2 \quad A_3}$.

说明 一个事件往往有多个等价的表达方式 .

例2 设随机事件 A,B,C 满足 $C \supset AB$, $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$. 证明: $AC = C\overline{B} \quad AB$.

证明 由于 $\overline{C} \supset \overline{A}\,\overline{B}$, 故 $C \subset A \quad B$,

从而 $C\overline{B} \subset (A \quad B)\overline{B} = A\overline{B}$,

$CA\overline{B} \subset C\overline{B} \quad A\overline{B} = C\overline{B}$,

$ACB = C \quad AB = AB$,

故 $AC = AC(B \quad \overline{B}) = ACB \quad AC\overline{B}$

$= C\overline{B} \quad AB$.

例3 假设目标出现在射程之内的概率为0.7,这时射击命中目标的概率为0.6,试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率.

[思路] 引进事件

$A = \{$目标进入射程$\}$;

$B_i = \{$第i次射击命中目标$\}, i = 1,2.$

故所求概率为事件 $B = B_1 \quad B_2$ 的概率,由于目标不在射程之内是不可能命中目标的,因此 , 可利用全概率公式来求解.

解 由题意知

$P(A)=0.7, \ P(B_i|A)=0.6, \quad (i=1,2)$

由于 $P(\overline{A}B)=0$, 因为 $\overline{A}$ 表示目标不在射程之内 , 因此由全概率公式,有

$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(AB)$

$= P(A)P(B|A)$

$= P(A)P(B_1 \quad B_2|A)$,

由题意知 B_1 与 B_2 相互独立,

从而 $P(B_1B_2|A) = P(B_1|A)P(B_2|A)$

$= 0.6 \times 0.6 = 0.36.$

由加法公式得

$P(B_1 \quad B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$

$= 0.6 + 0.6 - 0.36$

$= 0.84.$

故 $P(B) = P(A) = P(B_1 \quad B_2|A)$

$= 0.7 \times 0.84 = 0.588.$

例4 设有来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份,随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p;

(2) 已知后抽到的一份表是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 p.

[思路] 由于抽到的表与来自哪个地区有关,故此题要用全概率公式来讨论.

解 记 $H_i=\{$抽到地区考生的报名表$\}$, $i=1,2,3$;

$A_j=\{$第 j 次抽到报名表是男生的$\}$, $j=1,2$,

则有 $P(H_i)=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3)$; $P(A_1|H_1)=\dfrac{7}{10}$;

$P(A_1|H_2)=\dfrac{8}{15}$; $P(A_1|H_3)=\dfrac{20}{25}$.

(1) 由全概率公式知

$$p=P(\overline{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) $q=P(\overline{A}_1|A_2)=\dfrac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}$, 由全概率公式得

$$P(\overline{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2|H_i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(\overline{A}_1A_2|H_i),$$

又因为 $P(\overline{A}_1A_2|H_1)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{30}$,

$$P(\overline{A}_1A_2|H_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30},$$

$$P(\overline{A}_1A_2|H_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}.$$

所以 $P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7}{30}+\dfrac{8}{30}+\dfrac{5}{30}\right]=\dfrac{2}{9}$,

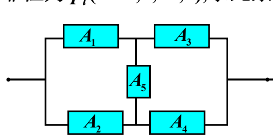
而 $P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(A_2|H_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

所以 $q=\dfrac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{2}{9}\Big/\dfrac{61}{90}=\dfrac{20}{61}.$

例5 桥式电路系统由5个元件组成(如图所示),设元件A_i的可靠性为 $p_i(i=1,2,\quad,5)$,求此系统的可靠性.



[思路] 为了求系统的可靠性,分两种情况讨论:

(1) 当 A_5 工作正常时,相当于 A_1,A_2 并联,与 A_3,A_4 并联电路再串联而得.

(2) 当 A_5 失效时,相当于 A_1,A_3 串联再与 A_2,A_4 串联电路进行并联而得.

解 记 $B_i=\{$元件A_i正常工作$\}$, $i=1,2,\quad,5$,

$C=\{$系统正常工作$\}$.

从而由全概率公式知

$$P(C)=P(B_5)P(C|B_5)+P(\overline{B}_5)P(C|\overline{B}_5).$$

而 $P(C|B_5)=P[(B_1\quad B_2)\quad(B_3\quad B_4)]$

$$=[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)],$$

$$P(C|\overline{B}_5)=P(B_1B_3\quad B_2B_4)$$
$$=1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4),$$

所以

$$P(C)=p_5[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_3)(1-p_4)]$$
$$+(1-p_5)[1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)].$$

三、典型例题

例1 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$,试求概率 $P\{|X|\le 2|X\ge 0\}$.

