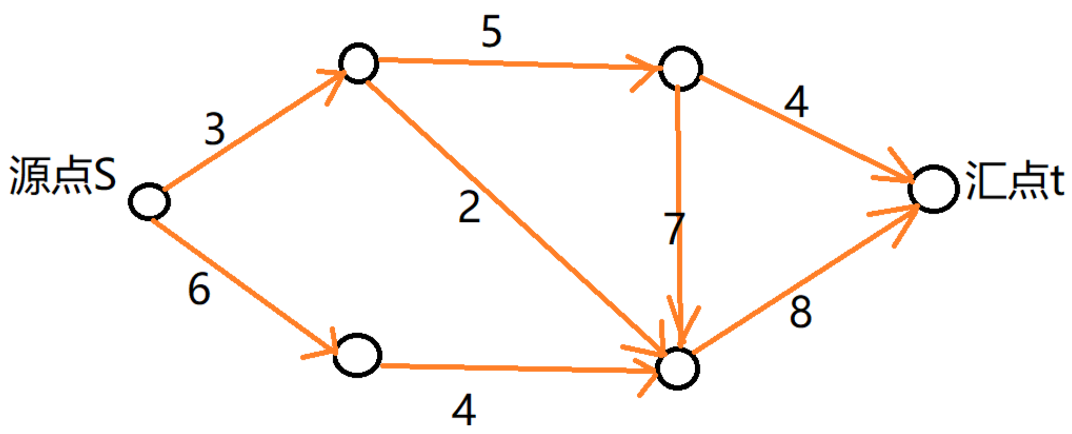
网络流__1 网络流基础

流网络



如图为一个流网络,边权为最大流量c，记作

$$G=(V,E)$$

其中V为点集，E为边集。

可以想象成从源点源源不断的将水流向汇点的过程

$$\text{从点}u\text{到点}v\text{的容量记作}C(u,v)$$

其中，不考虑反向边，假如有反向边，可以通过加点来转化成没有反向边的情况

流量　定义：从源点往外净流出的量

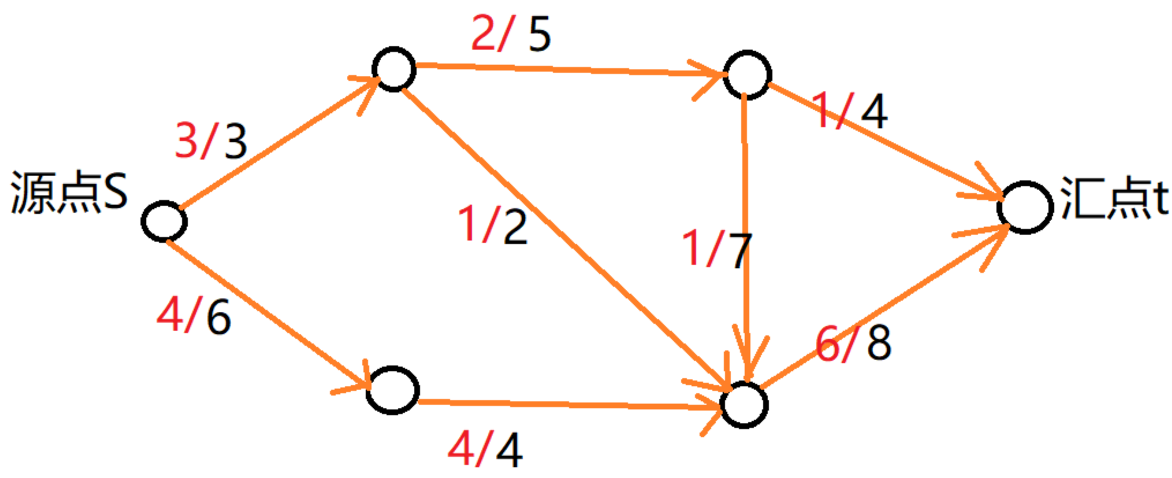
可行流

即每一条边设计一个流量，记作

$$\text{设计的流量对应的方案}f\begin{cases}1.\text{容量限制}\qquad 0\le f(u,v)\le c(u,v)\\ \\ 2.\text{流量守恒}:\forall x\in V\{s,t\}\\ \quad\sum_{(u,x)\in E}f(u,x)=\sum_{(x,u)\in E}f(x,u)\end{cases}$$

