

文章编号:1005-3085(2005)06-0951-12

计算机视觉中的尺度空间方法*

孙 剑, 徐宗本

(西安交通大学理学院信息与系统科学研究所, 西安 710049)

摘 要: 近年来, 偏微分方程、变分法和数学形态学等现代数学方法被广泛应用于计算机视觉领域, 尺度空间方法作为这些方法的统一框架, 已逐渐成为国际上计算机视觉和图像处理领域研究的热点。本文综述尺度空间方法的基本思想、理论基础、视觉处理能力及实现方法, 然后提出尺度空间方法理论和应用值得研究的若干问题。

关键词: 尺度空间方法; 计算机视觉; 偏微分方程; 数学形态学

分类号: AMS(2000) 35K15

中图分类号: O175.2; TP391.4

文献标识码: A

1 引言

尺度空间 (scale space) 思想最早由 Iijima 于1962年提出([1]), 但当时并未引起计算机视觉领域研究者的足够注意, 直到上世纪八十年代, Witkin([2])和 Koenderink([3])等人的奠基性工作使得尺度空间方法逐渐得到关注和发展。此后, 随着非线性扩散方程、变分法和数学形态学等方法在计算机视觉领域中的广泛应用, 尺度空间方法进入了快速发展阶段。

尺度空间方法的基本思想是: 在视觉信息 (图像信息) 处理模型中引入一个被视为尺度的参数, 通过连续变化尺度参数获得不同尺度下的视觉处理信息, 然后综合这些信息以深入地挖掘图像的本质特征。尺度空间方法将传统的单尺度视觉信息处理技术纳入尺度不断变化的动态分析框架中, 因此更容易获得图像的本质特征。

尺度空间方法最初起源于图像处理中的高斯滤波 [4], 而高斯滤波模型恰好为热扩散方程的解, 由此人们将视觉信息处理的尺度空间方法与偏微分方程联系起来, 并逐渐发展了各种不同的尺度空间。其中, 最为基础的四类尺度空间依次为: 线性尺度空间([2][3])、非线性尺度空间([5][6])、形尺度空间([7][8]) 和数学形态学尺度空间([5][7])。这四类基本尺度空间构成了计算机视觉中尺度空间方法的主体。当前国际上流行的众多视觉多尺度分析方法基本上均属于这四类尺度空间之一, 例如, Mumford-Shah 泛函([9])或者主动轮廓([10])模型均可以转化为非线性偏微分方程, 从而可视为非线性尺度空间方法; 而 Snakes 算法([8][11])作为一种曲线演化算法可视为一类形尺度空间算法, 等等。

目前, 欧美国家的一大批学者致力于尺度空间理论及其在计算机视觉中的应用研究, 具有代表性的例如: Morel, Guichard 等人在尺度空间的偏微分方程理论方面进行了大量的基础性研究([5][7][11][12][13]); Sapiro 等人在计算机视觉的几何偏微分方程方法研究中取得了突出进展([8][14][15][16][17][18]); Chan 等人在图像处理的偏微分方程方法方面取得了较多的研究成果([10][19][20][21][22])。然而, 国内在该领域的研究起步较晚, 虽然自上世纪90年代以

收稿日期: 2005-04-26. 作者简介: 孙剑(1981年生), 男, 博士研究生, 研究方向: 偏微分方程在计算机视觉和图像处理中的应用、信息安全。

*基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70531030)。

来, 数学和工程等领域的研究者在国内的期刊上陆续发表了关于主动轮廓 (active contour) 方法([23])、Mumford-Shah 变分方法([24][25])、蛇 (snake) 模型方法([26])以及 PDE 图像处理综述([27])等方面的文章, 但是深入的、基础性的研究涉及较少。

本文综述计算机视觉中尺度空间方法的基本思想、理论基础、视觉处理能力以及实现方法。第二节通过介绍视觉多尺度分析思想, 引入尺度空间方法的公理化定义, 并给出尺度空间与抛物型偏微分方程的联系; 第三至第六节分别介绍线性尺度空间、非线性尺度空间、形尺度空间和数学形态学尺度空间; 第七节介绍尺度空间方法的具体实现; 第八节总结本文并提出当前尺度空间方法值得研究的问题。

以下如不特殊说明, 所有图像处理结果均基于本文作者的模拟实验所得。

2 视觉多尺度分析与尺度空间方法

视觉多尺度分析是一种新的视觉信息处理方法, 其基本思想是: 当我们用眼睛观察物体且物体和观察者之间的距离 (将距离视为尺度参数) 不断变化时, 视网膜将感知到不断变化的图像信息, 分析和综合这些不同尺度下的视觉信息以获得被观察物体的本质特征, 这种视觉分析方法即称为视觉多尺度分析。

尺度空间方法是一种尺度参数连续、不同尺度下空间采样保持一致性的视觉多尺度分析([4])。基于视觉多尺度分析, 尺度空间可严格定义如下:

