第 1 课 固定值的递推估计（2）

作者：范泽宣

我们继续进入这节课的第二部分内容的学习，做好准备，我们将全面的推导卡尔曼滤波公式啦。

好吧，再次重申你叫 falcao，你是一个大学生，你最大的爱好就是在你家的仓库里搞发明创造。

Predict:

$$X_k = a\ X_{k-1}$$

$$P_k = a*P_k*a$$

Update:

$$g_k=p_{k-1}/(p_{k-1}+r)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + g_k(z_k - \hat{x}_{k-1})$$

$$p_k=(1-g_k)p_{k-1}$$

你发现对下面 5 个公式的推导要结合上一节课提到的批处理方法估计固定量的知识。

回去看下上节课的内容，还记得那个著名的估计问题吗。

即利用批处理方法估计一个固定量。

$$Y_k = [y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots y_k]^T \qquad (1.7)$$

且

$$V_k = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots v_k]^T \qquad (1.8)$$

量测方程定义了误差 V_k、待估计量 X 和量测 Y_k 的关系为：

$$Y_k = HX + V_k \qquad (1.9)$$

假定误差为零均值，协方差为：

$$\mathrm{cov}(V_k) = R \qquad (1.10)$$

利用协方差的逆矩阵作为加权阵构造最小化函数：

$$J = (Y_k - H\hat{x}_k)^T R^{-1} (Y_k - H\hat{x}_k) \qquad (1.11)$$

试图找到满足上式最小的$\hat{x}_k$。采用协方差阵的逆矩阵作为加权阵，可以增加小量测误差的影响。该问题的最小二乘解是：

$$\hat{X}_k = [H^T R^{-1} H]^{-1} H^T R^{-1} Y_k \qquad (1.12)$$

为了得到估计误差的协方差，首先将式（1.9）的 Y_k 代入上式可得：

$$X - \hat{X}_k = -[H^T R^{-1} H]^{-1} H^T R^{-1} V_k \qquad (1.13)$$

注意到误差的期望为 0，对上式的外积求期望得到协方差：

$$E\{(X - \hat{X}_k)(X - \hat{X}_k)^T\} = [H^T R H]^{-1} \qquad (1.14)$$

用 P_k 表示可得：

$$P_k = [H^T R H]^{-1} \qquad (1.15)$$

怎样把以上内容变成递推形式，让你绞尽脑汁。你跑去求助以前一起做 Robocon 机器人比赛的大神 Dsy，你们坐下来愉快的开始了推导之旅。

要想构造递推估计，就要将量测方程改写成不同的时刻，Dsy 仔细研究了式 1.9，并将它改写成下表不同的公式：

$$Y_{k+1} = H_{k+1}X + V_{k+1} \qquad (1.20)$$

并前面构造了待最小化的函数改写为：

$$\mathrm{J} = [(Y_k - \mathrm{H}\hat{x}_{k+1})^T (Y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1})^T] \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_k - \mathrm{H}\hat{x}_{k+1} \\ Y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1} \end{bmatrix} \qquad (1.21)$$

你马上打断了 Dsy，“喂，这么长的公式是怎么来的啊，为什么 X 估计值的下标都是 k+1 啊？”

“哈哈，falcao，你想想我们的目的，不就是要构造递归函数啊，我们不想处理以往的数据，那就要从新息中提取信息更新当前值嘛，所以我们把 X 的估计用 Y_k 和 Y_{k+1} 两个时刻的信息进行估计，才能产生递归效果，你说对不对，还有，这个最小化函数的构造其实和批处理估计固定量的方法是一样的，都是利用 R 来作为加权阵啊。”

听了 Dsy 的一番解释，你感觉略知一二了。继续看 Dsy 的推导。

“同样的，我们得出 1.21 的解，这个和 1.12 其实是一样的，都是最小二乘法得出的解，如果你不了解最小二乘法，可以百度一下，10 分钟就可以理解啦”。Dsy 一般说一边写下了$\hat{X}_{k+1}$的解：

$$\hat{X}_{k+1} = \left\{ [H^T \quad H_{k+1}^T] \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ H_{k+1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} [H^T \quad H_{k+1}^T] \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_k \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

将上式化简：

$$\hat{X}_{k+1} = \{P_k^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}\}^{-1} [H^T R^{-1} Y_k + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} Y_{k+1}] \qquad (1.23)$$

“喂喂，你又打断了 Dsy，这里的P_k^{-1}是哪里来的啊？”

“公式 1.15 啊，我就是P_k^{-1}代入了而已啊。不过我们确实要停一停，你知道什么是反演定理吗？”。Dsy 微笑的问你。

我去，我怎么能一问三不知，哥也是机器人技术界的大神好不好，你偷偷的拿出你新买的香蕉手机，默默 google。（如果你也不知道，请自己百度，很简单，打公式很累的）。

1.23 式由反演定理得：

$\hat{X}_{k+1} = [P_k H^T R^{-1} Y_k] - P_k H^T_{k+1}[H_{k+1} P_k H^T_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} H_{k+1}[P_k H^T R^{-1} Y_k] + P_k H^T_{k+1} R^{-1}_{k+1} Y_{k+1} - P_k H^T_{k+1}[H_{k+1} P_k H^T_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} H_{k+1} P_k H^T_{k+1} R^{-1}_{k+1} Y_{k+1}$ (1.24)