流量守恒即对于某个点流入的流量等于流出的流量

如图便是一个可行流,满足对于任意一点都有流出=流入：



对于一个可行流，每秒从源点流向汇点的流量的值/速率记作：

$$|f| = \text{每秒从源点流出的流}/\text{每秒流入汇点的流量}$$

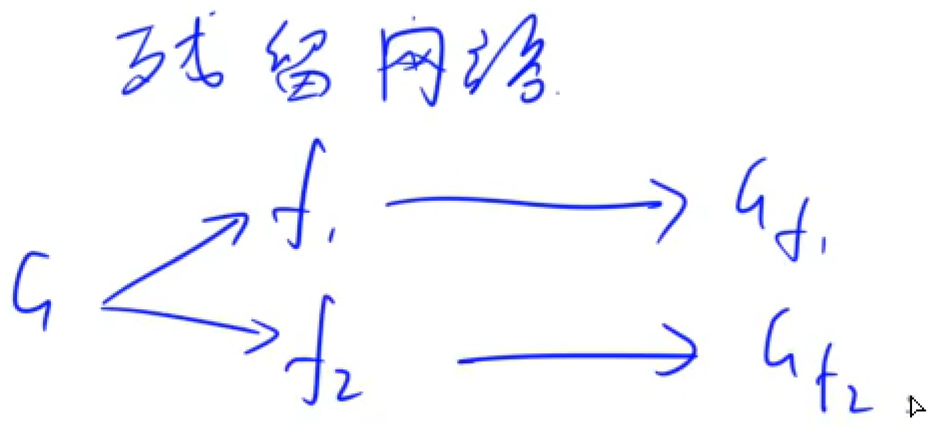
即往外流的流量流回去的流量：

$$|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v,s)$$

最大流：

即所有可行流中流量值最大的可行流

残留网络



对于流网络的某一条可行流来说，残留网络与其一一对应，记作；

$$G_f$$

假定流网络`G=(V,E)`,`f`为图G中的一个流，定义其残存网络的**残存容量**：

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & (u,v) \in E \\ f(v,u) & (v,u) \in E \end{cases}$$

简单来说，对于原流网络的一个流来说，其残留网络的残存容量有两种形式，一种是同向的，流网络容量-当前流量；另一种是反向的，数值等于当前流的大小

定义如下表示残留网络中一个合法流`f'`对于原网络中的流`f`的递增

$$(f \uparrow f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \quad (u,v) \in E$$

较为直观：`f'(v,u)=f(u,v)`

引理1

设G=(V,E)为一个流网络，源点为`s`，汇点为`t`，设`f`为`G`中的一个流。设`Gf`是由流`f`所有道德`G`的残留网络，设f'为Gf中的一个流，那么有：

$$|f \uparrow f'| = |f + f'| = |f| + |f'|, \text{且} f + f' \text{也为} G \text{中的一个可行流}$$

证明：

`f+f'`也为G的一个可行流,即从容量限制和流量守恒来证明

$$\text{对于同向的} f', f(u,v) + f'(u,v) \le f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) = c(u,v)$$

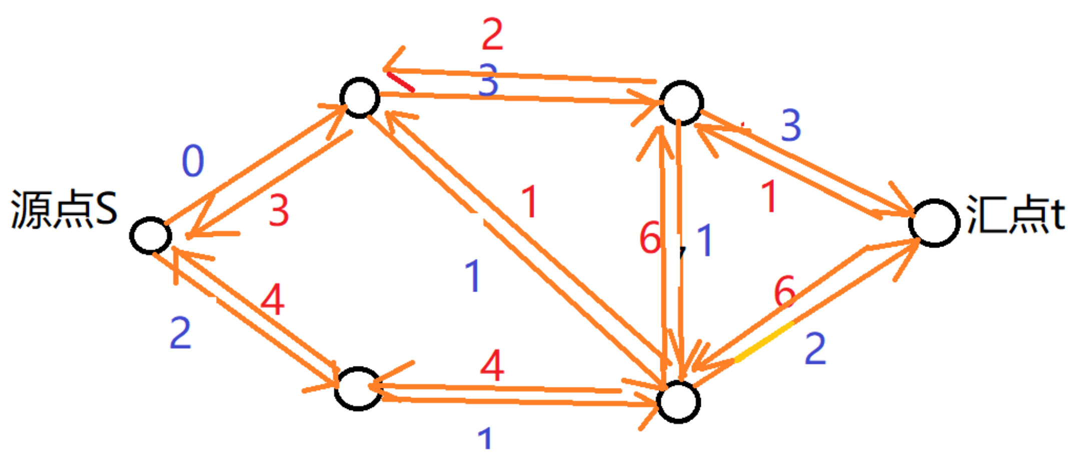
$$\text{对于反向的} f', 0 = f(u,v) - c_f(u,v) \le f(u,v) - f'(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$$