定义 1 设多尺度分析的初始图像为 $u_0(x)$ ($x \in \Omega$, Ω 为图像区域), $u(x, t)$ 为多尺度分析用于图像所获得的在尺度 t ($t > 0$) 时的图像, 称 $T_t: u_0(x) \rightarrow u(x, t)$ 为尺度空间算子, 尺度空间算子族 $\{T_t\}_{t>0}$ 为尺度空间, 并称 $T_{t+h}: u(x, t) \rightarrow u(x, t+h)$ 为尺度由 t 变化到 $t+h$ 的尺度空间算子。

上述定义将视觉多尺度分析抽象为尺度空间算子作用, 而以下我们将看到尺度空间算子又反过来能够确定视觉多尺度分析。事实上, 依据视觉公理, 尺度空间算子应满足如下定义的视觉不变性:

定义 2 设 T_t 为尺度空间算子, 称 T_t 具有

- 1) 灰度不变性, 如果对任意常数 c , $T_t(u+c) = T_t(u) + c$;
- 2) 对比度不变性, 如果对任意非降实函数 f , $T_t(h(u)) = h(T_t(u))$;
- 3) 平移不变性, 如果对任意常数 h , $T_t(\tau_h(u)) = \tau_h(T_t(u))$, 其中 $\tau_h(u) = u(x+h)$;
- 4) 尺度不变性, 如果对于任意正实数 λ 和尺度参数 t , 存在 $t'(t, \lambda) > 0$, 使得 $H_\lambda T_{t'} = T_t H_\lambda$, 其中 $H_\lambda u = u(\lambda x)$;
- 5) 欧基里德不变性, 如果对于任意正交矩阵 \mathbf{R} , $T_t(\mathbf{R} \cdot u) = \mathbf{R} \cdot T_t(u)$, 其中, $(\mathbf{R} \cdot u)(x) = u(\mathbf{R} \cdot x)$;
- 6) 仿射不变性, 如果对于任意仿射变换 A 和任意尺度参数 t , 存在 $t'(\lambda, A) > 0$, 使得 $AT_{t'} = T_t A$ 。

上述诸不变性定义的视觉解释如下: 当我们用眼睛观察物体时, 一方面, 当物体所处背景的光照条件变化时, 视网膜感知图像的亮度水平和对比度是不同的, 因此要求尺度空间算子对图像的分析不受图像的灰度水平和对比度变化的影响, 即满足灰度不变性和对比度不变性; 另一方面, 相对于某一固定坐标系, 当观察者和物体之间的相对位置变化时, 视网膜所感知的图像的位置、大小、角度和形状 (三维物体投影到视网膜上的二维图像轮廓, 通常对应于图像的仿射变换) 是不同的, 因此要求尺度空间算子对图像的分析与图像的位置、大小、角度以及仿射变换无关, 即满足平移不变性、尺度不变性、欧基里德不变性以及仿射不变性。

定义2所描述的诸不变性构成了具体化尺度空间算子或进一步发展特定多尺度分析模型的基础。为了能更清晰地表达尺度空间算子, 通常还要求尺度空间算子满足如下定义3所述的因果性:

定义3 设 T_t 为尺度空间算子, 称 T_t 具有因果性(causality), 如果 T_t 满足:

- 1) **锥形性**, $T_{t+h} = T_{t+h,t}T_t$, $T_0 = \text{Id}$;
- 2) **局部对比性**, 如果图像 u, v 在 x 的某个邻域内满足 $u(y, t) > v(y, t)$, $y \neq x$, 则当 h 足够小时, $(T_{t+h,t}u)(x) > (T_{t+h,t}v)(x)$;
- 3) **正则性**, 对于二次型 $u(y) = \frac{1}{2}\langle A(y-x), (y-x) \rangle + \langle p, y-x \rangle + c$ (其中 c 为常数), 存在关于 A 连续的函数 $F(A, p, x, c, t)$, 满足:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T_{t+h,t}u - u)(x, t)}{h} = F(A, p, x, c, t), \quad (1)$$

即 $F(A, p, x, c, t)$ 是 T_t 的无穷小生成元。

上述定义所叙述的锥形性意味着大尺度下的图像可以通过对小尺度图像的尺度空间算子作用而直接获得, 局部对比性意味着尺度空间算子作用对图像灰度值的局部保序性, 而正则性则是为导出尺度空间算子表达形式而引入的附加要求。

定义3所刻画的因果性, 使尺度空间算子对图像的作用与一定形式的偏微分方程联系起来, 更具体地说, 有以下基本结论:

定理1^[5,7] 假设 $u(x, y) \in C^2$ (即二阶连续可微函数), 且尺度空间算子 T_t 具有因果性, 则存在函数 F 满足:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T_{t+h,t}u - u)(x, t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x, t+h) - u(x, t))}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2u, Du, u, x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

