概率论与数理统计

重点难点题型班

命题点：

1.事件与概率

$$\text{求}P\{\text{复杂事件}\}\begin{cases}\text{古典概型}\\ \text{套公式}\\ \text{全集分集}\\ \text{伯努利概型}\\ \text{几何概型}\end{cases}$$

2.随机变量及其分布

$$\begin{cases}\text{一维} & x, g(x)\\ \text{多维} & \begin{cases}(x,y), g(x,y)\\ (x_1,x_2,\cdots,x_n), g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}\end{cases}$$

3.数字特征——E, D, Cov, ρ

$$\begin{cases}\text{普通随机变量}\\ \text{统计量}\end{cases}$$

4.抽样分布——N, χ^2, t, F

$$\text{5.点估计}\begin{cases}\text{矩估计}\\ \text{最大似然估计}\end{cases}$$

$$\text{6.评选标准}\begin{cases}\text{无偏性}\\ \text{有效性}\\ \text{一致性（相合性）}\end{cases}$$

$$\text{7.极限定理}\begin{cases}\text{大数定律}\\ \text{中心极限定理}\end{cases}$$

重点难点题型:

1.事件与概率

【例 1】设某考生想借张宇编著的《考研数学高等数学 18 讲》，决定到三个图书馆去借，对每个图书馆而言，有无此书概率相等；若有，能否借到的概率也相等，设三个图书馆采购、出借图书相互独立，求该考生能借到次书的概率.

【例 2】甲袋中有 3 个白球，2 个黑球；乙袋中有 4 个白球，4 个黑球；今从甲袋中任取 2 球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求

（1）该球是白球的概率

（2）若已知从乙袋中取出的是白球，求从甲袋中取出的是一白一黑的概率.

【例 3】甲、乙两人比赛射击，每个回合取胜者得 1 分，设每个回合中，甲胜的概率为α，乙胜的概率为$\beta(\alpha+\beta=1)$，比赛进行到一人比另一人多 2 分为止，多 2 分者最终获胜，求甲、乙最终获胜的概率.

【例 4】做一系列独立试验，每次试验成功的概率为 P，记

（1）$A=\{4次失败在第3次成功之前\}$

（2）进行 n 次重复试验，$B=\{在没有全部失败的条件下，成功不止一次\}$

求 $P(A),P(B)$.

【例 5】在 $(0,1)$ 内随机变量取两数，求两数之和不超过 1，两数之积不小于 0.09 的概率.

2.随机变量及其分布

【例 1】设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X (单位：分)服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布，若等待时间超过 10 分钟即离开.设他一个月来银行 5 次，以 Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布列及 $P(Y\geq 1)$.

【例 2】 设 $X \sim f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ $Y=e^X$，求 $f_Y(y)$.

【例 3】 $X \sim f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $Y=\sin X$，求 $f_Y(y)$.

【例 4】 设 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布，$P(X_i=0)=0.6, P(X_i=1)=0.4, i=1,2,3,4.$

求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

【例 5】 设 $X \sim U(0,1)$，当 X 取到 $x(0<x<1)$ 时，Y 等可能地在 $(x,1)$ 上取值，求 (x,y) 的 $f(x,y)$，$f_Y(y)$，并计算 $P(X+Y\geq 1)$.

【例 6】 设 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)|0\leq x\leq 2,0\leq y\leq 1\}$ 上服从均匀分布，求边长为 X,Y 的矩形面积 S 的 $f_S(s)$.

3.数字特征

【例 1】 设试验陈宫的概率为 $\frac{3}{4}$，失败的概率为 $\frac{1}{4}$，独立重复试验直到成功两次为止，求试验次数的数学期望.

【**例 2**】一商店经销某种商品，每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 相互独立，且均服从 $[10,20]$ 上的均匀分布.每售出一单商品可获利 1000 元；若需求量超过了进货量，可以从其他商店调剂供应，这时每单商品获利 500 元，求此商店经销该商品的获利的期望.

【**例 3**】设自动生产线加工的某种零件的内径 $X(mm) \sim N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 为不合格品，销售合格品获利，销售不合格品亏损.已知销售利润 T(元) 与内径 X 有：

$$T=\begin{cases}-1, & x<10\\ 20, & 10\le x\le 12\\ -5, & x>12\end{cases}$$

问 μ 为多少时，销售的平均利润最大.

【**例 4**】设 $P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}, 0<p<1, k=1,2,\cdots$，求 EX, DX .

【例 5】 设 $X \sim f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x\le 4, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，已知 $EX=2, P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$,

求（1）a,b,c 的值；

（2）$Y=e^X$ 的 EY,DY.

【例 6】 在长为 L 的线段上任取两点，求两点距离的期望与方差.

【例 7】 设 X,Y 相互独立且服从 $N(0,\dfrac{1}{2})$，求 $E|X-Y|,D|X-Y|$.

【例 8】设设 X,Y 相互独立且服从几何分布，$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots$

求 $E[\max(X,Y)]$.

【例 9】设 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$$

求（1）U,V 的联合分布

（2）ρ_{UV}.