[思路] 首先根据概率分布的性质求出常数 a 的值, 然后确定概率分布律的具体形式 ,最后再计算条件概率.

解 利用概率分布律的性质 $\sum_i p_i=1,$

有 $1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a},$

故 $a=\frac{37}{8},$

因此 X 的分布律为

X	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{8}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{7}{37}$

从而

$$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}=\frac{P\{|X|\le 2,X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}$$
$$=\frac{P\{X=0\}+P\{X=2\}}{P\{X=0\}+P\{X=2\}+P\{X=\sqrt{5}\}}$$
$$=\frac{22}{29}.$$

例2 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,试确定常数 a,b,并求 X 的分布律.

[思路] 首先利用分布函数的性质求出常数 a, b, 再用已确定的分布函数来求分布律 .

解 利用分布函数 $F(x)$ 的性质 :

$$P\{X=x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0),$$
$$F(+\infty)=1,$$

知 $\frac{1}{2}=P\{X=2\}$
$$=(a+b)-(\frac{2}{3}-a)$$
$$=2a+b-\frac{2}{3},$$

且 $a+b=1.$

由此解得 $a=\frac{1}{6},b=\frac{5}{6}.$

因此有 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{6}, & -1\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

从而 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

例3 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=Ae^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

(1) 求系数 A;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 (1) 由概率密度的性质,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}Ae^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2A,$$

故 $A=\frac{1}{2}.$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x,$

当 $x<0$ 时,有 $F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{x};$

当 $x\ge 0$ 时,有 $F(x)=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x]=1-\frac{1}{2}e^{-x};$

所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

(3) 由于 $Y=X^2\ge 0,$

故当 $y\le 0$ 时,有 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0;$

当 $y>0$ 时,有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

由于 $F_Y'(y)=f_Y(y),$

故当 $y>0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}\,\mathrm{d}x]$$

$$=e^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

从而, Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例4 设某城市成年男子的身高 $X\sim N(170,6^2)$ (单位 : cm)

(1) 问应如何设计公共汽车车门的高度,使男子与车门顶碰头的几率小于 0.01?

(2) 若车门高为 182 cm,求 100 个成年男子与车门顶碰头的人数不多于 2 的概率.

[思路] 设车门高度为 l cm, 那么按设计要求应有 $P\{X>l\}<0.01$,确定 l. 第二问首先要求出100名男子中身高超过 182cm 的人数的分布律,然后用此分布律,求其不超过2的概率.

解 (1)由题设知 $X \sim N(170,6^2)$,

$$P\{X>l\}=1-P\{X\le l\}$$
$$=1-P\left\{\frac{X-170}{6}\le\frac{l-170}{6}\right\}$$
$$=1-\Phi\left(\frac{l-170}{6}\right)<0.01,$$

即 $\Phi(\frac{l-170}{6})>0.99.$ 查表得 $\frac{l-170}{6}>2.33,$

故 $l>183.98(\text{cm}).$

(2) 设任一男子身高超过 182cm 的概率为 p.

则 $p=P\{X>182\}=P\left\{\frac{X-170}{6}>\frac{182-170}{6}\right\}$
$$=1-\Phi(2)=0.0228.$$

设 Y 为100 个男子中身高超过 182cm 的人数,

则 $Y\sim B(100,\,0.0228)$, 其中

$$P\{Y=k\}=\binom{100}{k}\times0.0228^k\times0.9772^{100-k},\quad k=0,1,\ \ ,100.$$

所求概率为

$P\{Y\le2\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}+P\{Y=2\}$,

由于 $n=100$ 较大, $p=0.0228$ 较小,故可用泊松分布来计算,其中 $\lambda=np=2.28$,

从而

$$P\{Y\le2\}=\frac{2.28^0\mathrm{e}^{-2.28}}{0!}+\frac{2.28\mathrm{e}^{-2.28}}{1!}+\frac{2.28^2\mathrm{e}^{-2.28}}{2!}$$
$$=0.6013.$$

例5 设某仪器上装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,其中参数 $\lambda=1/600$,试求在仪器使用的最初200小时内,至少有一只元件损坏的概率a.

