杭州電子科技大学
HANGZHOU DIANZI UNIVERSITY

2013.4.20 （期中测试）. 整理人：何洪津.

一. 填空题：

(1) 如果事件A, B满足等式：$\underline{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$，则称事件A, B相互独立.

(2) 如果事件A, B满足等式：$\underline{AB=\Phi}$，则称事件A, B互不相容.

(3) 设事件A, B, 则有加法公式 $P(A\cup B)=\underline{P(A)+P(B)-P(AB)}$.

(4). 设随机变量 $X\sim N(10,25)$，则概率 $P\{X>8\}=\underline{\Phi(\frac{2}{5})}$.（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ $(x>0)$ 表示）

提示：$P\{X>8\}=P\{\frac{X-10}{5}>\frac{8-10}{5}\}=1-P\{\frac{X-10}{5}\le -\frac{2}{5}\}=1-\Phi(-\frac{2}{5})=\Phi(\frac{2}{5})$

(5). 设随机变量X和Y是相互独立的，其分布函数分别为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=\underline{1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))}$.

提示：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}$

$=1-P\{X>z, Y>z\}$

$=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$ （利用X和Y的独立性）.

$=1-(1-P\{X\le z\})(1-P\{Y\le z\})=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

二. (1). 已知 $P(A)=0.7$，$P(B|A)=0.4$. 求 $P(A\bar{B})$.

解：$P(A\bar{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)$

$=P(A)-P(AB)$. （$\because AB\subset A$）

又因 $P(B|A)=P(AB)/P(A)\Rightarrow P(AB)=P(B|A)P(A)=0.28$

$\therefore P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.7-0.28=0.42$.

或(法二)：$P(A\bar{B})=P(\bar{B}|A)\cdot P(A)=(1-P(B|A))P(A)$

$=(1-0.4)\times 0.7=0.42$.

2. 设离散型随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ a, & -1\le x<1 \\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2 \\ a+b, & x\ge 2. \end{cases}$

且$P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，求b的值与概率$P\{X=1\}$。

解：根据分布函数$F(x)$的定义，可知：

$$\begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)-(\frac{2}{3}-a)=P\{X=2\}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 1-\frac{2}{3}+a=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6}. \\ b=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

而

$$P\{X=1\}=(\frac{2}{3}-a)-a=\frac{2}{3}-2a=\frac{2}{3}-\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3. 将A, B, C三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为0.8，而输出为其他字母的概率都是0.1. 今将字母 AAAA, BBBB, CCCC 之一输入信道，输入AAAA, BBBB, CCCC 的概率分别为 0.3, 0.3, 0.4.

(1) 求输出为ABAC的概率.

(2) 已知输出为ABAC，问输入的是AAAA的概率是多少？

（设信道传输各个字母的工作是相互独立的）.

解：设D表示输出为ABAC,

D_1表示输入为AAAA,　　则 $P(D_1)=0.3$

D_2表示输入为BBBB.　　则 $P(D_2)=0.3$

D_3表示输入为CCCC,　　则 $P(D_3)=0.4$.

E表示输出为原字母~~的概率~~. $\bar{E}$表示输出为其他字母.

则有 $p(E)=0.8$ $p(\bar{E})=0.1$

(1) 由全概率公式：

$$p(D)=p(D|D_1)\cdot p(D_1)+p(D|D_2)p(D_2)+p(D|D_3)p(D_3)$$

而 $p(D|D_1)=p(E)p(\bar{E})p(E)p(\bar{E})=0.8\times0.1\times0.8\times0.1=0.8^2\times0.1^2$

$p(D|D_2)=p(\bar{E})p(E)p(\bar{E})p(\bar{E})=0.1\times0.8\times0.1\times0.1=0.8\times0.1^3$

$p(D|D_3)=p(\bar{E})p(\bar{E})p(\bar{E})p(E)=0.1\times0.1\times0.1\times0.8=0.8\times0.1^3$

$\therefore p(D)=0.8^2\times0.1^2\times0.3+0.8\times0.1^3\times0.3+0.8\times0.1^3\times0.4=0.00248.$

(2). 由贝叶斯公式有:

$$p(D_1|D)=\frac{p(D_1D)}{p(D)}=\frac{p(D|D_1)p(D_1)}{p(D)}=\frac{0.3\times0.8^2\times0.1^2}{0.00248}$$

$$=\frac{24}{31}$$

三. 将3个球随机地放入4个杯子中去，设随机变量X表示杯子中球的最大个数. (1) 求X的分布律. (2) X的分布函数F(x).

解: (1) 据题意易知，杯子中球的最大个数分别为1, 2, 3. 而:

$P\{X=1\}=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{6}{16}$ (选三个杯子，每个杯子中放一个球，再进行排列)

$P\{X=2\}=A_4^2\cdot C_3^2/4^3=9/16$ (3个球捆绑2个，分成2组，再放入两个杯子中排列)

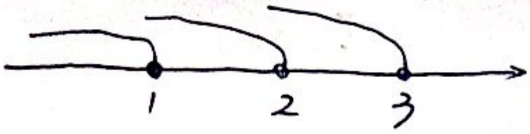
$P\{X=3\}=A_4^1/4^3=1/16$. (3个球都捆绑在一起排列)

也可最后通过 $P\{X=2\}=1-P\{X=1\}-P\{X=3\}=9/16$ 进行计算.