且 $F(D^2u, Du, u, x, t)$ 关于矩阵 D^2u 非降。

定理1的重要性在于它从原理上建立了尺度空间与抛物型偏微分方程之间的对应关系: 如果给定尺度空间算子 T_t , 则依据定理1可确定相应的抛物型偏微分方程 (如不特殊说明, 以下均在此意义上称算子满足某一抛物型偏微分方程); 而反之, 如果给定某抛物型偏微分方程且方程的解为 $u(x, t)$, 则依据定义1可确定尺度空间算子 $T_t: u_0(x) \rightarrow u(x, t)$ ($u_0(x)$ 为方程的初始条件, 即原始图像)。由此可见, 尺度空间算子与抛物型偏微分方程在一定意义上是相互决定的。

3 线性尺度空间

Marr 和 Hildreth 于1980年最早将高斯函数应用于图像的滤波处理中([4]), 而高斯滤波作为线性尺度空间则最早由 Witkin 提出([2]), 此后由 Koenderink([3])等人进一步发展。线性尺度空间的核心思想是将初始图像 $u_0(x)$ 与高斯函数 $G(x, t)$ 做卷积, 通过高斯参数 t 的变化, 而获得不同尺度下的图像 $u(x, t)$, 即令:

$$u(x, t) = u_0(x) * G(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in (0, \infty),$$

其中 $G(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$ 。容易证明 $u(x, t)$ 恰好是热扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

的解。而另一方面,如果要求尺度空间算子具有因果性和一定的不变性,上述热扩散方程也是唯一满足所述性质的偏微分方程,即有下述定理2。

定理 2^[5,7] 如果尺度空间算子 T_t 具有因果性、欧基里德不变性和线性性(对任何图像 u 和 v , 满足 $T_t(au + bv) = aT_t(u) + bT_t(v)$, 其中 a 和 b 为实数), 则该尺度空间算子 T_t 必满足 (3) 式。

热扩散方程显然具有线性性, 所以上述多尺度分析常称之为线性尺度空间方法。线性尺度空间方法较好地体现了视觉多尺度分析的思想, 因而最早广泛应用于图像滤波和深层结构分析(deep structure analysis)。然而, 线性尺度空间具有以下明显缺陷: 一方面, 热扩散方程描述的是各向同性的扩散过程, 因此在光滑图像时, 任意像素点的灰度值在各个方向的扩散都相同, 这必然引起图像边缘模糊化; 另一方面, 对比度不变性和线性性是一对矛盾, 热扩散方程的线性性决定了它无法满足对比度不变性。例如, 如图1所示, 随着尺度 t 的增加, 图像逐渐光滑, 但图像的细节信息逐渐变得模糊, 且对比度发生了显著变化, 这是图像处理所不愿看到的。因此, 为克服线性尺度空间的缺陷, 必须研究非线性尺度空间方法。

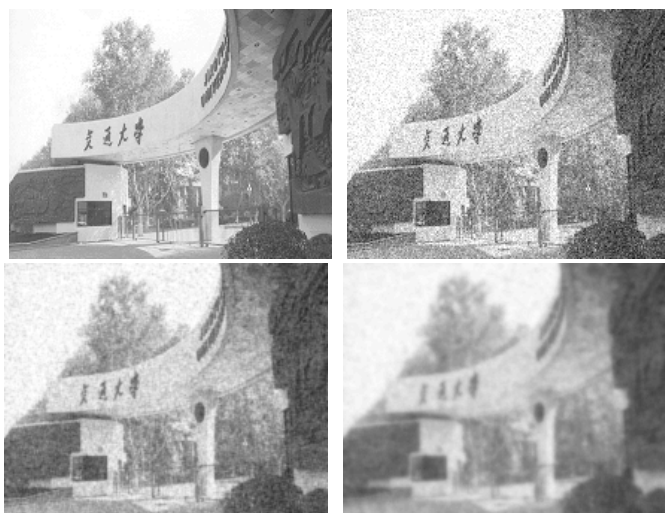


图1: 线性尺度空间模型的去噪效果

(四幅图分别为交大北门图像、加噪图像、 $t=1$ 和 $t=5$ 的去噪图像)

4 非线性尺度空间

4.1 各向异性的扩散方程模型

为克服热扩散方程模糊图像边缘的缺陷, Perona 和 Malik([6])提出热扩散方程的如下改进形式(即各向异性的扩散方程模型, 常称之为 Perona&Malik 模型):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla u|^2) \nabla u), & \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (4)$$

这里 Ω 为图像的空间区域, T 为模型达到稳定状态的时间, $c(s) : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ 为一单调递减函数, 并且

$$\operatorname{div}(v(x, y)) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5)$$

由(4)式可见, 当 $c(\cdot) \equiv 1$ 时, Perona&Malik 模型退化为线性尺度空间方法中的热扩散方程; 如果 $c(0) = 1$, 则模型在图像内部光滑区域 ($|\nabla u|$ 趋向于0) 接近于热扩散方程; 而如果进一步要求 $\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = 0$, 则模型在图像边缘区域 ($|\nabla u|$ 趋向于无穷) 接近于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