[思路] 以 $A_i(i=1,2,3)$ 分别表示三个电子元件“在使用的最初 200 小时内损坏”的事件,

于是 $a=P\{A_1\ \ A_2\ \ A_3\}=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}),$$

由三个电子元件服从同一分布,

令 $p=P(A_i)\quad(i=1,2,3)$,

由指数分布求出 p ,便可得解.

解 用 $X_i\ (i=1,2,3)$ 表示第 i 个元件的使用寿命,由题设知 $X_i\ (i=1,2,3)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\le0.\end{cases}$$

从而

$$P\{X_i>200\}=\int_{200}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},\quad i=1,2,3.$$

又 $P\{X_i>200\}=P(\overline{A_i})=p$,

因此所求概率为

$$\alpha=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$
$$=1-p^3=1-(\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})^3$$
$$=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

备用例题

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品，从10件产品中不放回地抽取3件，用 X 表示其中的一等品数，Y 表示其中的二等品数．求：

(1) (X,Y) 的联合分布律；

(2) X,Y 的边缘分布律；

(3) X 和 Y 是否独立；

(4) 在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件分布律．

解 由题设知 X 只能取 0, 1, 2,

Y 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时，有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2\le i+j\le 3$ 时，由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的 (X,Y) 的分布律为

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X,Y 的边缘分布律为

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X=0,Y=0\}=0,$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立．

(4) 在 $X=0$ 的条件下，Y 的条件概率为

$$P\{Y=j|X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=j\}}{P\{X=0\}},\quad j=0,1,2,3.$$

因此 Y 的条件分布律为

$Y=j\|X=0$	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

例2 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4独立同分布,且

$P\{\xi_i=0\}=0.6,\quad P\{\xi_i=1\}=0.4,\quad i=1,2,3,4.$

求:(1) 行列式 $\xi=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{vmatrix}$ 的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$ 只有零解的概率.

[思路] 要求行列式 ξ 的分布律,先要将 ξ 的所有可能值找到,然后利用独立性将取这些值的概率计算出来，而第二问就是求系数行列式 $\xi\neq 0$ 的概率.

解 (1) 记 $\eta_1=\xi_1\xi_4,\eta_1=\xi_2\xi_3,$

则 $\xi=\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3=\eta_1-\eta_2,$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4相互独立,故η_1,η_2也相互独立,

且η_1,η_2都只能取 0, 1 两个值,

而 $P\{\eta_1=1\}=P\{\eta_2=1\}=P\{\xi_2=1,\xi_3=1\}$

$=P\{\xi_2=1\}P\{\xi_3=1\}=0.16,$

$P\{\eta_1=0\}=P\{\eta_2=0\}=1-0.16=0.84.$

随机变量 $\xi=\eta_1-\eta_2$ 有3个可能取值 $-1, 0, 1.$

$P\{\xi=-1\}=P\{\eta_1=0,\eta_2=1\}=P\{\eta_1=0\}P\{\eta_2=1\}$

$=0.84\times0.16=0.1344,$

$P\{\xi=1\}=P\{\eta_1=1,\eta_2=0\}$

$=P\{\eta_1=1\}P\{\eta_2=0\}$

$=0.16\times0.84=0.1344,$

$P\{\xi=0\}=1-P\{\xi=-1\}-P\{\xi=1\}=0.7312.$

于是行列式 ξ 的分布律为

ξ	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

(2) 由于齐次方程

$\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0\end{cases}$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0, 等价于

$P\{\xi\neq0\}=1-P\{\xi=0\}=1-0.7312=0.2688.$

例3 设随机变量 (X,Y) 服从

$D=\{(x,y)\mid y\geq0,\ x^2+y^2\leq1\}$ 上的均匀分布, 定义随机变量 U,V 如下

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leq X<Y,\\ 2, & X\geq Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\geq\sqrt{3}Y,\\ 1, & X<\sqrt{3}Y.\end{cases}$$

求 (U,V) 的联合概率分布,并计算 $P\{UV\neq0\}$.

[思路] 写出 (U,V) 的所有可能取值,并利用均匀分布的特征计算其取值的概率.