因此：分布律为:

X	1	2	3
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2). 要求 X 的分布函数，根据 $F(x)=\sum\limits_{x_i\le x}P\{X=x_i\}$ 可得：



i) 当 $X<1$ 时，$F(x)=0$.

ii) 当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=1\}=\frac{6}{16}$

iii) 当 $2\le X<3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\frac{9}{16}+\frac{6}{16}=\frac{15}{16}$

iiii) 当 $3<X$ 时，$F(x)=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=1$.

所以：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{6}{16} & 1\le x<2\\ \frac{15}{16} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

为 X 的分布函数.

四. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}k\cos x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求 k　(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$　(3) 求 $P\{|X|>\frac{\pi}{6}\}$

解：(1). 根据概率密度函数定义有：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}k\cos x\,dx=k\cdot\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2k$$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$.　$\therefore$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(2). 根据分布函数定义：$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$　可得：

$$F(x)=\begin{cases}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos t\,dt & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & x\le-\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x\le-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}(1+\sin x) & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x\geq\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

(3). $P\{|X|>\frac{\pi}{6}\}=1-P\{|X|\le\frac{\pi}{6}\}=1-P\{-\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{6}\}$.

$$=1-F(\tfrac{\pi}{6})+F(-\tfrac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

或: $P\{|X|>\frac{\pi}{6}\}=P\{X>\frac{\pi}{6}\text{ 或 }X<-\frac{\pi}{6}\}$

$$=P\{\tfrac{\pi}{6}<X<\tfrac{\pi}{2}\cup-\tfrac{\pi}{2}<X<-\tfrac{\pi}{6}\}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos t\,dt=\frac{1}{2}$$

或: $P\{|X|>\frac{\pi}{6}\}=1-P\{|X|\le\frac{\pi}{6}\}=1-P\{-\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{6}\}$

$$=1-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos t\,dt=\frac{1}{2}.$$

五. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为:

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.2	0.3

求：(1) 关于 X 的边缘分布律；

(2) 关于 $Z=X\cdot Y$ 的分布律；

(3) 在条件 $X=2$ 下关于 Y 的条件分布律；

(4) 概率 $P\{X+Y\le 1\}$ 和条件概率 $P\{X\le 1 \mid X+Y=2\}$；

(5) 问 X 与 Y 是否相互独立？请说明理由。

解：(1). X 的边缘分布律为：

X	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

(2). 根据 X 和 Y 的取值可知，Z 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{Y=0,X=1\}+P\{Y=0,X=2\}$$

$$=0.1+0.1+0.1+0.2=0.5.$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0.2$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=2,Y=1\}=0.3$$

∴ Z 的分布律为：

Z	0	1	2
P	0.5	0.2	0.3

(3). 在 $X=2$ 下，Y 的条件分布律为：

$$P\{Y=j \mid X=2\}=\frac{P\{X=2,Y=j\}}{P\{X=2\}} \quad (j=0,1).$$

因此有，$P\{Y=0 \mid X=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=0\}}{P\{X=2\}}=\dfrac{0.2}{0.5}=0.4.$

$$P\{Y=1 \mid X=2\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{X=2\}}=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$

即有：

Y	0	1
$P\{Y=j \mid X=2\}$	0.4	0.6

(4). $P\{X+Y\le 1\} = P\{X=0, Y\le 1\} + P\{X=1, Y=0\}$

$= P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\}$

$= 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$.

$\because P\{X+Y=2\} = P\{X=i, Y=2-i\}$

$= P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\}$

$= 0 + 0.2 + 0.2 = 0.4$.

$\therefore P\{X\le 1 \mid X+Y=2\} = \dfrac{P\{X\le 1, X+Y=2\}}{P\{X+Y=2\}} = \dfrac{P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\}}{P\{X+Y=2\}}$

$= \dfrac{0+0.2}{0.4} = \dfrac{1}{2}$

(5). 由X和Y的联合分布律可知, Y的边缘分布律为:

Y	0	1
P	0.4	0.6

因此 $P\{X=0, Y=0\} = 0.1 \ne P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\} = 0.2\times 0.4 = 0.08$

$\therefore$ X和Y是不相互独立的.

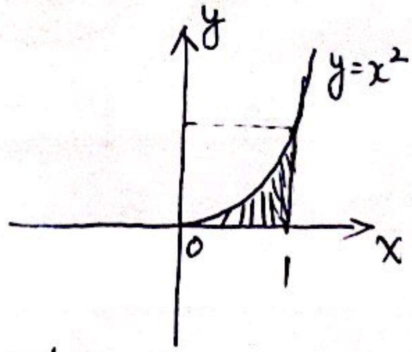
六: 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} cy^2, & 0<x<1,\ 0<y<x^2 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 求常数C.