因此图像边缘的扩散几乎为0, 从而可有效保持图像边缘。图2展示了我们将 Perona&Malik 模型应用于图1中加噪图像时的去噪效果, 由图2可见, Perona&Malik 模型能在较好地保持图像边缘的前提下逐渐光滑图像内部区域。

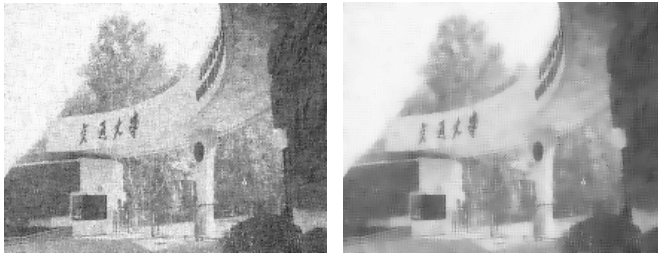


图2: Perona&Malik 模型应用于交大北门加噪图像的去噪效果, 这里取 $c(|\nabla u|^2) = \frac{1}{1+|\nabla u|}$
(左右图像分别为 $t = 5$ 和 $t = 15$ 的去噪图像)

4.2 非线性尺度空间公理化分析

Perona&Malik 模型是在保持图像边缘的意义上对线性尺度空间模型的直观改进, 然而该模型本质上是病态的, 即模型作用于图像达到稳定状态时的处理结果并不具有唯一性([28]), 而且它在多大程度上满足尺度空间的视觉不变性也是不明确的问题, 因此我们希望用类似于线性尺度空间公理化分析的方法来导出更具视觉解释的一般非线性尺度空间模型。

定理1表明: 具有因果性的尺度空间算子必满足抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2u, Du, u, x, t),$$

其中 $F(D^2u, Du, u, x, t)$ 关于 D^2u 具有非降性, 而 F 的具体表达形式可依赖尺度空间算子满足视觉性质的不同程度而逐步具体化。

定理 3^[5,7] 设为尺度空间算子, 在一定条件下下述陈述成立:

- 1) T_t 的灰度不变性蕴涵 F 与 u 无关;
- 2) T_t 的平移不变性蕴涵 F 与 x 无关;
- 3) T_t 的欧基里德不变性蕴涵 $F(RAR^T, Rp, t) = F(A, p, t)$, 其中 $p = Du$ 为 u 的一阶导数 (即梯度), $A = D^2u$ 为 u 的二阶导数 (即海森矩阵);
- 4) T_t 的对比度不变性蕴涵

$$F(\mu A + \lambda p \otimes p, \mu p, t) = \mu F(A, p, t),$$

其中 $A = D^2u$, $p = Du$;

5) 如果 T_t 具有因果性、平移不变性、灰度不变性、欧基里德不变性、对比度不变性和尺度不变性, 则 F 必具有下述形式:

$$F = |Du|\beta(t \cdot \text{curv}(u)),$$

其中 β 为非降函数, $\text{curv}(u)$ 为 $u(x,t)$ 的曲率。

由上述定理即可导出如下述基本结论:

定理 4^[5,7] 如果尺度空间算子 T_t 满足定理3 5)的条件, 且具有仿射不变性, 则尺度空间算子 T_t 满足:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |Du|(\text{curv}(u))^{1/3}.$$

方程(5)通常称之为仿射不变曲率方程。该方程具有良好的视觉性质, 尤其是对比度不变性和仿射不变性, 而这些性质是线性尺度空间方法所不具备的。目前, 该方程已被广泛应用于图像分析领域。图3展示了运用仿射不变曲率方程分析图像的效果。由图3可见, 随着尺度参数的增大, 图像的主干信息逐渐显现且对比度基本保持不变, 通过实验也可以验证该方程用于图像处理时也基本满足仿射不变性。



图3: 仿射不变曲率方程应用于字符@图像的处理效果
(左、右图像分别为不规则字符@和演化后的规则字符@)

5 形(shape)尺度空间

线性尺度空间和非线性尺度空间关注的是图像的整个空间区域, 然而在视觉识别和分析中, 我们也常常关心图像中的某些局部区域(例如水平集和水平线)。本节将介绍的形尺度空间方法提供一种图像局部分析工具。简略地说, 当我们考察图像细节特征时, 如果将针对图像区域子集的多尺度分析转化为针对围成该子集的约当曲线(即闭和的简单曲线)的多尺度分析, 这种分析方法即称之为形尺度空间方法([5][7]), 更严格的定义如下:

定义 4 由任意约当曲线 $l(s)(s \in \mathbf{R})$ 所围成的有界闭集 X 称为一个形。设 $X(t)$ 为多尺度分析作用于形 X 所获得的尺度为 $t(t > 0)$ 时的形, 则称算子 $T_t: X \rightarrow X(t)$ 为形尺度空间算子, 算子族 $\{T_t\}_{t>0}$ 为形尺度空间, 且 $T_{t+h,t}: X(t) \rightarrow X(t+h)$ 为尺度 t 到 $t+h$ 的形尺度空间算子。

