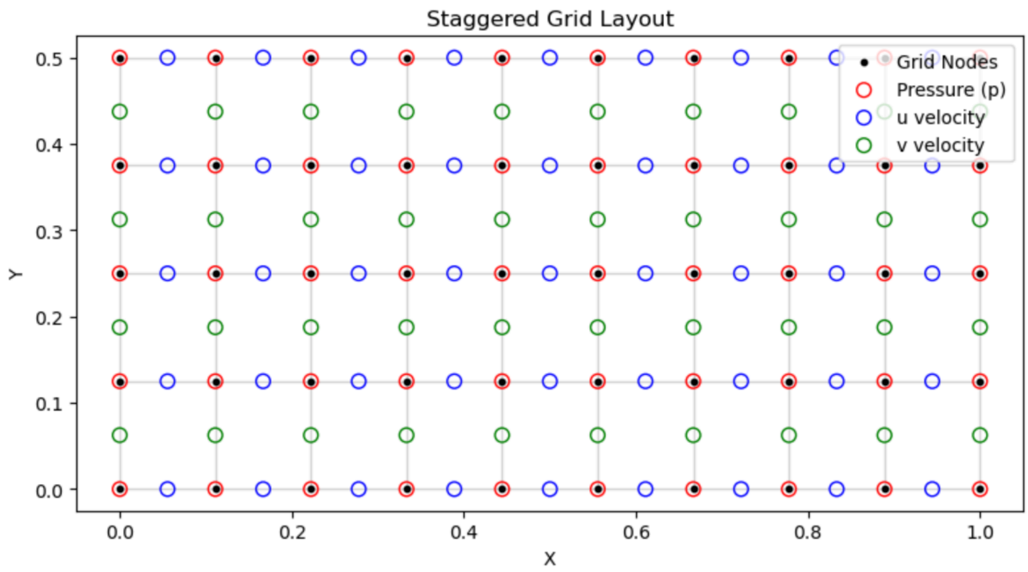
二维FSI程序求解

Sec 1. 交错网格上分布的物理信息



Sec 2. N-S方程的求解方法：一阶投影法

将时间推进分解成三个子步长，压力不通过时间推进求解：

Step 1：预算步：

$$\frac{\mathbf{V}^*-\mathbf{V}^n}{\Delta t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{V}\right)^n=0$$

Step 2：压力修正步

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{V}^{n+1}-\mathbf{V}^*}{\Delta t}+\nabla p=0\rightarrow\nabla^2p=\frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{V}^*\\&\nabla\cdot\mathbf{V}^{n+1}=0\end{aligned}$$

Step 3：最终步

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1}-\mathbf{V}^*}{\Delta t}+\nabla p=0\quad\text{得到 }\mathbf{n+1}\text{ 时刻的 }\mathbf{V}$$

Sec 3. 交错网格上的动量方程离散（预算步）

(i，j)以压力网格为模板，u方向的动量离散公式：

$$(u^*_{i+\frac{1}{2},j}-u^n_{i+\frac{1}{2},j})/\Delta t=-u^n_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial u}{\partial x}-v^n_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2u^n_{i+\frac{1}{2},j}$$

其中，正方向的对流项的离散方案如下：

$$u_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial u}{\partial x}=u^+_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial u}{\partial x}+u^-_{i+\frac{1}{2},j}\frac{\partial u}{\partial x},\ u^{+,-}_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{u+,-|u|}{2},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}-u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x}$$

而，对于剪切方向的离散方案，需要将v速度插值到u的网格模板上：

$$v_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5 \times (v_{i+1,j} + v_{i,j}) = 0.5 \times (\ 0.5 \times (v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}})\ +\ 0.5 \times (v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}))$$

(i，j)以压力网格为模板，v方向的动量离散公式：

$$(v^*_{i,j+\frac{1}{2}} - v^n_{i,j+\frac{1}{2}})/\Delta t = -u^n_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} - v^n_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 v^n_{i,j+\frac{1}{2}}$$

其中，正方向的对流项的离散方案如下：

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = v^+_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} + v^-_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial y},\ v^{+,\ -}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{v+,-|v|}{2},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

同样，对于剪切方向的离散方案，需要将u速度插值到v的网格模板上：

$$u_{i,j+\frac{1}{2}} = 0.5 \times (u_{i,j+1} + u_{i,j}) = 0.5 \times (\ 0.5 \times (u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1})\ + 0.5 \times (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}))$$

Sec 4. 交错网格上的压力泊松方程离散（中间步）

压力泊松方程：

$$\begin{aligned} &\tfrac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla p = 0 \\ &\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

以压力网格为基准，交错网格上的离散结果：

$$\begin{aligned} &u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^*_{i+1/2,j} + \Delta t/\Delta x\,(p_{i+1,j} - p_{i,j}) = 0 \\ &v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^*_{i,j+1/2} + \Delta t/\Delta y\,\left(p^*_{i,j+1} - p_{i,j+1}\right) = 0 \\ &\left(u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}\right)/\Delta x + \left(v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}\right)/\Delta y = 0 \end{aligned}$$

将前两个式子带入到第三个方程（即不可压条件中），可以得到交错网格上，压力满足的泊松方程的离散形式：

$$\frac{1}{\Delta t}(\ \frac{u^*_{i+\frac{1}{2},j} - u^*_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x}\ +\ \frac{v^*_{i,j+\frac{1}{2}} - v^*_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}\ ) = \frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j} - 2p_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 2p_{i,j}}{(\Delta y)^2}$$

Sec 5. 交错网格上的压力矫正离散（最后步）

通过压力矫正可以获得速度场：

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla p = 0$$

那么，交错网格上速度场u的矫正为：

$$\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} - u^*_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} = 0$$

同理，交错网格上速度场v的矫正为：

$$\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^{*}}{\Delta t} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} = 0$$

Sec 6. 一些其他需要注意的地方！

1. 边界上的差分如何处理？

   示意图：| (n1) - - (n2) - - (n3)，这是靠近边界内部的三个节点，其中，n1，2，3代表节点，这里的n1就在边界上，先假设其网格节点是均匀的，都是dx，假设靠近壁面的速度可以用如下公式拟合（三个点用三次样条曲线）：

$$u = a + by + cy^2$$
$$u_1 = a$$
$$u_2 = a + b(dx)$$
$$u_3 = a + b(2dx) + c(2dx)^2$$
$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2dx}$$
$$c = \frac{u_3 + u_1 - 2u_2}{2dx^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2dx}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0} = \frac{u_3 + u_1 - 2u_2}{dx^2}$$