

一、填充题 (每题 3 分, 共 24 分)

1. 设 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(AB) = 0.3$, 则 $P(A \cup B) =$ _____。
2. 设 $P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$, 当 A、B 相互独立时 $P(B) =$ _____。
3. 一射手对同一目标进行四次独立射击, 若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$, 则该射手命中率为 _____。
4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其分布函数分别为 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$, 则随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(z) =$ _____。
5. 设随机变量 $X \sim U[0, 2]$, 则由切比雪夫不等式 $P\{|X - 1| \leq \frac{5}{6}\} \geq$ _____。
6. 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 X 的分布函数为 $F(x) =$ _____。
7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 3^2)$, X_1, \dots, X_9 是来自总体 X 的简单随机样本, 则统计量 $X_1 + \dots + X_9$ 服从 _____ 分布。
8. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, 样本 X_1, X_2, X_3, X_4 , $Y = a(X_1 + X_2)^2 + b(2X_3 - X_4)^2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____ 时, Y 服从 χ^2 分布, 自由度为 _____。

二、(8 分) 某仪器有三个元件独立工作，烧坏每个元件的概率均为 p ，当烧坏一个元件时，仪器发生故障的概率为 0.25，当烧坏两个元件时，仪器发生故障的概率为 0.6，当烧坏三个元件时，仪器发生故障的概率为 0.9。求仪器发生故障的概率。

三、(12 分) 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律如下：

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0
0	0.1	0	0.2
1	0.2	0.1	0.1

(1) 求 $P\{Y \geq 0\}$;

(2) $E(X)$ 和 $COV(X, Y)$;

(3) X 与 Y 是否相互独立？为什么？

四、(12 分) 设随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 另一随机变量 Y 服从区间 $[2, 4]$ 上的均匀分布, 且 X 与 Y 相互独立。

试求: (1) $P\{X \geq 1\}$;

(2) $E(X^2)$;

(3) 设 $Z = \frac{X-Y}{2}$, 求 Z 的分布函数和概率密度函数。

五、(10 分) 某计算机系统有 120 个终端, 每个终端在一小时内平均有 3 分钟使用打印机, 设各终端是否使用打印机是相互独立的, 试利用中心极限定理求至少有 10 个终端同时使用打印机的概率。

六、(8 分) 设总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

若 $\lambda > 0$ 是未知参数, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体 X 的一组样本观察值, 求 λ 的最大似然估计值 $\hat{\lambda}$ 。

七、(10 分) 在面积为 250 公顷的林区内, 随机抽取 25 块面积为 0.25 公顷的样地, 根据样地上测量的材积资料求出每 0.25 公顷的平均出材量 $\bar{x} = 22$ 立方米, 样本标准差 $s = 2.5$ 立方米, 求置信水平为 0.95 的全林区每公顷出材量 X 的数学期望 μ 的置信区间(假定 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $t_{0.025}(24) = 2.06$, $t_{0.05}(24) = 1.711$, $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.05} = 1.645$)。

八、(10 分) 饮料厂用自动生产线灌装饮料, 规定标准重量为 500 克, 标准差不得超过 8 克 (方差不得超过 64 克^2), 每天定时检查机器灌装情况。现抽取饮料 25 罐, 测得平均重量 $\bar{x} = 502$ 克, 样本标准差 $s = 9$ 克, 如果每罐饮料重量 X 服从正态分布, 试问机器工作是否正常?

($\alpha = 0.05$, $t_{0.025}(24) = 2.064$, $t_{0.05}(24) = 1.711$, $\chi_{0.025}^2(24) = 39.4$, $\chi_{0.05}^2(24) = 36.4$)

九、(6 分) 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 求随机

变量 $U = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{X_1 + X_2 + X_3}{|X_2 - X_3|}$ 的分布。