概率论与数理统计期末练习题 2013.06

一．填空题

1、如果事件 A,B 满足等式____________ ，则称事件 A,B 相互独立.

2、如果事件 A,B 满足等式____________ ，则称事件 A,B 互不相容.

3、设事件 A,B ，则有加法公式 $P(A\cup B)=$_____________ .

4、设随机变量 $X\sim N(10,25)$ ，则概率 $P\{X>8\}=$ ________（结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)(x>0)$ 表示）.

5、设随机变量 X ， Y 是相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=$_______________ .

6．已知事件 A,B 互不相容， $P(A)=\dfrac{1}{4}$， $P(B)=\dfrac{1}{6}$，则 $P(A\cup B)=$__________ .

7．一个口袋装有 8 个球，其中 6 个白球，2 个红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只，作放回抽样，即第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球。则取到的两只都是白球的概率为__________ .

8. 设随机变量 X 服从 $N(2,9)$ 的正态分布，Y 服从 $b(100,0.8)$ 的二项分布，且 X 与 Y 的相互独立，则 $D(2X-Y+15)$ =__________ .

二、试解下列各题

1．已知 $P(A)=0.7$， $P(B|A)=0.4$，求 $P(A\overline{B})$.

2．设离散型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a, & -1\le x<1\\ \dfrac{2}{3}-a, & 1\le x<2\\ a+b, & x\ge 2\end{cases}$ ，且 $P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，

求 b 的值与随机变量 X 的分布律，数学期望 $E(X)$，方差 $D(X)$.

3. 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 0.8，而输出为其他字母的概率都是 0.1.今将字母 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 0.3,0.3,0.4，（1）求输出为 ABAC 的概率；（2）已知输出为 ABAC，问输入的是 AAAA 的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的）

4. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，设随机变量 X 表示杯子中球的最大个数.（1）求 X 的分布律；(2) X 的分布函数 $F(x)$.

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} k\cos x\,, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0\,,其他 \end{cases}$，（1）求 k；

（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；（3）概率 $P\{|X|>\dfrac{\pi}{6}\}$；（4）数学期望 $E(X)$，方差 $D(X)$.

6.设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为：

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.1	0.2
1	0.1	0.2	0.3

求：（1）关于X的边缘分布律；

（2）关于$Z = X \cdot Y$的分布律；

（3）在条件$X = 2$下关于Y的条件分布律；

（4）概率$P\{X + Y \le 1\}$和条件概率$P\{X \le 1 | X + Y = 2\}$；

（5）问X与Y是否相互独立？需说明理由.

（6）$Cov(X,Y)$，ρ_{XY}；$E(X^2 + 2Y)$；

（7）问X与Y是否不相关？需说明理由.

7.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Cy^2, 0<x<1, 0<y<x^2 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数C；

（2）求关于X和关于Y的边缘概率密度； 并问X与Y是否相互独立？需说明理由；

（3）求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

（4）概率$P\{X+Y\le 1\}$；

（5）$Cov(X,Y)$，ρ_{XY}；$E(X^2+2Y)$；

（6）问X与Y是否不相关？需说明理由.

8. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

求:（1）概率$P\{X+Y<1\}$;（2）概率$P\{Y<\frac{1}{2}\middle|X<\frac{1}{2}\}$;（3）$Z=X-Y$的分布函数$F_Z(z)$.

9. 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{9}, 0<x<3 \\ 0, 其他 \end{cases}$,

设随机变量$Y=\begin{cases} 2, X\le 1 \\ X, 1<X<2 \\ 1, X\ge 2 \end{cases}$，求$Y$的分布函数$F_Y(y)$.

10.一公司有 50 张签约保险单，各张保险单的索赔金额为 $X_i(i=1,2,\cdots,50)$（以千美元计）服从韦布尔分布，均值 $E(X_i)=5$，方差 $D(X_i)=6$，求 50 张保险单的索赔的合计金额大于 300 的概率的近似值.（设各保险单的索赔金额是相互独立. 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

10*. 设产品为废品的概率为 0 .1，求 1000 件产品中废品不大于 80 的概率. （结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

11. 设总体 X 具有密度：$f(x;\alpha)=\begin{cases}(\sqrt{\alpha}+1)x^{\sqrt{\alpha}},0<x<1\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，$\alpha>0$ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$x_1,\cdots,x_n$ 为对应的样本观测值，

求（1）参数 α 的矩估计值与矩估计量；

（2）最大似然估计值与最大似然估计量.

12.设某种清漆的干燥时间（以 h 计）服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现随机地抽取 9 个样品，测得干燥时间的均值 $\overline{x} = 6.1$（小时），样本均方差 $s = 0.6$，σ^2 为未知，求（1）μ 的置信水平为 95%的置信区间；（2）μ 的置信水平为 95%的单侧置信上限.

($t_{0.025}(8) = 2.3060$, $t_{0.025}(9) = 2.2622$，$t_{0.05}(8) = 1.8595$,精确到第二位小数).

13. 设两位化验员 A,B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为 $S_A^2 = 0.552,\ S_B^2 = 0.606$.设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A,B 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的，设两样本独立，求（1）方差比 σ_A^2 / σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间；（2）方差比 σ_A^2 / σ_B^2 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

（$F_{0.025}(9,9) = 4.03$, $F_{0.05}(9,9) = 3.18$）（取两位小数）

14. 某厂生产的某种型号的电池，其寿命（以 h 计）长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000$ 的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变.现随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$.根据这一数据能否推断这批电池的生命的波动性较以往的有显著的变化（取显著性水平 $\alpha = 0.02$）？（$\chi_{0.01}^2(25) = 44.314$，$\chi_{0.99}^2(25) = 11.524$）

15. 某种导线，要求其电阻标准差不超过0.005Ω.今在一批导线中取样品 26 根，测得样本标准差$s=0.007\Omega$，设总体为正态分布，问在显著性水平$\alpha=0.05$下能认为这批导线电阻的标准差显著地偏大吗?

($\chi^2_{0.05}(26)=38.885, \chi^2_{0.05}(25)=37.652$, $\chi^2_{0.025}(26)=41.923, \chi^2_{0.025}(25)=40.646$)

16.某种电子元件的寿命X （以小时计）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2均未知，现测 25 只元件，计算得平均寿命$\overline{x}=231.5$，标准差为$s=30.5$，问是否有理由认为元件的平均寿命是 225（小时）（取$\alpha=0.05$）.（$t_{0.05}(24)=1.7109, t_{0.025}(24)=2.0639$）

17. 设总体X 具有概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 其中$\theta$是未知参数，

$X_1, X_2 ..., X_{\rm n}$是总体X 的一个简单随机样本，$(n>1)$

证明：$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$，$\hat{\theta}_2=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}-\frac{1}{n}$是$\theta$的两个无偏估计量,

并确定哪个更有效.