根据上述定义, 形尺度空间是通过演化围成局部区域的约当曲线来分析图像局部特征的多尺度分析方法, 因此我们要求它所具备的不变性和因果性与定义2, 3有所不同。更具体地, 我们要求它具备如下定义5所述的性质。

定义5 设 T_t 为形尺度空间算子, 称 T_t 具有

- 1) **各向同性**, 如果 $D = D(x, r)$ 是以 x 为中心, r 为半径的圆盘, 则 $T_{t+h,t}(D)$ 是以 x 为圆心, 以 $\rho(t, h, 1/r)$ 为半径的圆盘;
- 2) **仿射不变性**, 如果对形 X 以及任意的仿射变换 A 和尺度 $t > 0$, 存在 $t'(\lambda, A) \geq 0$, 使得 $AT_{t'}(t, A)X = T_tAX$;
- 3) **因果性**, 如果 T_t 同时满足
 - a. **锥形性**: $T_{t+h} = T_{t+h,t}T_t$, $T_0 = \text{Id}$;
 - b. **形局部包含性**: 如果在图像区域中某点 x 的 r 邻域 $B(x, r)$ 内, 集合 $X \subset Y$, 则当 h 足够小时,

$$(T_{t+h,t}(X(t)) \cap B(x, r)) \subset (T_{t+h,t}(Y(t)) \cap B(x, r));$$

- c. **正则性**: 对于任意正数 t, τ, h , 函数 $h \rightarrow \rho(t, h, 1/r)$ 在 $h = 0$ 处关于 h 可微, 且 $g(t, 1/r) = \frac{\partial \rho}{\partial h}(t, 0, 1/r)$ 关于 $1/r$ 连续。

可以证明, 具备定义5所述性质的形尺度空间算子必由某个偏微分方程所诱导, 更具体地, 有下述定理5:

定理5^[7] 设 T_t 为形尺度空间算子, $l_0(s)$ 为围成形 X 的约当曲线, $l(t, s)$ 为 $l_0(s)$ 在 T_t 作用下尺度 t 时的演化曲线, 假定 T_t 具备定义5所述的各向同性、仿射不变性与因果性, 则算子 T_t 必满足:

$$\frac{\partial l}{\partial t}(t, s) = (t|\text{Curv}(l(t, s))^{1/3}n(t, s)|), \quad (6)$$

其中

$$\text{Curv}(l) = \partial^2 l / \partial s^2, \quad n = \frac{\text{Curv}(l)}{|\text{Curv}(l)|}.$$

方程(6)称之为仿射曲线演化方程 (affine plane curve evolution equation)。由于该方程具备良好的视觉性质 (如各向同性和仿射不变性), 已成为当前图像局部特征分析中的基本方法。还可以证明 ([7][8]), 在一定条件下, 仿射曲线演化方程(6)为仿射不变曲率方程(5)的局部化形式, 而仿射不变曲率方程为仿射曲线演化方程的全局化形式, 从而说明两方程在一定意义上的等价性。

在图4中, 我们展示了仿射曲线演化方程应用于手形轮廓曲线的图像处理效果, 其中, 手的轮廓线可视为约当曲线, 它所围成的区域可视为形。由图4可看到, 随着尺度的增加, 轮廓线细节信息逐渐消失, 曲线逐渐光滑。

6 数学形态学尺度空间

数学形态学 (mathematical morphology) ([26][7][5]) 是以形态为基础对图像进行分析的数学工具, 它最早由 Matheron([29]) 和 Serra([30]) 于上世纪70年代提出。数学形态学的基本思想是: 通过调整所含参数, 逐渐简化图像, 但同时保持图像的基本形状, 因此其分析图像的过程具有视觉多尺度分析的特征。将数学形态学纳入尺度空间框架, 它主要由膨胀和腐蚀两类基本算子构成, 严格定义如下:

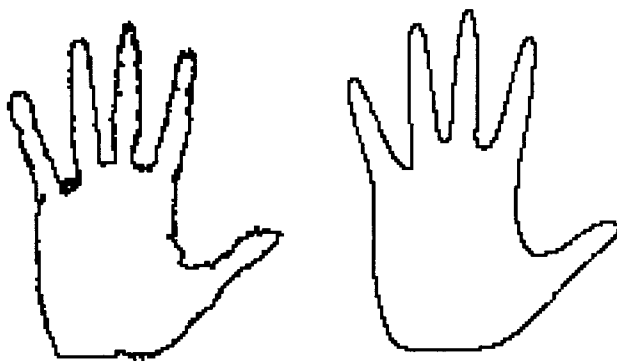


图4: 仿射曲线演化方程应用于手形图像的处理效果
(左、右图像分别为不规则手形图和处理后的规则手形图)