解 由题设知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

(U,V) 有6个可能取值:

(0,0) (0,1) (1,0) (1,1) (2,0) (2,1)

$P=\{U=0,V=0\}=P(\varnothing)=0,$

$P=\{U=1,V=0\}=P(\varnothing)=0,$

$P=\{U=1,V=1\}=P\{0\leq X<Y, X<\sqrt{3}Y\}$

$$= P\{0 \le X < Y\} = \iint\limits_{0 \le x < y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{0 \le x < y} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

$$P = \{U = 0, V = 1\} = P\{X < 0, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X < 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P = \{U = 2, V = 0\} = P\{Y \le X, X \ge \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X \ge \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{6},$$

$$P = \{U = 2, V = 1\} = P\{Y \le X, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{Y \le X < \sqrt{3}Y\} = \frac{1}{12}.$$

所以 (U,V) 的联合概率分布为

$V \backslash U$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

从而

$$P\{UV \ne 0\}$$

$$= P\{U = 1, V = 1\} + P\{U = 2, V = 1\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

例4 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X < 1 | Y < 2\}, P\{X < 1 | Y = 2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(6) 求 $Z = X + Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X + Y < 1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y) < 1\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, 得

$$1 = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y cxe^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\Gamma(3) = c,$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

(2) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} xe^{-y}\,\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \int_0^y xe^{-y}\,\mathrm{d}x, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

由于在 $0 < x < y < +\infty$ 上, $f(x,y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$,
故 X 与 Y 不独立.

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\begin{cases}e^{x-y}, & 0<x<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(4) $P\{X<1|Y<2\}=\dfrac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2}f_Y(y)\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2 xe^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_0^2\frac{1}{2}y^2e^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1-2e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}}{1-5e^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_{-\infty}^{1}f_{X|Y}(x|2)\,\mathrm{d}x,$$

而 $f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

从而有

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有：

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$
$$=\int_0^y\mathrm{d}v\int_0^v ue^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2e^{-v}\,\mathrm{d}v$$
$$=1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}.$$

当 $0\le x<y<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x\mathrm{d}u\int_u^y ue^{-v}\,\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^x u(e^{-u}-e^{-y})\,\mathrm{d}u$$
$$=1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ 1-(\frac{y^2}{2}+y+1)e^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)e^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$,

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$, 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时，从而有:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\ge0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x$

$$=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-\frac{z}{2}} & z\ge0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1[\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1,Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

例5 设随机变量 (X,Y) 在矩形

$$G=\{(x,y)|0\leq x\leq 2,0\leq y\leq 1\}$$

上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 由题设知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 若(x,y)\in G,\\ 0, & 若(x,y)\notin G.\end{cases}$$

$S=X\cdot Y$，设 $F(s)=P\{S\leq s\}$ 为 S 的分布函数，

则当 $s<0$ 时，$F(s)=P\{XY\leq s\}=0$，

当 $s\geq 2$ 时， $F(s)=P\{XY\leq s\}=1$，

当 $0\leq s<2$ 时，

$$F(s)=P\{S\leq s\}=P\{XY\leq s\}=1-P\{XY>s\}$$

$$=1-\iint_{xy>s}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

故 $$f(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0\leq s<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

备用例题

三、典型例题

例1 设 X 服从几何分布，它的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p$ (其中 $q=1-p$)

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}$$

$$=\frac{p(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

例2 从数字0, 1, 2, …, n中任取两个不同的数字，求这两个数字之差的绝对值的数学期望 .

解 设 X 为所选的两个数字之差的绝对值，

则 X 的所有可能取值为 $1,2,3,\cdots,n$,

$$P\{X=1\}=n\Big/\binom{n+1}{2},\ P\{X=2\}=(n-1)\Big/\binom{n+1}{2},$$

一般的 $P\{X=k\}=(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2},\ k=1,2,\cdots,n.$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(n-k+1)\Big/\binom{n+1}{2}=\frac{n+2}{3}.$$

例3 设随机变量 X 取非负整数值 $n\ge 0$ 的概率为 $p_n=\dfrac{AB^n}{n!}$,已知 $E(X)=a$,求 A 与 B 的值.

解 因为 p_n 是 X 的分布列,

$$\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}A\cdot\frac{B^n}{n!}=Ae^B=1,\quad 得A=e^{-B},$$

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}nA\cdot\frac{B^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\cdot B^n}{(n-1)!}=ABe^B=a,$$

因此 $A=e^{-a},\quad B=a.$

例4 某银行开展定期定额有奖储蓄，定期一年,定额60元, 按规定10000个户头中, 头等奖一个,奖金500元; 二等奖10个, 各奖100元; 三等奖100个, 各奖10元; 四等奖1000个, 各奖2元. 某人买了五个户头, 他期望得奖多少元？

解 因为任何一个户头获奖都是等可能的，先计算一个户头的得奖金数 X 的期望.

