一、选择题

1. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ $,x\in(-\infty,+\infty)$，则 $Y=$（　　）$\sim N(0,1)$

A．$\frac{X+3}{2}$　　B．$\frac{X+3}{\sqrt{2}}$　　C．$\frac{X-3}{2}$　　D．$\frac{X-3}{\sqrt{2}}$

2．进行重复独立试验，设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，则试验进行到第 n 次才取得 $r(1\le r\le n)$ 次成功的概率为　（　　　）

A．$C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$；　　B．$C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$

C．$p^r(1-p)^{n-r}$；　　D．$C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r+1}$

3．设 $P\{X=k\}=\frac{b}{k(k+1)}$（$k=1,2,\cdots$）为离散型随机变量 X 的分布律，

则常数 $b=$（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．3

4．设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{k}{15}$，$k=1,2,3,4,5$，则 $P\{\frac{1}{2}<X\le\frac{5}{2}\}$=(　　)

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

5．已知连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 c，有 $F(-c)$ 等于（　　）

A．$F(c)$；　B．$\frac{1}{2}-\int_0^c f(x)dx$　　C．$2F(c)-1$；　D．$1-\int_0^c f(x)dx$

6.设X_1和X_2为连续性随机变量，且概率密度函数分别为$f_1(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\0,其他\end{cases}$和$f_2(x)=\begin{cases}1, 1<x<2\\0,其他\end{cases}$，分布函数分别记为$F_1(x)$和$F_2(x)$，则可为某一随机变量的概率密度函数的是（　　）

A. $f_1(x)f_2(x)$　　B. $2f_2(x)F_1(x)$　　C. $f_1(x)F_2(x)$　　D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

7. 设随机变量X_1和X_2的分布函数分别记为$F_1(x)$和$F_2(x)$,为使$aF_1(x)-bF_2(x)$为某一函数的随机变量的分布函数，则在下列给出的各组数值中应取（　　）

A. $a=2/3, b=2/3$　　B. $a=-1/2, b=3/2$

C. $a=3/5, b=-2/5$　　D. $a=1/2, b=-3/2$

二、填空题

1. 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}-x}$ $(-\infty<x<+\infty)$，则 $k=$____ .

2. 设随机变量 X 服从标准正态分布，随机变量 $Y=2(1-X)$，试用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示概率 $P\{Y>0\}=$________________ .

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\0,其他\end{cases}$，则 $Y=X^2$ 的密度函数

$f_Y(y)=$________________ .

4. 设 $X\sim N(5,4)$，已知 $P\{X>a\}=0.1$，$\Phi(1.3)=0.9$，则 $a=$_______ .

5. 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}4x^3, 0<x<1\\ 0,其他\end{cases}$，则当 $a=$___________ 时，有 $P\{X<a\}=P\{X>a\}$.

6. 设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0,其他\end{cases}$，$Y$ 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le\frac{1}{3}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$_____________ .

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(-1,8)$，则它的密度函数是____________ .

8. 设 $F(x)=a+b\arctan x\ (-\infty<x<+\infty)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数，则常数 $a=$______ ，$b=$_______ . 概率密度 $f(x)=$______________ .

9. 设随机变量 X 服从正态分布 $X\sim N(3,\sigma^2)$，若已知 $P\{X<0\}=0.1$，则 $P\{3<X<6\}$ = __________ .

10. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda>0$ 的泊松分布，若已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $\lambda=$__________ .

三、解答题

1、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & 0\le x\le 2,\\ 0\quad, & 其它.\end{cases}$$

求（1）常数 a；（2）X 的分布函数 $F(x)$；（3）$Y=|X-1|$ 的概率密度.

2、设考生的外语成绩（百分制）X 服从正态分布，平均成绩（即参数 μ 之值）为 72 分，96 以上的人占考生总数的 2.3%，今任取 100 个考生的成绩，以 Y 表示成绩在 60 分至 84 分之间的人数，求 Y 的分布律. $(\Phi(2)=0.977,\ \Phi(1)=0.8413)$

3. 设离散型随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a, & -1\le x<1\\ \frac{2}{3}-a, & 1\le x<2\\ a+b, & x\ge 2\end{cases}$，

且 $P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，求 a、b 和 X 的分布律.

4、设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx^2, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

（1）求k；（2）求X的分布函数$F(x)$；（3）概率$P\{|X|>\frac{1}{2}\}$.

5、一学生投篮的命中率为0.6，他连续投篮两次. 设随机变量X表示他投篮命中的次数.（1）求X的分布律？(2) X的分布函数$F(x)$.

6、设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} k\cos x\,,0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0\,,其他 \end{cases}$，

（1）确定常数k；（2）求X的分布函数$F(x)$；（3）概率$P\{|X|>\frac{\pi}{6}\}$.