定义 6 给定图像 u_0 和集合 B , 尺度为 t 的膨胀算子定义为:

$$D_t(u_0(x)) = \sup_{y \in tB} u_0(x - y),$$

而尺度为 t 的腐蚀算子定义为:

$$E_t(u_0(x)) = \inf_{y \in -tB} u_0(x - y).$$

集合 B 称为结构元素 (structure element), 算子族 $\{D_t\}_{t \geq 0}$ 和 $\{E_t\}_{t \geq 0}$ 分别称为膨胀和腐蚀数学形态学尺度空间。

可以证明, 膨胀和腐蚀数学形态学尺度空间也可以与某种偏微分方程联系起来, 具体地说, 有下述定理6:

定理 6 (Lax formula [31]) 设 D_t (或者 E_t) 为膨胀 (或者腐蚀) 数学形态学尺度空间算子, 且 $u(t, x) = D_t u_0(x)$ (或者 $E_t u_0(x)$), 则 D_t (或者 E_t) 满足:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|Du\|_{-B} \text{ (或者 } -\|Du\|_B). \quad (7)$$

遗憾的是, 上述膨胀和腐蚀数学形态学尺度空间并不具备仿射不变性, 而仿射不变性是计算机视觉和图像处理应用的基本要求, 因此下述定义7将仿射不变性引入膨胀算子和腐蚀算子。

定义 7 设 \mathfrak{R} 为结构元素集合, 且满足 $A\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ (其中 A 是行列式为1的线性变换矩阵), 记 $\mathfrak{R}_h = h^{3/2}B; B \in \mathfrak{R}$, 则仿射膨胀算子和仿射腐蚀算子分别定义为:

$$IS_h u(x) = \inf_{B \in \mathfrak{R}_h} \sup_{y \in B+x} u(y),$$

$$SI_h u(x) = \sup_{B \in \mathfrak{R}_h} \inf_{y \in B+x} u(y).$$

称算子 $T_h = SI_h \circ IS_h$ 为仿射不变迭代滤波算子。

可以证明, 定义7所定义的仿射膨胀算子和仿射腐蚀算子具有仿射不变性, 并且满足非线性尺度空间中的仿射不变曲率方程。更严格地说, 有下述定理7成立:

定理 7 (Lax formula [31]) 设 $u_0(x)$ 为定义在 R^2 上的 Lipschitz 连续函数, 则仿射不变迭代滤波算子 $T_h = SI_h \circ IS_h$ 在一定条件下满足仿射不变曲率方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |Du| \text{curv}(u)^{1/3}, \quad (8)$$

其中, curv 为 $u(x, t)$ 的曲率。

值得注意的是, 方程(8)恰好为非线性尺度空间方法中的仿射不变曲率方程。因而, 本节中的定理6、7建立了数学形态学方法和非线性尺度空间之间的对应关系。更具体些说, 在一定条件下, 非线性尺度空间方法可以通过数学形态学中的膨胀(或腐蚀)算子和仿射不变迭代滤波算子来实现, 而反之亦然。这说明两种尺度空间方法在一定意义上是一致的。

7 尺度空间方法的实现

由以上介绍知, 尺度空间方法本质上是偏微分方程对图像的作用。然而大多数尺度空间相应的偏微分方程并不存在显式解, 因此如何以数值方式实现这种作用是尺度空间方法应用的关键。数值实现尺度空间方法的总体原则是: 给定某尺度空间, 将待处理或分析的图像作为相应偏微分方程的初始条件, 并以图像像素点为区域剖分网格点, 数值求解偏微分方程, 求解得的全部网格点(即像素点)上的数值解便可构成由尺度空间分析所获得的特定尺度下的图像。

目前最常用的两类偏微分方程数值求解技术是差分法([32])和有限元法([33]), 由于数字图像具有像素点网格规则分布的特点, 而差分法恰恰要求网格点规则分布, 且它相对于有限元法更易实现, 因此差分法已成为尺度空间方法实现的主流算法(当然也可应用有限元法 [34])。差分法求解偏微分方程的关键在于如何构造差分格式, 而偏微分方程差分格式的构造方法已较为成熟([32]), 但在尺度空间方法的具体实现中, 我们仍需特别关注如下两个问题:

- 1) 边界条件的处理。尺度空间方法相应的偏微分方程通常采用 Neumann 边值条件, 所以网格外的离散点的灰度值通常用相对于边界与该点对称的内部网格点的灰度值代替([32]);
- 2) 尺度参数的离散间隔(即 Δt)的选取。通常的选取考虑如下要求: 一是基于算法稳定性的要求。稳定性是衡量差分格式好坏的关键, 通常显式差分格式仅在一定条件下满足稳定性要求, 例如, 热扩散方程显式差分格式要求满足稳定性条件

$$\Delta t/h^2 \leq 1/4,$$

其中, h 是空间区域网格剖分的间隔值, 通常 h 取为1, 因此要求 Δt 满足

$$\Delta t \leq 1/4.$$

二是基于视觉背景的要求。例如, 文[35]提出了基于视觉 Weber 定律的尺度参数选择策略, 即 Δt 取为0.029。

针对不同尺度空间方法相应的偏微分方程, 例如热扩散方程、仿射不变曲率方程、各向异性扩散方程等, 均可通过构造相应的差分格式实现对图像的尺度空间分析, 具体请参见文献[6]、[7]、[8]、[36]和[37]。