分布列为

X	500	100	10	2	0
p	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8889}{10^4}$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{10^4}\times 500+\frac{1}{10^3}\times 100+\frac{1}{10^2}\times 10+\frac{1}{10}\times 2$$

$$=0.45\,(元),$$

买五个户头的期望得奖金额为

$$E(5X)=5E(X)=5\times 0.45=2.25\,(元).$$

例5 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}c(1-x^2)^{\alpha}, & -1<\alpha<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad (x<0)$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 因为 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}cx(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x=0,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E(X^2)$$

$$=\int_{-1}^{1}cx^2(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{c}{2(\alpha+1)}x(1-x^2)^{\alpha+1}\Big|_{-1}^{1}+\frac{c}{2(\alpha+1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2(\alpha+1)}\boxed{\int_{-1}^{1}c(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x}-\frac{1}{2(\alpha+1)}\boxed{\int_{-1}^{1}cx^2(1-x^2)^{\alpha}\mathrm{d}x}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=1\qquad =\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=D(X)$$

于是 $D(X)=\dfrac{1}{2(\alpha+1)}-\dfrac{1}{2(\alpha+1)}D(X),$

故 $D(X)=\dfrac{1}{2\alpha+3}.$

例6 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,

求 $E[\min(|X|,1)]$.

解 $E[\min(|X|,1)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{|x|<1}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\ge 1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{|x|\ge 1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.$$

例7 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$

且 $Z=\cos(X+Y)$，求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos 2x-\cos(\pi+2x)]\mathrm{d}x=0,$$

$D(Z)=E(Z^2)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2(x+y)\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^3 x-\cos^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{9}.$$

例8 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}(x^2+\dfrac{1}{2}xy), 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$

求 (X,Y) 的协方差矩阵及相关系数.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=\dfrac{39}{70}-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{23}{490},$

因为 $E(Y)=\int_0^1\int_0^2\dfrac{6}{7}y(x^2+\dfrac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\dfrac{8}{7},$

$$E(Y^2)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=\dfrac{34}{21}-\left(\dfrac{8}{7}\right)^2=\dfrac{46}{147},$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$$

于是 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}\dfrac{23}{490} & -\dfrac{1}{147}\\ -\dfrac{1}{147} & \dfrac{46}{147}\end{pmatrix}$.

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{69}.$

备用例题

三、典型例题

例1 假设 $X_1,X_2,\ ,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$. 证明：当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数.

解 因为 $X_1,X_2,\ ,X_n$ 独立同分布，

所以 $X_1^2,X_2^2,\ ,X_n^2$ 也独立同分布，

且 $E(X_i^2)=\alpha_2$,

$D(X_i^2)=E(X_i^4)-(EX_i^2)^2=\alpha_4-\alpha_2^2$,

根据**独立同分布的中心极限定理**知

$$V_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}}$$

的极限分布是标准正态分布.

故当 n 充分大时,

V_n 近似服从标准正态分布,

从而当 n 充分大时,

$Z_n=\sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_4-\alpha_2^2)}V_n+\alpha_2$ 近似服从

参数为 $\mu=\alpha_2,\ \sigma^2=\dfrac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$ 的正态分布.

例2 现有一批种子,其中良种占 $\frac{1}{6}$,今在其中任选 6000 粒,试问在这些种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 之差的绝对值小于 $\frac{1}{1000}$ 的概率是多少?

解 令 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 粒是良种},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 粒不是良种},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$

则 $P(X_i=1)=\frac{1}{6}$, 记 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,

则 $Y_n\sim B\left(n,\frac{1}{6}\right)$, $n=6000$.

根据题意，所求概率为

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\frac{1}{1000}\right)=P(|Y_n-1000|\le 6),$$

因为 $Y_n\sim B\left(6000,\ \frac{1}{6}\right)$,

由**中心极限定理**有:

Y_n 近似服从 $N\left(1000,\ 1000\times\frac{5}{6}\right)$,

所以 $P\left(\left|\frac{Y_n}{6000}-\frac{1}{6}\right|\le\frac{1}{1000}\right)$

$$=P\left(\left|\frac{Y_n-1000}{\sqrt{1000\times 5/6}}\right|\le\frac{6}{\sqrt{1000\times 5/6}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5000}}\right)-1=2\Phi(0.208)-1$$

$$=2\times 0.5832-1=0.1664.$$

例3 假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$,试求在 100 次独立重复测量中,至少有 3 次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α,并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字,$\Phi(1.96)=0.975$).