推论：

- 可行流的残留网络内求得的任何一个值大于0的可行流都可以增加原网络的可行流
- 若原网络对应的残留网络的可行流的流量大于0，则原网络必定不是最大流，反之可证明是最大流

增广路径

对于给定流网络`G=(V,E)`和流`f`，增广路径`p`是其残存网络Gf中一条从源结点`s`到汇点t的简单路径，**其中每一条边的容量都大于0**.



对于对于`G(V,E)`的某一可行流 f 的残留网络上的某一可行流对应一条增广路径 f'，有`f+f'`仍然是G中的一个可行流，因此得到定理：

$$\text{对于当前可行流} f, \text{在} G_f \text{中无增广路径，则} f \text{为最大流}$$

增广路径的残存容量：

我们称增广路径p上能够为每条边增加的流量的最小值为残存容量，即：

$$c_f(p) = min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{属于路径} p\}$$

此处定义的残存容量与残留网络中的残存容量稍微不同，即最小值

割

对于一个流网络`G=(V,E)`,可将其点集`V`分成两个不重不漏的集合`S`，`T`，有

$$S \cup T = V$$
$$S \cap T = \varnothing$$

其中有以下限制：

$$\text{源点} s \in S, \text{汇点} t \in T$$

割的容量 c(S,T)

所有从S指向T的有向的容量之和

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$$

割的流量

所有从S到T的的流量与从T到S的流量之差：

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in T} \sum_{v \in S} f(u,v)$$

性质1:

设f为流网络G的一个流，该流网络的源节点为s,汇点为t,设(S,T)为流网络G的任意切割，则横跨切割`(S,T)`的**净流量**：

$$f(S,T) = |f|$$

即**对于每一个割的流量，都能对应一个流网络中的流量**

证明：

$$\text{引理}1. f(X,Y) = -f(Y,X)$$
$$\text{引理}2. f(X,X) = 0$$
$$\text{引理}3. f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$
$$\text{引理}4. f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

由引理1

$$s(S,V) = f(S,S) + f(S,T)$$

等价于：

$$f(S,T) = f(S,V) - f(S,S) = f(S,V)$$
$$= f(\{s\},V) + f(S - \{s\},V) = f(s,V)$$

性质2：

$$\forall [S,T] \, \forall f \text{ 有} \quad f(S,T) \leq c(S,T)$$

换句话来说，对于流网络任意流，都小于任意割的容积，因此就有**最大流小于等于最小割。**其中注意，最大流指流网络的最大流量，最小割指的是最小割的容量

$$\text{最大流}|f| \leq \text{最小割} c(S,T)$$

最大流最小割定理

以下三个定理相互等价

- `f`是`G`中的一个最大流
- 残留网络`Gf`不包括任何增广路径
- `|f|=c(S,T)`,其中`(S,T)`是流网络G的某个切割

证明：

证明思路为证明1能推出2，2能推出3，3能推出1

1=>2：

$$若G_f有|f'|>0，则|f+f'|=|f|+|f'|>|f|矛盾$$

2=>3

使用构造法：构造一个点集S，将起点s放入S，从Gf中从s出发沿容量大于0的边走，将所有能走到的点加入S，由于不包含增广路径，所以必然有t不属于S

$$则T=V-S有t\in T，构造出了一组合法割$$

$$对于x\in S,y\in T有f(x,y)=c(x,y),又a\in S,b\in T有f(a,b)=0$$

因为加入f(x,y)<c(x,y)则x可以走到y，因此y应该在S中矛盾。a,b同理

$$\begin{aligned}因此有|f|=f(S,T)&=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}f(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}f(v,u)\\&=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T}c(u,v)=c(S,T)\end{aligned}$$

3=>1

$$最大流|f^*|\geq|f|=c(S,T)\geq最小割c_{min}(S,T)\geq|f^*|$$