8 总结与若干值得研究的问题

本文概述了用于视觉多尺度分析的四类基本尺度空间方法: 线性尺度空间方法、非线性尺度空间方法、形尺度空间方法和数学形态学尺度空间方法, 与之相关的基本结论如下:

1) 线性尺度空间方法。它由热扩散方程所描述, 广泛应用于图像滤波领域, 但它具有模糊图像边缘、破坏图像对比度的缺陷;

2) 非线性尺度空间方法。Perona&Malik 模型是对线性尺度空间的直观改进, 该模型能在保持图像边缘的前提下光滑图像, 因此具有较高的实用价值; 另外, 仿射不变曲率方程是非线性尺度空间公理化体系下的最佳方程, 该方程具有较高的理论价值和实用价值, 且已广泛应用于图像分析、识别等领域;

3) 形尺度空间方法。仿射平面曲线演化方程是该方法公理化体系下的最佳方程, 该方程可视为仿射不变曲率方程的局部化形式。形尺度空间方法及其所延伸的几何偏微分方程方法 [8]是目前图像局部分析的前沿方法;

4) 数学形态学尺度空间方法。该方法由膨胀算子和腐蚀算子所刻画, 由它们的仿射变形所定义的仿射不变迭代滤波算子满足仿射不变曲率方程。因此, 数学形态学方法与非线性尺度空间方法本质上一致且可相互实现。

目前, 尺度空间方法的理论和应用研究主要有以下几个方面值得关注的问题:

1) 理论方面。尽管从视觉的基本原理、形态学算子等出发已导出各种偏微分方程模型, 但这些偏微分方程解的存在性、唯一性、正则性以及渐进性态等理论研究尚不完善 (例如 Perona&Malik 模型解的病态问题 [28]);

2) 数值实现方面。目前用于实现尺度空间方法的差分算法具有计算量大、计算时间长和稳定性无法完全保障的缺陷, 尚无法应用于对实时性要求很高的视频处理、运动检测等领域, 因此如何设计快速、稳定的尺度空间算法成为视觉尺度空间分析中非常现实的问题。

3) 最优尺度选择方面。尺度空间方法作为一种视觉多尺度分析方法, 提供了不同尺度参数下的视觉信息, 而如何结合视觉或者实际问题的背景, 选择一定意义上的最优尺度参数是尺度空间方法应用中的核心问题。在这方面, Lindeberg([38])采用信息熵来度量不同尺度下的视觉信息, 对进一步研究最优尺度选择具有借鉴意义。

4) 与其它学科交叉和融合方面。信息科学的快速发展使得不同学科领域均面临着如何从庞大、交叉的数据中提取和分析不同层次信息的困难。尺度空间方法提供了一种信息多尺度分析方法, 同时为海量信息的分层次、多尺度分析提供了理论框架。如何应用尺度空间原理, 进一步发展新的信息多尺度分析方法显然具有特别重要性。例如, 文[35]和[39]将尺度空间思想应用于数据聚类、分类和回归分析, 是该方面非常成功的尝试。

总之, 尺度空间方法作为当前众多视觉多尺度分析方法的统一框架, 包含着丰富而具有挑战性的思想和方法, 具有传统的计算机视觉和图像处理方法所不具备的优势。随着不同学科的交叉和融合, 尺度空间思想必将成为一种新的信息多层次、多尺度分析的科学思想, 并逐渐会渗透到模式识别、生物信息技术、数据挖掘等所有涉及信息识别和分析的领域, 进而发展成为国际上非常活跃的研究方向。

参考文献:

- [1] Iijima T. Basic theory of pattern normalization (for the case of a typical one dimensional pattern)[J]. Bulletin of the Electrotechnical Laboratory, 1962;26:368-388
- [2] Witkin A P. Scale Space Filtering[A]. In Int. Joint Conf. Artificial Intelligence[C], 1983;1019-1021
- [3] Koenderink J J. The Structure of Image[J]. Biological Cybernetics, 1984;50:363-370
- [4] Tony Lindeberg, Bart M. Ter Harr Romeny. Linear scale space[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994
- [5] Luis Alvarez et al.. Axioms and Fundamental Equations of Image Processing[J]. Arch. Rational Mech. Anal, 1993;123:199-257