解 设 p 为每次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率,

$$p=P\{|X|>19.6\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>\frac{19.6}{10}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{|X|}{10} > 1.96\right\} = 2 \cdot P\left\{\frac{X}{10} > 1.96\right\}$$
$$= 2 - 2\Phi(1.96) = 0.05,$$

设 k 为100次独立测量中事件 $\{|X| > 19.6\}$ 出现的次数，

则 k 服从参数为 $n = 100, p = 0.05$ 的二项分布，

故 $\alpha = P\{k \geq 3\} = 1 - P\{k < 3\}$

$$= 1 - 0.95^{100} - 100 \times 0.95^{99} \times 0.05 - \frac{100 \times 99}{2} \times 0.95^{98} \times 0.05^2$$

由**泊松定理**知，

k 近似服从参数 $\lambda = np = 100 \times 0.05$ 的泊松分布，

故 $\alpha = P\{k \geq 3\} = 1 - P\{k < 3\}$

$$\approx 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} - \frac{5e^{-5}}{1!} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!}$$
$$= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) \approx 0.87.$$

备 用 例 题

三、典型例题

例1 设 X 服从 $N(0,1)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_6)$为来自总体 X 的简单随机样本，

$$Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$$

试决定常数 C, 使得 CY 服从 χ^2 分布.

解 根据正态分布的性质，

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3),$$
$$X_4 + X_5 + X_6 \sim N(0,3),$$

则 $\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$,

$$\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}} \sim N(0,1),$$

故 $\left(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$,

$$\left(\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}}\right)^2 \sim \chi^2(1),$$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 相互独立及 χ^2 分布的可加性，

$$\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{X_4 + X_5 + X_6}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}[(X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2] \sim \chi^2(2),$$

所以 $C = \dfrac{1}{3}$, CY 服从 χ^2 分布.

例2 设 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$的容量为n的两样本 $(X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{1n})$ 和 $(X_{21}, X_{22}, \cdots, X_{2n})$ 的样本均值，试确定 n, 使得这两个样本均值之差超过σ的概率大约为0.01.

解 $\bar{X}_1 \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, $\bar{X}_2 \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,

则 $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(0, \dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$,

$$P\{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > \sigma\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{2/n}\,\sigma}\right| > \sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{2/n}\sigma}\right|\le\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$\approx 1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]=2-2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)=0.01,$$

有 $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\approx 0.995$, 查标准正态分布表知

$\sqrt{\frac{n}{2}}=2.58$, 于是 $n=14$.

例3 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,从此总体中取一个容量为 $n=16$ 的样本 $(X_1,X_2,\quad,X_{16})$,求概率

(1) $P\left\{\frac{\sigma^2}{2}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le 2\sigma^2\right\}$;

(2) $P\left\{\frac{\sigma^2}{2}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\le 2\sigma^2\right\}$.

解 (1) 因为 $X_1,X_2,\quad,X_{16}$ 是来自正态总体的样本,

所以 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$,

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le 2\sigma^2\right\}$

$$=P\left\{8\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\mu)^2\le 32\right\}$$

$$=P\{8\le\chi^2(16)\le 32\}$$

$$=P\{\chi^2(16)\le 32\}-P\{\chi^2(16)\le 8\}$$

$$=[1-P\{\chi^2(16)\ge 32\}]-[1-P\{\chi^2(16)\ge 8\}]$$

$$=0.94;$$

(2)因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$,

于是 $P\left\{\frac{\sigma^2}{2}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\le 2\sigma^2\right\}$

$$=P\left\{8\le\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2\le 32\right\}$$

$$=P\{8\le\chi^2(15)\le 32\}$$

$$=P\{\chi^2(15)\ge 8\}-P\{\chi^2(15)\ge 32\}=0.98.$$

备用例题

三、典型例题

例1 设 $X_1,X_2,\quad,X_n$ 是来自参数为 p 的 $(0-1)$ 分布的一个样本,求参数 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$,并验证它是达到方差界的无偏估计量.

解 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$,

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p},$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0$, 得 $(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i=p\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$,

故参数 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,

参数 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$,

$$E(\hat{p}) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p,$$

所以 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计量.