(2) 求关于X和Y的边缘概率密度; 并问X与Y是否相互独立? 说明理由.

(3). 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.



解：(1). 根据联合概率密度函数的性质可知：

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}cy^2dy=c\int_0^1\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{x^2}\right)dx$$

$$=c\cdot\int_0^1\frac{1}{3}x^6dx=c\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\left(x^7\Big|_0^1\right)=\frac{c}{21}$$

$\therefore\ c=21$. $\quad\therefore$

$$f(x,y)=\begin{cases}21y^2, & 0<x<1,\ 0<y<x^2\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2)

根据分缘概率密度计算公式可知.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{x^2}21y^2dy, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}7x^6, & 0<x<1\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

由于 $0<x<1$, $0<y<x^2$, $\therefore\ 0<y<1$. 且 x 的积分区域为 $\{0<x<1\}\cap\{\sqrt{y}<x\}$

即 关于 x 的积分区域为 $\sqrt{y}<x<1$. 因此：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^1 21y^2dx, & 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}21y^2(1-\sqrt{y}), & 0<y<1.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

显然. 当 $0<y<x^2<1$ 时. $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与 Y 不相互独立。

(3). 当 $0<y<1$ 时. (此范围不能少)

则条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{y}}, & \boxed{\sqrt{y}<x<1} \\ 0, & 其他.\end{cases}$

七. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1. \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求: (1) 概率 $P\{X+Y<1\}$; (2) 概率 $P\{X<\frac{1}{2} \mid Y<\frac{1}{2}\}$

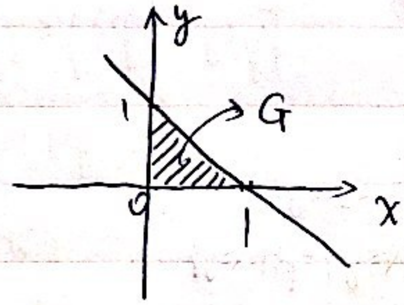
解: (1) 求 $P\{X+Y<1\}$ 则转化成求 $P\{(X,Y)\in G\}$ 的概率.

$$P\{X+Y<1\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \quad (G=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1,\ x+y<1\})$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)\,dy$$

$$\overset{或}{=}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(x+y)\,dx$$

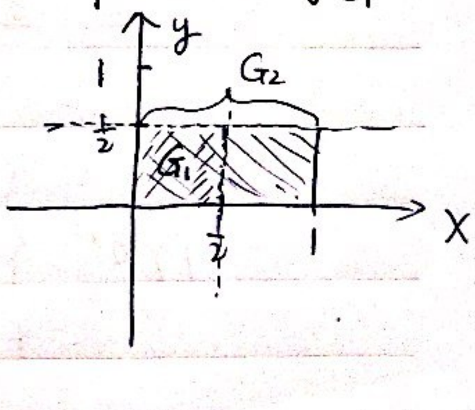
$$=\frac{1}{3}$$



(2). 概率 $P\{X<\frac{1}{2} \mid Y<\frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{X<\frac{1}{2}, Y<\frac{1}{2}\}}{P\{Y<\frac{1}{2}\}}=\dfrac{P\{0<X<\frac{1}{2}, 0<Y<\frac{1}{2}\}}{P\{0<X<1, 0<Y<\frac{1}{2}\}}$

$$=\frac{\iint_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{2}}(x+y)\,dy}{\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}}(x+y)\,dy}=\frac{1}{3}$$

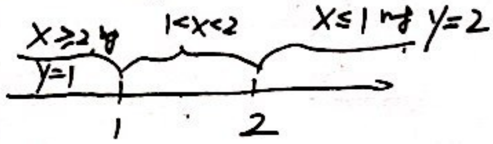


八. 设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0<x<3\\ 0, & 其他.\end{cases}$

而随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2,\end{cases}$

求Y的分布函数 $F_Y(y)$. （这里的Y既不是离散的，也不是连续的随机变量）

解：根据Y的表达式容易发现，Y的取值有两个分界点 $y=1$ 或 $y=2$.
（即Y只在$[1,2]$上取值）



∴ 当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\ge 2$ 时 $F_Y(y)=1$

当 $1\le y<2$ 时，（$\{1\le y<2\}$ 等价于 $\{1<y<2\}\cup\{y=1\}$）

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{(1\le X\le y)\cup(X\ge 2)\}$ （中间包含 $P\{Y=1\}=P\{X\ge 2\}$ 的概率）

$=P\{1\le X\le y\}+P\{X\ge 2\}$

$1<y<2$ 时 $P\{Y\le y\}=P\{1\le X\le y\}$

$=\int_1^y f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

$=\int_1^y \frac{x^2}{9}\,dx+\int_2^3 \frac{x^2}{9}\,dx$

$=\frac{y^3+18}{27}$

∴ $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{y^3+18}{27} & 1\le y<2\\ 1 & y\ge 2.\end{cases}$