【例 10】设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为单体 X 的一个（简单随机）样本. $EX=\mu,DX=\sigma^2$,

求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

注：$D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$，老师在课堂上漏写了平方。

【例 11】若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $EX = n, DX = 2n$.

【例 12】设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2).X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 为 X 的一个样本，$\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$

求 $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2\right)$.

【例 13】设 $X \sim N(0,1), Y = X^2$，则 X 与 Y

（A）不相关且独立　　　　（B）不相关且不独立

（C）相关且独立　　　　（D）相关且不独立

4.抽样分布——N,χ^2,t,F

【例 1】设 $X_1,X_2,,X_m,Y_1,Y_2,,Y_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(a,\sigma^2),i=1,2,\cdots m$，

$Y_i\sim N(b,\sigma^2),i=1,2,\cdots n$，$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,S_1^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$

α,β 为常数，求 $\dfrac{\alpha(\overline{X}-a)+\beta(\overline{Y}-b)}{\sqrt{\dfrac{mS_1^2+nS_2^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}}}$ 的分布.

5.矩估计与最大似然估计

【例 1】一个盒子中有黑、白球，黑、白球数之比为 $a:1$，现有放回一个接一个抽球，直到抽到黑球为止，记 X 为所抽到的白球个数，这样做 n 次，获得一组样本：$X_1,X_2,\cdots,X_n$．求 a 的矩估计和最大似然估计.

【例 2】设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $\alpha>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，求 α 的矩估计和最大似然估计.

【例 3】设 $X \sim f(x,\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$，利用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 求 θ 的最大似然估计.

6.评选标准 $\begin{cases} 无偏性 \\ 有效性 \\ 一致性（相合性） \end{cases}$

【例 1】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的简单随机样本，$EX=\mu, DX=\sigma^2$，确定常数 C，使 $\left(\overline{X}\right)^2 - C \cdot S^2$ 为 μ^2 的无偏估计.

【例 2】设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，从中抽出容量为 n_1, n_2 的两独立样本.证明对任意满足 $a+b=1$ 的常数 a,b，$Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计，并求 a,b，使 DZ 最小.

【例 3】设 $X \sim U[0,\theta], X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的简单随机样本，证明：$\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为 θ 的一致估计.

7.极限定理 $(n \to \infty)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim N \end{cases}$$

【例 1】用概率统计的方法

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}\right)e^{-n} = \dfrac{1}{2}$

概率论与数理统计重点难点题型班讲义答案

1.事件与概率

【例 1】 $\dfrac{37}{64}$

【例 2】 $\dfrac{15}{26}$

【例 3】 甲获胜的概率为 $\dfrac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$，甲获胜的概率为 $\dfrac{\beta^2}{1-2\alpha\beta}$

【例 4】 $P(A)=C_6^4 p^3(1-p)^4, P(B)=1-\dfrac{np(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}$.

【例 5】 $\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{50}\ln 3$

2.随机变量及其分布

【例 1】 Y 的分布列: $P(Y=k)=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,3,4,5$；

$P(Y\ge 1)=1-(1-e^{-2})^5$

【例 2】 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{1}{y^2} & y\ge 1\end{cases}$

【例 3】 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

【例 4】 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{pmatrix}$

【例 5】 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

$P(X+Y\ge 1)=\ln 2$

【例 6】 $f_S(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s) & 0<s<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3.数字特征

【例 1】 $\frac{8}{3}$

【例 2】 14167 元

【例 3】 $\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}$

【例 4】 $EX = \frac{1}{p}, DX = \frac{1-p}{p^2}$.

【例 5】（1） $a = \frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{1}{4}$；（2） $EY = \frac{1}{4}(e^2-1)^2, DY = \frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$.

【例 6】 期望 $\frac{L}{3}$，方差 $\frac{L^2}{18}$

【例 7】 $E|X-Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, D|X-Y| = 1 - \frac{2}{\pi}$.

【例 8】 $E[\max(X,Y)] = \frac{3-2p}{p(2-p)}$

【例 9】（1） U,V 的联合分布

$u \backslash v$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

（2） $\rho_{UV} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【例 10】 $E(\overline{X}) = \mu, D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$

【例 11】 $EX = n, DX = 2n$.

【例 12】 $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2\right) = 2(n-1)\sigma^2$

【例 13】（B）

4.抽样分布—— N,χ^2,t,F

【例 1】 $\dfrac{\alpha(\overline{X}-a)+\beta(\overline{Y}-b)}{\sqrt{\dfrac{mS_1^2+nS_2^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}}}\sim t(m+n-2)$

5.矩估计与最大似然估计

【例 1】 a 的矩估计和最大似然估计均为 $\dfrac{1}{\overline{X}}$.

【例 2】 α 的矩估计为 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{X}$，最大似然估计为 $\sqrt{\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{3n}}$.

【例 3】 θ 的最大似然估计为 $X_{(1)}$

6.评选标准 $\begin{cases}\text{无偏性}\\ \text{有效性}\\ \text{一致性（相合性）}\end{cases}$

【例 1】 $C=\dfrac{1}{n}$

【例 2】 证明略，$a=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-1},b=\dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-1}$

【例 3】 证明略

7.极限定理 $(n\to\infty)$ $\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N\end{cases}$

【例 1】 证明略