201220183王宇鸣第二次图论作业

- 2.1

  n-1

  问题等价于，n个点，至少需要多少条边，能构造一个连通图

  答案是n-1条边，也就是至少有n-1对同学互相直接认识

- 2.2

  互相认识

  反证法：假设有两个同学相互不认识，也就是这个图有至少两个连通分量，那么点数最少的连通分量的人数小于等于n，那么这个连通分量里面的点最多只能连出n-1条边，也就是说这个点代表的同学没法直接认识n位同学，矛盾，假设不成立，所以一定只有一个连通分量，即这2n+1个同学一定相互认识

- 2.3

  认识

  反证法：如果这两个同学不认识，那么这两个同学代表的点所在的连通分量里，所有的顶点的度的和为奇数，显然不可能，假设不成立。所以这两个点一定联通，这两个同学一定认识

- 2.8

  一定存在这样的三个点

  本题要证明的是，图中一定存在a与b直接相连，b与c直接相连，而a与c不直接相连。

  证明：

  首先，图中一定存在度大于等于2的点

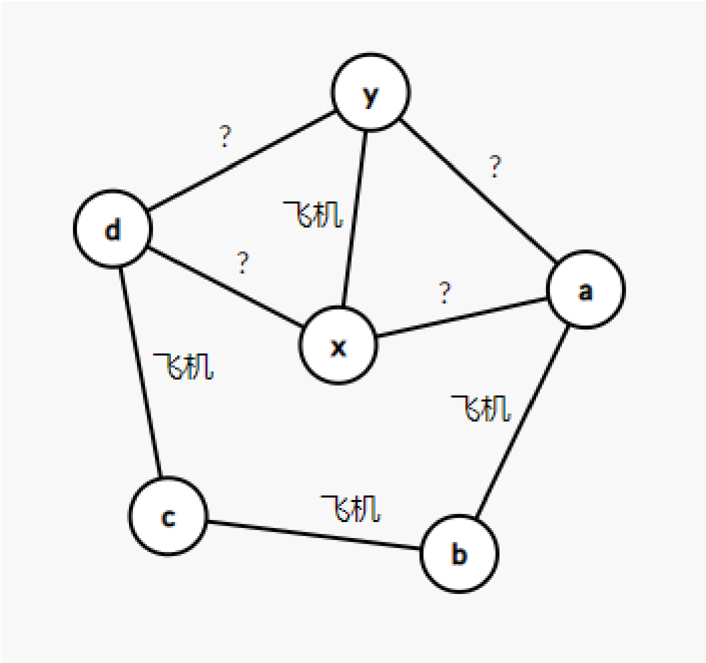
  然后，假设法，假设以这个度为2的点作为b，所有的a和c都相连，那么图中所有的点都是直接相连的，假设不成立，所以一定存在这样的a与c不直接相连，证明完毕

- 2.11

  结论是正确的

  证明：

  两个城市无法通过之多一次转机到达，那么情况一定如下

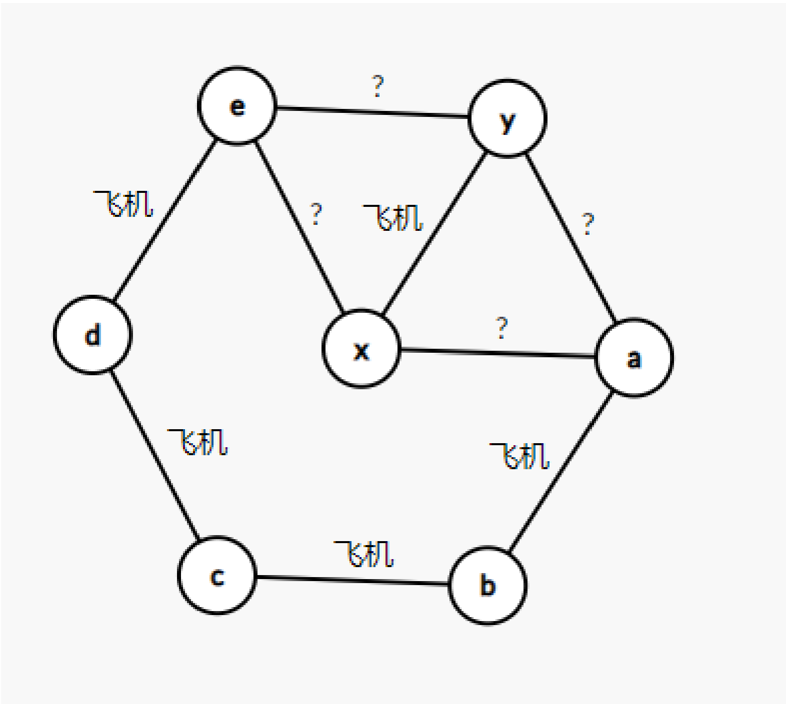


d和a两个城市必须通过两次转机才能相互到达，a,b,c,d相互之间的所有未画出的线路都是火车

我们考虑图中是问号的四条边，进行分类讨论：

1. 首先xd，xa不能同时为飞机，那样d到a一次转机就能到达，同理yd，ya不能同时为飞机
2. 也就是说，xd，xa中至少有一条是火车，yd，ya中至少有一条是火车，如果四条中有三条是火车显然能通过一次专车就到达，如果四条中有两条是火车，那么一共只有四种排列组合，枚举这四种排列组合，xy都能通过至多两次转车到达，得证

- 2.12



结论正确

证明：

1. 和上题一样，xe，xa不能同时为飞机，ye，ya不能同时为飞机
2. 如果这四条中有三条是火车，那么显然一次转车就能从x到y
3. **和上一题不一样的是：本题中ex,ya不能同时是飞机，这样违背了从e到a要至少三次转机，同理ya，xa不能同时是飞机**

4. 也就是说只能是xeye同时是火车且xaya同时是飞机或者yaxa同时是火车且xeye同时是飞机，这两种情况都能通过一次转机到达