7、将3只球随机地放入4个杯子中去，设随机变量X表示杯子中球的最大个数.

（1）求X的分布律；(2) X的分布函数$F(x)$.

8、设连续型随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

（1）确定常数k；（2）求X的分布函数$F(x)$；（3）求$P\{\frac{1}{2}<X\le 2\}$.

9、设随机变量X的分布律为：

X	-1	0	1
P	0.2	0.3	0.5

求(1) X的分布函数$F(x)$； (2)$Y=X^2$的分布律； (3)概率$P\{X<1\}$.

10、(1)设随机变量X具有概率密度$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0 \\ 0\,,其他 \end{cases}$，求随机变量$Y=X^2$的概率密度.

(2) 设随机变量X服从$(-1,1)$上的均匀分布，求$Y=X^2$和$Y=|X|$的概率密度.

选择题答案

BBCBBDC

1．分析：概率密度与正态分布的概率密度相似，与正态分布的概率密度比较即可，化

$f(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}-x}=ke^{-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{1}{2}}=k\sqrt{e}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$，得$k\sqrt{e}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，故：

$k=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

2．$\Phi(1)$；因$P\{Y>0\}=P\{2(1-X)>0\}=P\{X<1\}=\Phi(1)$.

3．$f_Y(y)=\begin{cases} 1, 0<y<1 \\ 0\,,其他 \end{cases}$；因$Y=X^2$在[0，1]上单调，且$x=\sqrt{y}$，

由公式： $f_Y(y)=\begin{cases} f(h(y)\left|h'(y)\right|, \alpha<y<\beta \\ 0, else \end{cases}=\begin{cases} f(\sqrt{y})(\sqrt{y})', 0<y<1 \\ 0\text{，其他} \end{cases}$

$=\begin{cases} 1, 0<y<1 \\ 0\text{，其他} \end{cases}$.　　(注：有单调性才能用公式)

4．7.6；因 $X\sim N(5,4)$，$P\{X\le a\}=1-P\{X>a\}=1-0.1=0.9=\Phi(1.3)$

所以：$P\{\frac{X-5}{2}\le\frac{a-5}{2}\}=\Phi(\frac{a-5}{2})=\Phi(1.3)$，得 $\frac{a-5}{2}=1.3$，$a=7.6$.

5．$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$；由题意，$P\{X<a\}=\int_0^a 4x^3dx=a^4$，$P\{X>a\}=\int_a^1 4x^3dx=1-a^4$

所以：$a^4=1-a^4$，得 $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

6．$\frac{8}{243}$；因 $P\{X\le\frac{1}{3}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{3}}2xdx=\frac{1}{9}$，故由二项分布得：$Y\sim b(3,\frac{1}{9})$ 所以：$P\{Y=2\}=C_3^2\cdot(\frac{1}{9})^2\cdot(1-\frac{1}{9})=\frac{8}{243}$.

7．$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{16}}$，$-\infty<x<+\infty$；由正态分布的概率密度函数的定义得.

8．由 $F(-\infty)=0$，得 $a-\frac{\pi}{2}b=0$ 和 $F(+\infty)=1$，得 $a+\frac{\pi}{2}b=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$；$b=\frac{1}{\pi}$，求导得概率密度 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

9．0.4；因 $X\sim N(3,\sigma^2)$ 及对称性，

$P\{3<X<6\}=P\{0<X<3\}=P\{X<3\}-P\{X\le 0\}=0.5-0.1=0.4$.

10．2；由泊松分布的定义：$P\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$，而 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，

即 $\lambda e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda}}{2}$，解得 $\lambda=2$.

解答题

1、解：（1）因 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2(ax+1)dx=(\frac{a}{2}x^2+x)_0^2=2a+2$，故 $a=-\frac{1}{2}$.

（2）X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x(1-\frac{u}{2})du, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2. \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x-\frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

（3）设 Y 分布函数 $F_Y(y)$，由题意 $Y=\left|X-1\right|$，故当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，

当 $0<x<2$ 时，$y=\left|x-1\right|<1$，故当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $0 \le y < 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{|X-1| \le y\}$

$$= P\{1-y \le X \le 1+y\} = \int_{1-y}^{1+y} (1-\frac{1}{2}x)dx = y$$

分布函数求导得概率密度：$f_Y(x) = \begin{cases} 1, 0 < y < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$

2、解：由题意，Y 服从二项分布，即 $Y \sim b(100, p)$，求 p

由题意：$p = P(60 < X \le 84) = \Phi(\frac{84-72}{\sigma}) - \Phi(\frac{60-72}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{12}{\sigma}) - 1$

由 $0.023 = P(X > 96) = 1 - \Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{24}{\sigma})$

得 $\Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$，即 $\frac{24}{\sigma} = 2$，故 $\frac{12}{\sigma} = 1$，所以 $p = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$.