- [6] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE transaction 13 on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990;12(7):629-639
- [7] Guichard F, Morel J-M. Image iterative smoothing and P.D.E's[R]. Lecture Notes, Beijing, 1999
- [8] Guillermo Sapiro. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001
- [9] David Mumford, Jayant Shah. Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989;42(5):577-685
- [10] Tony F. Chan, Luminita A. Vese. Active Contour Without Edges[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2001;10(2):266-277
- [11] Morel J M, Solimini S. Variational methods in image segmentation[M]. Birkhauser, 1994
- [12] Guichard F. A morphological, affine, and galilean invariant scale-space for movies[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998;7(3):444-456
- [13] Guichard F. Multiscale analysis of movies[A]. In: Proceeding of the eighth workshop on image and multi-dimensional signal processing, IEEE[C], 1993;236-237
- [14] Sapiro G. From active contours to anisotropic diffusion: connections between the basic PDE's in image processing[A]. In Proceedings of the IEEE international conference on Image Processing[C]. New York: IEEE, 1996
- [15] Sapiro G, Albert Cohen, Alfred M. Bruckstein. A Subdivision Scheme for Continuous-Scale B-Splines and Affine-Invariant Progressive Smoothing[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1997;7:23-40
- [16] Caselles V. et al.. Geodesic Active Contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997;22(1):61-79
- [17] Olver P J. et al.. Affine Invariant Detection: Edge Maps, Anisotropic Diffusion, and Active Contours[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 1999;59:45-77
- [18] Giblin P J, Sapiro G. Affine-Invariant Distances, Envelopes and Symmetry Sets[J]. Geometriae Dedicata, 1998;71:237-261
- [19] Vese L, Chan T F. A Multiphase Level Set Framework for Image segmentation using the mumford and shah Model[J]. International journal of computer vision, 2002;50(3):271-293
- [20] Chan T F et al.. Active contours without edges for vector-valued images[J]. Journal of visual communication and image representation, 2000;11:130-141
- [21] Chan T F, Vese L. A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing[A]. 1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision[C], 2001;161-168
- [22] Chan T F, Vese L. Image segmentation using level sets and the piecewise-constant Mumford-Shah model[R]. Technical Report 00-14, UCLA CAM Report, 2000
- [23] 杨杨, 张田文. 一种新的主动轮廓线跟踪算法[J]. 计算机学报, 1998;21:298-302
- [24] 冯志林, 尹建伟, 陈刚, 董金祥. Mumford-Shah模型在图像分割中的研究[J]. 中国图象图形学报, 2004;9(2):151-158
- [25] 肖亮, 吴慧中, 韦志辉, 汤淑春. 图像分割中分段光滑Mumford&Shah模型的水平集算法[J]. 计算机研究与发展, 2004;41(1):129-135
- [26] 李培华, 张田文. 主动轮廓线模型(蛇模型)[J]. 综述软件学报, 2000;11(6):751-757
- [27] 王利生, 徐宗本. 偏微分方程在生物医学图像分析中的应用[J]. 工程数学位, 2004;21(4):475-490
- [28] You Yu-Li et al.. Behavioral Analysis of Anisotropic Diffusion in Image Processing[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 1996;5(11):1539-1553
- [29] Matheron G. Random Sets and Integral Geometry[M]. New York: Wiley, 1975
- [30] Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology[M]. Academic Press, 1982
- [31] Lax P D. Numerical solution of partial differential equations[J]. Am. Math. Mon., 1965;72(2):74-84
- [32] Thomas J W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods[M]. Springer-verlag, 1995
- [33] Alfio Quarteroni, Alberto Valli. Numerical approximation of partial differential equations[M]. Beijing: World Publishing Co., 1998
- [34] Blaise Bourdin, Antonin Chambolle. Implementation of adaptive finite-element approximation of the Mumford-Shah functional[J]. Numer. Math, 2000;85:609-646
- [35] Leung Yee, Zhang Jiang-she, Xu Zong-Ben. Clustering by Scale-Space Filtering[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000;22(12):1396-1410
- [36] Gilles Aubert, Pierre Kornprobst. Mathematical Problems in Image Processing[M]. New York: Springer-

Verlag, 2002

- [37] Rudin L. et al.. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992;60:258-268
- [38] Lindeberg. A scale selection principle for estimating image deformations[J]. Image and vision computing, 1998;16(14):961-977
- [39] Xu Zongben, Meng Deyu, Jing Wenfeng. A new approach for classification: visual simulation point of view[A]. In Proceeding of Second International Symposium on Neural Networks[C], 2005;1-8

A Review on Scale Space Method in Computer Vision

SUN Jian, XU Zong-ben

(Institute for Information and System Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: PDE method, variational method and mathematical morphology method have been applied in computer vision widely in recent years. As a uniform framework for these methods, scale space method has been one of the most popular research orientations in the field of computer vision. This paper reviews on the main thoughts, theoretical foundations, image processing abilities and implementations of the scale space method. Then we provide some research problems of the scale space method that are worthy of concern.

Keywords: scale space method; computer vision; partial differential equation; mathematical morphology