又因为 $f(x;\, p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$

$$\ln f(x;\, p) = x \ln p + (1-x)\ln(1-p),$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\, p)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p},$$

$$E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\, p)}{\partial p}\right]^2\right\} = \sum_{x=0,1}\left[\frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}\right]^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\cdot(1-p) + \frac{1}{p^2}\cdot p = \frac{1}{p(1-p)},$$

因为 $f(x;p)$ 的参数 p 的任何一个无偏估计量 $\hat{p}(X_1, X_2, \quad, X_n)$ 都满足不等式

$$D(\hat{p}) \ge \frac{n}{E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\, p)}{\partial p}\right]^2\right\}} = \frac{p(1-p)}{n},$$

对于参数 p 的无偏估计量 $\hat{p} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$

$$D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot p(1-p) = \frac{1}{n} p(1-p),$$

故 $\hat{p} = \overline{X}$ 是总体分布参数 p 的达到方差界的无偏估计量.

例2 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现对该区进行磁测, 按仪器规定其方差不得超过 0.01, 今抽测 16 个点, 算得 $\bar{x} = 12.7$, $s^2 = 0.0025$, 问此仪器工作是否稳定 $(\alpha = 0.05)$?

解 $n = 16$, $\alpha = 0.05$, $\chi^2_{0.025}(15) = 27.5$, $\chi^2_{0.975}(15) = 6.26$, σ^2 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = (0.00136,\ 0.00599),$$

由于方差 σ^2 不超过 0.01, 故此仪器工作稳定.

备用例题

三、典型例题

例1 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，问在显著性水平0.05下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70分？并给出检验过程.

解 设该次考试的学生成绩为 X, $\alpha = 0.05$,

则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本标准差为 S,

需检验假设: $H_0: \mu = 70, \quad H_1: \mu \ne 70.$

因为 σ^2 未知, 故采用 t 检验法, 当 H_0 为真时,

统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X} - 70}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$

查表 8-1 知拒绝域为 $|t| = \dfrac{|\overline{X} - 70|}{S/\sqrt{n}} \ge t_{\alpha/2}(n-1),$

由 $n = 36$, $\overline{X} = 66.5$, $S = 15$, $t_{0.025}(35) = 2.0301$,

得 $|t| = \dfrac{|\overline{X} - 70|}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{|66.5 - 70|}{15/\sqrt{36}} = 1.4 < 2.0301,$

所以接受 H_0, 认为全体考生的平均成绩是70分.

例2 某砖厂制成两批机制红砖，抽样检查测量砖的抗折强度(千克), 得到结果如下:

第一批: $n_1=10,\ \bar{x}=27.3,\ S_1=6.4;$

第二批: $n_2=8,\ \bar{y}=30.5,\ S_2=3.8;$

已知砖的抗折强度服从正态分布，试检验:

(1)两批红砖的抗折强度的方差是否有显著差异？

(2)两批红砖的抗折强度的数学期望是否有显著差异？ (均取$\alpha=0.05$)

解 (1) 检验假设: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$

用 F 检验法， 当 H_0 为真时，

统计量 $F=\dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\sim F(n_1-1,\ n_2-1),$

查表 8-1 知拒绝域为

$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$或 $F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1),$

由 $n_1=10,\ n_2=8,\ S_1^2=40.96,\ S_2^2=14.44,$

$F_{0.025}(9,7)=4.82,\quad F_{0.975}(9,7)=\dfrac{1}{F_{0.025}(7,9)}=0.283,$

得 $F=\dfrac{40.96}{14.44}=2.837,$ 显然 $0.283<2.837<4.82,$

所以接受 H_0, 认为抗折强度的方差没有显著差异.

(2) 检验假设: $H_0:\mu_1=\mu_2,\quad H_1:\mu_1\neq\mu_2,$

用 t 检验法， 当 H_0 为真时，

统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}.$

查表 8-1 知拒绝域为 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$

由 $t_{0.025}(10+8-2)=t_{0.025}(16)=2.1199,$

$S_w^2=\dfrac{9\times40.96+7\times14.44}{16}=29.3575,\quad S_w=5.418,$

得 $|t|=\dfrac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{|27.3-30.5|}{5.418\times0.474}=1.245<2.1199,$

所以接受 H_0, 认为抗折强度的期望无显著差异.

备用例题