好长的公式，不过可以再化简，注意$\hat{X}_k = [P_k H^T R^{-1} Y_k]$，化简为：

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + P_k H_{k+1}^T [H_{k+1} P_k H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} H_{k+1} \hat{X}_k + P_k H_{k+1}^T [H_{k+1} P_k H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} R_{k+1} R_{k+1}^T Y_{k+1} \quad (1.25)$$

或：

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + P_k H_{k+1}^T [H_{k+1} P_k H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} [Y_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_k]$$

最终得到：

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + K_{k+1} [Y_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_k] \quad (1.26)$$

其中：

$$K_{k+1} = P_k H_{k+1}^T [H_{k+1} P_k H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \quad (1.27)$$

至此，新的估计值由旧的估计值加上一个修正值组成。修正值由误差项乘以最佳增益得到。这种形式直观上很吸引人，它保证了递归的效率。

你浑身轻松，并约大神 Dsy 一起去吃饭。Dsy 笑着说，你放松的太早了，这只是固定值的递推估计，动态系统的递推估计要远远难于以上简单的公式推导。你大吃一惊，心想我怎么踩进 kalman 这个大坑了。后面的还会更难，这怎么解。

Dsy 看你一脸迷惑，微笑的告诉你，好啦，你还没有意识到 kalman 的神奇作用呢，它能让你的四旋翼飞的无比的稳定，能让你的机器人小车跑得精确无误，可能让你放上天的导弹精确打击目标…….。不过我们要一步一步来，先把目前的知识搞透。

你默默的点头并对之后的动态系统状态估计充满信心。

------+++--------

第一节课结束了，让我们一同完成一道 matlab 的编程题，看看你有没有对固定量的递推估计，融会贯通。

例：一个量的真实值是 5.0。只采用带噪声的量测值来估计它。所添加噪声是一个均值为零，协方差为 0.04 的高斯白噪声。使用连续 50 个测量值。

答案：

//

```
R = 0.04;
P = R;
y(1)=5 + sqrt(R) * randn;
xest(1) = y(1);

for i = 1:49
    y(i+1) = 5 + sqrt(R) * randn;
    P = 1/ ((1/P) + (1/R));
    K = P/(P + R);
    xest(i + 1) = xest(i) + K*(y(i+1) - xest(i));
end

figure
plot(y)
hold on
plot(xest,'r')
```

//

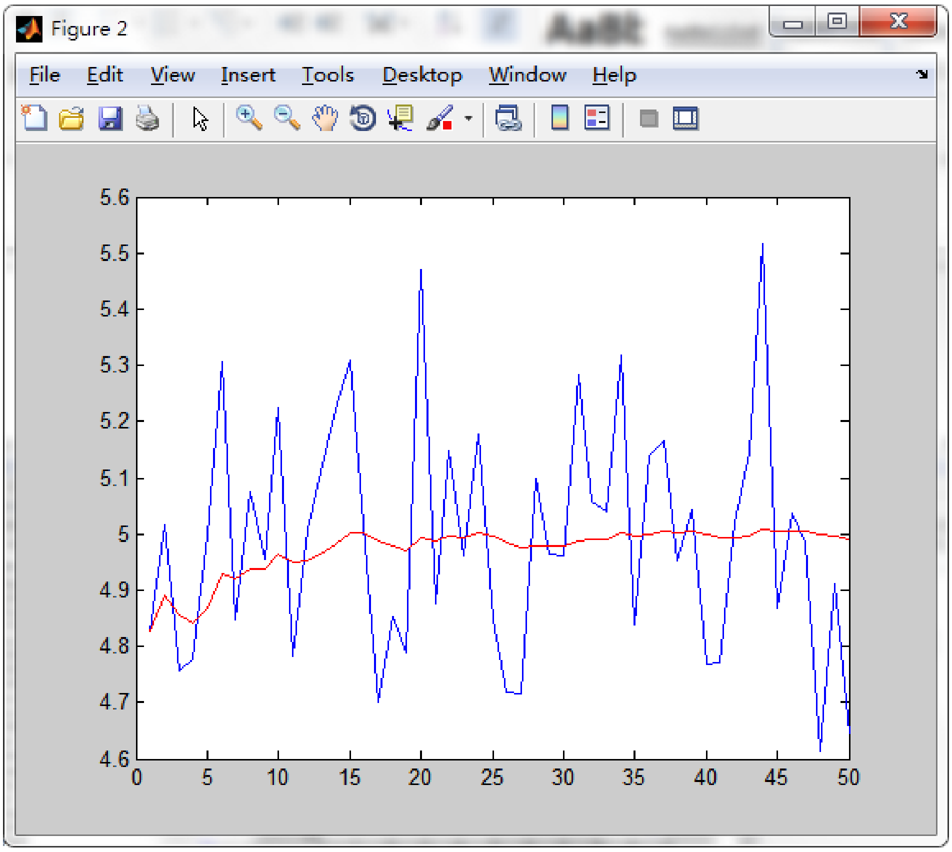
Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
5.6
5.5
5.4
5.3
5.2
5.1
5
4.9
4.8
4.7
4.6
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50