故 Y 的分布律为 $Y \sim b(100, 0.6826)$

或 $P(Y = k) = C_{100}^{k}(0.6826)^k(0.3174)^{100-k}$，$k = 0,1,2,\cdots,100$

3、解：由 $F(x)$ 性质：$F(+\infty) = 1 \Rightarrow a + b = 1$；又 $P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$，

所以 $\frac{2}{3} - a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，$a = \frac{1}{6}$，$b = \frac{5}{6}$，所以分布律：

$P\{X = -1\} = \frac{1}{6}$，$P\{X = 1\} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$，$P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$.

4、解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，所以 $\int_{-1}^{1} kx^2 dx = 1$，得 $k = \frac{3}{2}$；

(2) X 的分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, x < -1 \\ \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}, -1 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$；

(3) $P\{|X| > \frac{1}{2}\} = 1 - P\{|x| \le \frac{1}{2}\} = 1 - [F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2})] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

5、解：（1）由题意：随机变量 X 的取值为 0,1,2，服从二项分布 X ~b(2,0.6)，

故 X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.16	0.48	0.36

（2）X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 0.16, 0 \le x < 1 \\ 0.64, 1 \le x < 2 \\ 1, x \ge 2 \end{cases}$

6、解：（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，即 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} k\cos x dx = 1$，得 $k = 1$.

(2) X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$=\begin{cases} 0\,,\ x\le 0 \\ \int_0^x \cos x dx\,, 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1\,,\ x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0\,,\ x\le 0 \\ \sin x\,,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1\,,\ x\ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

（3）概率 $P\{|X|>\dfrac{\pi}{6}\}=1-P\{|X|\le\dfrac{\pi}{6}\}=1-\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

7、解:（1） X 的所有取值为 1,2,3

$P\{X=1\}=\dfrac{C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{3}{8}$， $P\{X=3\}=\dfrac{C_4^1}{4^3}=\dfrac{1}{16}$ ，

$P\{X=2\}=1-\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{9}{16}$

故 X 的分布律为

X	1	2	3
P_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

（2） X 的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \ x<1 \\ \dfrac{3}{8},\ 1\le x<2 \\ \dfrac{15}{16},\ 2\le x<3 \\ 1\,,\ x\ge 3 \end{cases}$$

8、解: (1) X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0\ \ ,x<-1 \\ 0.2\,,-1\le x<0 \\ 0.5\ \ ,0\le x<1 \\ 1\ \ ,x\ge 1 \end{cases}$

(2) Y 的分布律为:

Y	0	1
P	0.3	0.7

(3) 概率 $P\{X<1\}=0.5$

9、解:（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 所以 $\int_0^1 kxdx+\int_1^2(2-x)dx=1$ 得 $k=1$

（2） X 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 得

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad ,x<0 \\ \int_0^x tdt \quad ,0\le x<1 \\ \int_0^1 xdx+\int_1^x (2-t)dt \quad ,1\le x<2 \\ 1 \quad ,x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \quad ,x<0 \\ \dfrac{x^2}{2} \quad ,0\le x<1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 \quad ,1\le x<2 \\ 1 \quad ,x\ge 2 \end{cases}$$

(3) $P\{\frac{1}{2}<X\le 2\}=F(2)-F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

10、解：

（1）因 $y=x^2$ 在 $x>0$ 上单调增加,且 $x=\sqrt{y}$

故 Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})', y>0 \\ 0\text{,其他} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, y>0 \\ 0\text{,其他} \end{cases}$

(2)因为 X 的密度函数： $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} \quad , \quad -1<x<1 \\ 0 \quad , \quad \text{其它} \end{cases}$， $y=g_1(x)=x^2$ 值域为 $[0,1)$，所以:1） $y<0$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=0$(因为此时 $\{x^2\le y\}$ 为不可能事件)；

2） $y\ge 1$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=1$($\{X^2\le y\}$ 为必然事件)；

3）当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx .$$

求导(利用积分上限函数的求导公式)

$$F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})(-\frac{1}{2\sqrt{y}})=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2\sqrt{y}} ,$$

所以 $Y=X^2$ 的概率密度： $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0<y<1 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$.

(3)类似 $Y=|X|$，函数 $g_2(x)=|x|$ 的值域为：$[0,1)$

所以： $y<0$ 时， $F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=0$，求导 $F_Y'(y)=0$；

$y\ge 1$ 时， $F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=1$，求导 $F_Y'(y)=0$；

$0\le y<1$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$

$$=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y} f_X(x)dx ;$$

求导， $F_Y'(y)=f_X(y)\cdot 1-f_X(-y)(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

所以$Y=|X|$的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$.